

УДК 62-503.51:00-007.51  
DOI: 10.25206/1813-8225-2018-157-83-87

А. Г. ЯНИШЕВСКАЯ  
Р. Ю. СКОРОБОГАТОВ  
С. Б. МИХАЙЛОВ  
В. И. СЕДИНИН

Омский государственный  
технический университет,  
г. Омск

Сибирский государственный университет  
телекоммуникаций и информатики,  
г. Новосибирск

## ЛИНЕЙНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ АНТРОПОМОРФНОГО РОБОТА

В статье рассматривается система дифференциальных уравнений, предназначенная для управления механическим движением антропоморфного робота в конкретном режиме из некоторого класса. Также задается система уравнений в частных производных, порождающая модели движения в конкретных режимах. В статье содержится краткое описание преобразования, порождающего уравнения в линейные.

**Ключевые слова:** антропоморфный робот, алгебра Ли, бигамильтонова система, цель управления, функционал качества.

**Введение.** В настоящее время роботизированные системы широко применяются на промышленных предприятиях. Однако применение антропоморфных систем за пределами сборочных цехов сейчас затруднено в связи с недетерминированной внешней средой, малой скоростью передвижения роботов (из-за больших объемов информации и несовершенных алгоритмов расчета движений), функциональной ограниченностью данных систем (по степеням свободы, углам поворота суставов и т.п.) и высокой стоимостью конечного продукта [1].

**1. Постановка задачи управления.** Разрабатываемый прототип предполагает: работу в режиме реального времени, 25 степеней свободы, функциональное подобие человеку, гибкую архитектуру и низкую стоимость относительно конкурентов [2].

В данной работе рассматривается получение лагранжевых моделей, задающих исполнение прототипом режимов движения из некоторого класса.

**2. Решение поставленной задачи.** Модель механической системы прототипа задана уравнением (24), указанным в соответствующем блоке функциональной схемы на рис. 1 [3]. Уравнения получены как уравнения Эйлера–Лагранжа для механической системы, не являющейся натуральной [4]. В пунктах А–Е содержится краткое поэтапное описание получения этих уравнений. Цепь построений образована гладкой экстремальной задачей с ограничением типа равенств (уравнение Ламе [5] с управляемыми краевыми условиями), переходом к бигамильтоновой системе эволюционных уравнений [6], линеаризацией второй правой части этой системы по Тахтаджану – Фаддееву [7] и последую-



Рис. 1. Функциональная схема алгоритма управления в фиксированном режиме движения

щим превращением уравнения с распределенными параметрами в (24) через введение конечного набора контрольных точек  $\{x^c\}$ .

Необходимо отметить, что лаконичность всех представленных в данной статье формул обусловлена большим количеством их аргументов. Например, уравнение (9) содержит 52 функции. Включение формулы (24) в информационную систему прототипа, согласно функциональной схеме на рис. 1, требует привлечения программы компьютерной алгебры «Mathematica» на стадии встраивания (24) в программный код.

А) Для каждого из 13 звеньев прототипа ДАР-2016 зафиксируем уравнение Ламе, замкнутое добавлением определения ускорения:

$$(\lambda + \mu) \text{grad div} \omega_K + \mu \Delta \omega_K + \rho F_K = \rho a_K; \quad K \in \overline{1,13}, \quad (1)$$

$$a_K = \left( \frac{\partial V_K}{\partial t} \right)_{x^i} + V_K^\alpha \frac{\partial V_K}{\partial x^\alpha} \quad (2)$$

$$V_K = \frac{d\omega_K}{dt} \quad (3)$$

Получим:

$$\frac{\partial V_K}{\partial t} = -V_K^\alpha \frac{\partial V_K}{\partial x^\alpha} + F_K + \frac{(\lambda + \mu)}{\rho} \text{grad div} \omega_K + \frac{\mu}{\rho} \Delta \omega_K. \quad (4)$$

На систему (3), (4) и управляемые краевые условия будем ссылаться как на выражения:

$$F(\omega, W[u(x)]) = 0, \quad (5)$$

$$F = F_y \oplus F_{Ky}; \quad F_y(\omega, v) \equiv (F_1(\omega^1, v^1), \dots, F_{13}(\omega^{13}, v^{13})), \quad (6)$$

$$\Phi[\omega(\bullet)] = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega^3} f(t, x, \omega(t, x)) dx dt. \quad (7)$$

Этот функционал приводит к математической модели механического движения прототипа (23) и функционалам конкретных режимов движения (25), (26). Его подинтегральная функция задается в первоначальный период подготовки прототипа к эксплуатации.

