

# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.173(04)

**И. И. ГОНЧАР**  
**М. В. ЧУШНЯКОВА**  
**С. А. ГЕЛЬВЕР**

Омский государственный  
университет путей сообщения

## СЛИЯНИЕ СЛОЖНЫХ ЯДЕР: ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОЙ СВЕРТКИ И ПРОБЛЕМА АНОМАЛЬНО БОЛЬШОЙ ДИФFUЗНОСТИ

Мы разработали модель, с помощью которой нам удалось достичь некоторого прогресса в решении проблемы кажущейся аномально большой диффузности ядро-ядерного потенциала. Диффузность потенциала формы Вудса–Саксона должна быть очень большой для описания прецизионных данных по сечениям захвата. В нашей динамической модели диссипативная сила пропорциональна квадрату производной от потенциала. Последний вычисляется с помощью двойной свёртки МЗУ нуклон-нуклонного взаимодействия с плотностной зависимостью и конечным радиусом для обменной части. Нам удалось достичь соответствия с экспериментальными значениями, хотя потенциал двойной свёртки имеет малую диффузность.

**Ключевые слова:** аномально большая диффузность, потенциал двойной свёртки, слияние сложных ядер.

В последние два десятка лет накоплен обширный экспериментальный материал по сечениям захвата в реакциях со сложными ядрами («тяжёлыми ионами») [1, 2]. Сечения захвата обычно анализируют с помощью модели связанных каналов [3, 4]. Ключевым элементом этой модели является ядро-ядерный

потенциал, для которого обычно используют форму Вудса–Саксона:

$$U_n \{R\} = V_{ws} \left\{ 1 + \exp \left( \frac{R - r_{ws} (A_p^{1/3} + A_t^{1/3})}{\alpha_{ws}} \right) \right\}^{-1}. \quad (1)$$

В уравнении (1)  $R$  — расстояние между центрами масс сталкивающихся сферических ядер. Этот потенциал определяется тремя параметрами: глубиной  $V_{ws}$ , радиусом  $r_{ws}$  и диффузностью  $r_{ws}$ . Систематический анализ данных, проделанный в [1], показал, что для согласования расчёта с экспериментом требуется величина  $\alpha_{ws}$ , лежащая в диапазоне от 0,75 до 1,5 фм. Это намного больше, чем значение 0,65 фм, которое требуется для описания данных по упругому рассеянию.

Большое значение диффузности может маскировать динамические эффекты, которые не учитываются в модели связанных каналов. С целью выяснить этот вопрос мы проанализировали данные, используя классическую траекторную диссипативную модель (КТДМ) с поверхностным трением из работы [5]. Эта модель была впервые предложена в работе [6], а затем развита в работах [7–9].

В [6–10] ядро-ядерный потенциал вычислялся путём свёртки нуклон-ядерного оптического потенциала с нуклонной плотностью (однократная свёртка). В наше время можно использовать более продвинутый потенциал двойной свёртки МЗУ нуклон-нуклонного взаимодействия с плотностной зависимостью и конечным радиусом для обменной части [11, 12]. Кроме того, данные, которые анализировались в работах [6–10], имели типичную точность хуже 10 %. В настоящее время накоплены высокоточные данные с типичной погрешностью 1 %, которые содержатся в работах [13–15]. Соответственно, мы ставим задачу проанализировать эти новые данные с помощью динамической модели, в основе которой лежит потенциал двойной свёртки.

В нашей КТДМ воображаемая частица с приведённой массой движется под действием двух сил: консервативной и диссипативной. Поскольку оба ядра, участвующие в реакции  $^{16}\text{O} + ^{144}\text{Sm}$  [14], которую мы собираемся описывать, сферические, то достаточно учитывать только две степени свободы. Они соответствуют радиальному и орбитальному движениям. Мы используем безразмерные координаты  $q = R/R_{PT}$  и  $\varphi$ . Здесь  $R_{PT} = R_p + R_t$ .

Уравнения движения имеют вид:

$$\Delta p = (F_U + F_{cen} + F_{Dq})h_t, \quad \Delta q = \frac{p}{m_q} h_t; \quad (2 \text{ a,b})$$

$$\Delta L = F_{D\varphi}, \quad \Delta \varphi = \frac{hL}{m_q} h_t; \quad (3 \text{ a,b})$$

$$F_U = -\frac{dU_{tot}}{dq}, \quad F_{cen} = \frac{h^2 L^2}{m_q q^3}; \quad (4 \text{ a,b})$$

$$F_{Dq} = -\frac{p}{m_q} K_R \left( \frac{dU_n}{dq} \right)^2, \\ F_{D\varphi} = -\frac{(L - L_s)}{m_q} K_\varphi \left( \frac{dU_n}{dq} \right)^2. \quad (5 \text{ a,b})$$

В соотношениях (3 a,b–5 a,b) приняты следующие обозначения:

$p$  — импульс радиального движения;  
 $F_U$  и  $F_{cen}$  — консервативная и центробежная силы;  
 $F_{Dq}$  и  $F_{D\varphi}$  — диссипативные силы, отвечающие радиальному и орбитальному движениям;

$U_{tot}(q)$  — полная энергия взаимодействия, она состоит из кулоновской  $U_C(q)$  и ядерной  $U_n(q)$  частей;

$hL$  — проекция орбитального углового момента на ось, перпендикулярную плоскости реакции;

$m_{qm} = m_n A_p A_t R_{PT}^2 (A_p + A_t)$  — инерционный параметр радиального движения;

$m_q$  — масса нуклона;

$K_R$  — коэффициент, определяющий амплитуду радиальной силы трения;

$h_t$  — временной шаг компьютерного моделирования;

$K_\varphi$  — коэффициент, определяющий амплитуду орбитального трения;

$L_s = 7L_o/5$  — величина, к которой релаксирует  $L$  (когда  $L$  становится равным  $L_o$ , двойная ядерная система вращается как твёрдое тело).