Совместно (3), (4) [упоминаемое как (5)] и (7) задают функцию Лагранжа экстремальной задачи:

$$L(\omega(\bullet), \rho(\bullet), \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega^3} \lambda f(t, \omega) + \rho F(\omega, v) dx dt. \quad (8)$$

Переход от функции Лагранжа (8) к функции Понтрягина  $h(\bullet)$  [8] позволяет записать вместо (3), (4) эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A_1 \circ \delta h, \quad (9)$$

здесь  $y = (\omega, v, p^1, p^2)$  и  $p^1(\bullet), p^2(\bullet)$  есть сопряженные к  $\omega(\bullet)$  и  $v(\bullet)$  функции.

В) Пусть  $M$  есть область в лабораторной системе координат, где предусмотрено перемещение 13-звенной механической системы прототипа ДАР-2016. Множество  $\text{Vect}[M; y]$  — алгебра Ли векторных полей на  $M$  с координатными функциями  $\omega, v, p^1, p^2; \text{pr}^{(2)}\text{Vect}[M; y]$  — соответствующая алгебра 2-продолжения [6];  $\text{Map}[M, g]$  есть алгебра Ли функций на  $M$  со значениями в вещественной полупростой алгебре Ли  $g$  [7, 9]. В алгебрах  $\text{pr}^{(2)}\text{Vect}[M; y]$  и  $\text{Map}[M, g]$  зафиксирована пара изоморфных подалгебр требованием равенства коммутаторов; ту из них, что включена в  $\text{pr}^{(2)}\text{Vect}[M, g]$ , будем называть  $A$ . Конструкция подалгебры  $A$  позволяет осуществить следующие построения:

Выделение в  $pr^{(2)}Vect[M; y]$  семейства подалгебр  $A_0^{\zeta}$ , изоморфных  $A$  и таких, что на коалгебрах  $A_0^{(\zeta)}$  существует система, эквивалентная (9):

$$\frac{\partial y^A}{\partial t} = A_1^A \circ \delta h^A. \quad (10)$$

Далее необходимо сделать выбор среди  $A_0^{\zeta}$  алгебры  $A_0$  со структурным оператором  $A_0$  скобки Тахтаджяна – Фаддеева, который позволяет получить следующее:

$$P := A_0^{-1} \circ (A_1^A \circ \delta h^A); A_p = A_p^{\zeta}. \quad (11)$$

Последнее равенство обеспечивает существование  $L(y^A)$  в (12) [6]:

$$L(y^A) = \int_0^1 y^A \bullet P(\lambda, y^A) d\lambda, \quad (12)$$

$$h_0 := \int_{R^4} L(y^A) dx dt,$$

$$\frac{dy^A}{dt} = A_1^A \circ \delta h^A = A_0 \circ \delta h_0. \quad (13)$$

Эволюционное уравнение, образованное левой и второй правой частью бигамильтоновой системы (13), относится к специальному классу, указанному Тахтаджяном Л. А и Фаддеевым Л. Д. в [7], и linearизуется в построенной ими технике.

С) Выделим указанное нелинейное уравнение:

$$\frac{dy^A}{dt} = A_0 \circ \delta h_0. \quad (14)$$

Группа Ли  $Map[M, G]$  соответствует алгебре Ли  $Map[M, g]$  [9], кривая  $g_-(t)$  принадлежит этой группе. Обозначение этой кривой указывает на ее роль в linearизации (14) и взято из [7]. Представление  $g_-(t)$  подчинено линейному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dt} Adg_-(t) = (Adg_-(t)) \circ \frac{d}{dt} a(t). \quad (15)$$

Оператор  $a(t)$  линеен;  $y_0^A$  есть начальное условие для (14) и решение (14) определено формулой:

$$y^A(t) = Ad^* g_-(t) y_0^A. \quad (16)$$

Все нелинейные дифференциальные уравнения и лагранжианы, записанные ниже, зависят от (15), (16).

Поэтому механическое движение прототипа ДАР-2016 задается линейным уравнением (15).

Д) Уравнения движения ДАР-2016 в лабораторной системе координат подчинены следующим обстоятельствам.

В сопутствующей системе координат механическая система прототипа покоится [5]. В ней выбраны контрольные точки звеньев прототипа  $\{\xi^c\}$  на основе адекватности описания режима-образца механическому движению человека. Точкам  $\{\xi^c\}$  соответствуют их траектории  $\{x^c(t) | t_0 \leq t \leq t_1\}$  в лабораторной системе координат.

Функционал лагранжевой механики, задающий движение контрольных точек, получается из (8) по нижеследующим правилам:

$$(\omega, \nu, p^1, p^2) \rightarrow (\omega^*, \nu^*, p^{1*}, p^{2*}) [W^0, \lambda^0, \mu^0, \rho^0], \quad (17)$$

здесь  $W^0, \lambda^0, \mu^0, \rho^0$  есть величины, близкие к зафиксированным в (4), (5), — краевые условия и механические константы. Четверка  $(\omega^*, \nu^*, p^{1*}, p^{2*}) [\bullet]$  есть решение (9) при соответствующем значении  $\theta$ -параметров.

Это решение получено из (16) посредством замен, обращающих переходы (9)  $\rightarrow$  (10)  $\rightarrow$  (16). Ниже функции из правой части (17) упоминаются как  $\omega^*, \nu^*, p^*$ .

$$\omega(t, x) \rightarrow \omega^*(t, \delta[x^c(t)]), \quad (18)$$

$$\nu(t, x) \rightarrow \nu^*(t, \delta[x^c(t)]),$$

$$p(t, x) \rightarrow p^*(t, \delta[x^c(t)]), \quad (19)$$

где  $\delta[x^c(t)] \equiv \delta[x^c]$  есть  $\delta$  — функция в точке  $x^c(t)$ .

$$f(t, \omega(x)) \rightarrow f(t, \omega^*(\delta[x^c])), \quad (20)$$

$$F(\omega, \nu) \rightarrow F(\omega^*(\delta[x^c]), \nu^*(\delta[x^c])). \quad (21)$$

Имеем обычные уравнения лагранжевой механики:

$$E[L](x^c, \dot{x}^c, \ddot{x}^c) = 0. \quad (22)$$

Здесь  $E[\bullet]$  — оператор Эйлера [3];  $L$  — получившийся по правилам (17) – (21) лагранжиан функционала  $J[\bullet]$ .

$$J[x^c(\bullet)] = \int_{t_0}^{t_1} L(x^c(t)) dt. \quad (23)$$

Е) Уравнение механического движения прототипа, задействованное в функциональной схеме на рис. 1, как и функционал качества (25), получается из функционала (23) переходом к переменным, адаптированным к измерительной и навигационной системам (датчики вращений в суставах, датчики вращений вокруг центра масс и т.п.) ДАР-2016 согласно [4].

$$\dot{Q} = F(Q, t). \quad (24)$$

Уравнение (24) есть нормальная форма уравнения второго порядка типа (22).

Цель управления задается с помощью функционала качества вида (25), такие функционалы фиксируют указанный ранее класс режимов движения. Например, в режиме движения «Ходьба по кривой  $\begin{cases} x = V_x(t) \\ z = V_z(t) \end{cases}$  от точки  $\begin{cases} A(t_0) \\ B(t_0) \end{cases}$  до точки  $\begin{cases} A(t_1) \\ B(t_1) \end{cases}$  за время  $t_1 - t_0$ » функционал вида (25) принимает вид (26):

$$J[U] = F[Q(t_1, U)] + \int_{t_0}^{t_1} pr_V[Q(t, U)] - V(t) dt \rightarrow \inf\{U\}, \quad (25)$$

$$J[U] = \left\| \begin{matrix} x(t_1, U) \\ z(t_1, U) \end{matrix} - \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\| +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \|pr_v[Q(t, U)] - V(t)\| dt \rightarrow \inf\{U\}, \quad (26)$$

$$Q(t, U) \in \{(q, x_c, y_c, z_c)\}.$$

$\|\cdot\|$  — евклидова норма вектора;  $pr_v[Q(t, U)]$  — проекция вектора  $Q(t, U)$  на подпространство значений вектора  $V(t)$ .

Функция  $V(t)$  изначально задается владельцем прототипа ДАР-2016 с помощью специальных средств ввода как математическое выражение желаемого им режима движения. Затем изначально полученная функция превращается в то выражение, которое использовано в формулах (25), (26):

$$V(t) = (q, x, y, z)^T \in R^{n+3}, \quad (27)$$

$q \in R^n = \langle \text{пространство обобщенных координат механической системы прототипа ДАР-2016} \rangle$ . Размерность этого пространства зависит от мощности множества контрольных точек  $\{x^c\}$ .

**2.1. Алгоритм управления в фиксированном режиме движения.** Для определенности можно предполагать, что зафиксирован режим движения «Ходьба по кривой

от точки  $\begin{pmatrix} A(t_0) \\ B(t_0) \end{pmatrix}$  до точки  $\begin{pmatrix} A(t_1) \\ B(t_1) \end{pmatrix}$  за время  $t_1 - t_0$ ».

$q(t)$  — обобщенные координаты механической системы прототипа.

$\hat{q}^1(t_0)$  — результат измерений тех координат, по которым управляется механическая система прототипа (например, углы отклонения звеньев  $\phi$ ).

$q^2(t_0)$  — те координаты механической системы, которые не измеряются.

Эти координаты вычисляются посредством подстановки функции  $U(t_0, \hat{q}^1(t_0))$  в модель измерительной системы.

Это вычисление осуществляется средствами, включенными в блок «Краевые условия».

$\tau$  — параметр управления, задающий последовательность моментов измерения  $\hat{q}^1(t_0)$ . Этот параметр определяется при проведении пусконаладочных работ.

$$N := \langle \text{целая часть от } (t_1 - t_0)/\tau \rangle.$$

1. Символизирует фактор внешних воздействий. До наладки изготовленного прототипа существование внешних воздействий учитывается посредством такого выбора синтезирующей функции  $U(t, q^1(t))$ , который обеспечивает экспоненциальную устойчивость движения.

По результатам наладки прототипа возможны следующие обновления системы управления:

а) модель объекта: система обыкновенных дифференциальных уравнений (24) заменяется на систему стохастических дифференциальных уравнений (далее — СДУ) в форме Ланжевена:

$$\dot{q}(t) = f(q, t) + b(q, t)X. \quad (28)$$

В (28)  $f(q, t)$  равен правой части системы (24) [10], получаем (29):

$$d_0 \bar{g}(t) = \Phi(\bar{g}, t) dt + B(\bar{g}, t) d_0 W. \quad (29)$$

Система СДУ (29) есть система в форме Ито. Именно она заменяет систему (24);

б) функционал качества: выражение (26) заменяется на следующее выражение:

$$J_{st}(U) = M[J(U)] \rightarrow \inf\{U\}. \quad (30)$$

В (30) функционал  $J(U)$  взят из (26). Он приобрел зависимость от случая  $\omega$  в силу того, что  $Q(t, U)$  в (30) есть часть координат  $\bar{g}(t) \equiv \bar{g}(t, \omega)$  — решения (29). Символы  $st$  соответствуют  $t_0$  и  $t_1$  в (26).

2. Символизирует фактор погрешности измерений. До наладки изготовленного прототипа учет погрешности измерений осуществляется так же, как учет фактора внешних воздействий 1. По результатам наладки прототипа возможны действия, указанные как  $a$  и  $b$  в связи с фактором 1.

**Заключение.** В данной статье показано включение математической модели движения в контур управления прототипом. Уравнение (24) размещено в соответствующем блоке функциональной схемы на рис. 1.

Показан подход к линеаризации соответствия  $\langle \text{целевая траектория движения} \rangle \rightarrow \langle \text{функция, синтезирующая управление} \rangle$  через переход от базовой экстремальной задачи для уравнения Ламе (5)–(7) к линейному дифференциальному уравнению (15).

Уравнение, непосредственно включенное в контур управления, является обыкновенным дифференциальным уравнением лагранжевой механики. Оно получено без обращения к твердотельным аппроксимациям жестких элементов механической системы прототипа.

В статье описаны лишь некоторые действия после наладки, случай случайных помех как таковой не рассмотрен, установленных после наладки механической системы прототипа. Это последовательный переход от обыкновенных дифференциальных уравнений (24) к стохастическим дифференциальным уравнениям (28), (29) и стохастическому функционалу (30).

#### Библиографический список

1. Скоробогатов Р. Ю. Расширение интерактивности компьютерной модели в телевизионной среде // Информационные технологии. Т. 22, № 5. С. 396–400.
2. Pogrebnyak E. M., Sedinin V. I., Skorobogatov R. Yu. Metrological opportunities of direct three — dimensional measurement of objects by means of the Kinect controller // 13 th International scientific technical conference on actual problems of electronic instrument engineering (APEIE): APEIE — 2016. Novosibirsk, 2016. Vol. 1, Part 1. P. 207–209. ISBN 978-5-7782-2992-5.
3. Сединин В. И., Михайлов С. Б., Скоробогатов Р. Ю. Личейность математической модели механического движения антропоморфного робота. // Современные проблемы телекоммуникаций: материалы Рос. науч.-техн. конф. / Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики. Новосибирск, 2017. С. 461–469. ISBN 978-5-91434-039-8.
4. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1989. 432 с.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды. В. 2 т. М.: Наука, 1970. Т. 1. 492 с.
6. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / пер. с англ. И. Г. Щербак; под ред. А. Б. Шабата. М.: ИО НФМИ, 1989. 639 с.
7. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 528 с.
8. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 384 с. ISBN 5-9221-0589-2.

9. Прессли Э., Сигал Г. Группы петель / пер. с англ. А. В. Зевлинского, А. О. Радула. М.: Мир, 1990. 456 с. ISBN 5-03-001331-8.

10. Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2000. 1000 с.

**ЯНИШЕВСКАЯ Анна Генриховна**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР» Омского государственного технического университета.

Адрес для переписки: anna-yanish@mail.ru

**СКОРОБОГАТОВ Роман Юрьевич**, аспирант, старший преподаватель кафедры «Системы автоматизированного проектирования» Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ).

Адрес для переписки: ro-m-a-n@yandex.ru

**МИХАЙЛОВ Сергей Борисович**, старший преподаватель кафедры «Высшая математика» СибГУТИ.

Адрес для переписки: sergmikh4@gmail.com

**СЕДИНИН Валерий Иванович**, доктор технических наук, профессор (Россия), заведующий кафедрой «Системы автоматизированного проектирования» СибГУТИ.

Адрес для переписки: sedvi@bk.ru

#### Для цитирования

Янишевская А. Г., Скоробогатов Р. Ю., Михайлов С. Б., Сединин В. И. Линейность математической модели механического движения антропоморфного робота // Омский научный вестник. 2018. № 1(157). С. 83–87. DOI: 10.25206/1813-8225-2018-157-83-87.

Статья поступила в редакцию 07.12.2017 г.

© А. Г. Янишевская, Р. Ю. Скоробогатов, С. Б. Михайлов, В. И. Сединин

УДК 004:[004.02+004.588] 377  
DOI: 10.25206/1813-8225-2018-157-87-91

**А. Е. УЛЬТАН**  
**Н. В. АБРАМЧЕНКО**  
**Н. А. МЕЩЕРЯКОВА**  
**Е. А. МЕЩЕРЯКОВ**

Финансовый университет  
при Правительстве Российской Федерации,  
г. Омск

## АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ-СЛЕДСТВИЙ

Цель работы состоит в разработке алгоритма, позволяющего в коллекции неравенств отыскивать неравенства-следствия. Такой алгоритм нужен для программы искусственного интеллекта, позволяющей, с одной стороны, самостоятельно решать школьные уравнения, неравенства и системы, а с другой — проверять правильность самостоятельного решения школьником этих задач. Все это способствует компьютеризации школьного образования.

**Ключевые слова:** компьютеризация образования, применение искусственного интеллекта в обучении, алгоритмы решения уравнений и неравенств, моделирование системы неравенств, нахождение неравенств-следствий.

В последнее время при программировании все чаще приходится сталкиваться с задачами искусственного интеллекта [1–7]. С этим мы сталкиваемся при создании компьютерной обучающей системы «Элементарная алгебра», которая должна не только сама решать школьные задачи по алгебре, но и проверять правильность решения ученика [8–10].

При создании такой системы необходимо помнить, что при решении алгебраических систем типа «И» основным является утверждение, представленное на рис. 1. Смысл этого утверждения в том, что изображенные на рисунке системы типа «И» эквивалентны (имеют одно и то же множество решений). Это означает, что для получения решения системы типа «И» можно поступать двояко:

1) можно решить А, решить В, решить С и полученное пересечь;

2) если С следует из А, В, то С можно просто удалить не решая и в дальнейшем решать и пересекать только А и В. Этот вариант значительно проще.

Как видим, если мы хотим, чтобы компьютерная программа не только сама решала системы типа «И», но и смогла проверить любое решение школьника и объяснить ему все способы решения, то необходимо иметь алгоритмы, позволяющие находить следствия в системах типа «И».

В частности, необходимо иметь алгоритм, находящий среди неравенств неравенства-следствия. Этому алгоритму и посвящена данная работа.

Точная постановка задачи следующая: дана коллекция неравенств, например, изображенная на рис. 2. За буквами, обозначающими правые и левые части неравенств, скрываются числа (возможно, в виде числовых выражений), имена величин или алгебраические выражения.