Уравнения (2, 3) решались методом Рунге – Кутты 4-го порядка.

Температура системы, входящая в условия захвата (см. ниже), вычисляется по формуле:

$$\theta = \sqrt{E_{DP(T)} (a_1 A_{P(T)} + a_2 A_{P(T)}^{2/3})^{-1}}. \quad (6)$$

Здесь  $a_1 = 0,073 \text{ MeV}^{-1}$ ,  $a_2 = 0,095 \text{ MeV}^{-1}$  взяты из работы [16]. При выводе (6) предполагалось, что сталкивающиеся ядра находятся в состоянии теплового равновесия.

Ключевым параметром любой физической модели является энергия взаимодействия. Для её расчёта мы использовали потенциал двойной свёртки. Подробное описание этой модели и компьютерные коды можно найти во многих работах (см., например, [11, 12, 17, 18]). Мы использовали в данной работе потенциал двойной свёртки с конечным радиусом обменной части и плотностной зависимостью нуклон-нуклонного взаимодействия, как в работе [19] с параметрами  $C_v = 0,3429$ ,  $\alpha_v = 3,0232$ ,  $\beta_v = 3,5512 \text{ fm}^{-3}$ ,  $\gamma_v = 0,5 \text{ fm}^{-3}$ . Этот потенциал (мы будем ссылаться на него как на DF2-потенциал) обеспечивает правильное насыщение ядерных сил при большом перекрытии плотностей.

Для сравнения мы иногда приводим результаты, полученные с двумя другими потенциалами. Первый из них это потенциал Вудса – Саксона. Фактически это просто удобная формула, качественно отражающая короткодействие ядерных сил. Параметры этого потенциала взяты из работы [1] канберрской группы, где они подобраны так, чтобы с помощью модели проницаемости одномерного барьера (МПОБ) воспроизводились экспериментальные данные по сечения захвата. Для этого потенциала используется аббревиатура WSC (Woods – Saxon – Canberra).

Второй потенциал — это аналитическая аппроксимация симметризованной одинарной свёртки (формула Гросса – Калиновски из работы [6], GK-потенциал):

$$U_n(R) = \ln \left\{ 1 + \exp \left( -\frac{\Delta R}{a_{GK}} \right) \right\} [A_{0GK} + A_{1GK} \Delta R + A_{2GK} \Delta R^2]; \quad (7)$$

$$\Delta R = R - r_{GK} (A_p^{1/3} + A_t^{1/3}). \quad (8)$$

Здесь  $r_{GK} = 1,3 \text{ fm}$ ,  $a_{GK} = 0,61 \text{ fm}$ ,  $A_{0GK} = 33 \text{ MeV}$ ,  $A_{1GK} = 2 \text{ MeV}$ ,  $A_{2GK} = 3 \text{ MeV}$ .

На рис. 1а показана координатная зависимость полной энергии взаимодействия для реакции  $^{16}\text{O} + ^{144}\text{Sm}$ , вычисленная с DF2 потенциалом. Для сравнения приведены также зависимости  $U_{tot}(q)$ , полученные для этой реакции с потенциалами GK и WSC. Вертикальными линиями показаны радиусы барьеров. Значения этих радиусов, а также других параметров, использованных в расчётах,

следующие: для WSC  $a_{ws}=0,75$  фм,  $r_{ws}=1,108$  фм,  $V_{ws}=-100,0$  МэВ,  $q_b=1,3$ ; для DF2  $R_p=2,608$  фм,  $a_p=0,465$  фм,  $R_T=5,719$  фм,  $a_T=0,557$  фм (по данным работы [17]),  $q_b=1,34$ ; для GK параметры приведены в формуле (4),  $q_b=1,34$ .

Из рис. 1 видно, что эффективная диффузность DF2-потенциала является промежуточной: диффузность GK-потенциала заметно меньше, а диффузность WSC очень велика. На основании результатов расчётов, представленных на рис. 1, можно сделать вывод о том, что  $U_b(WSC) < U_b(DF2) < U_b(GK)$ .

Крутизна ядерной части потенциала определяет также поведение радиального фрикционного форм-фактора, показанного на рис. 1. В области барьера для нашего основного DF2-потенциала он также является промежуточным: для WSC-потенциала он заметно меньше, а для случая GK-потенциала — заметно больше.

Сечения захвата вычисляются в нашей работе по обычной формуле (см., например, [5])

$$\sigma = \frac{\pi \hbar^2}{2m_r} E_{c.m.} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) T_L. \quad (9)$$

Коэффициенты прохождения  $T_L$  рассчитываются либо с помощью КТДМ с поверхностным трением, либо с помощью МПОБ. В рамках КТДМ коэффициент прохождения либо ноль (если  $E_{c.m.} < U_{BLc}$ ), либо единица (если  $E_{c.m.} > U_{BLc}$ ). В МПОБ коэффициент прохождения выражается формулой Хилла — Уилера (см., например, [5]). Используя эту формулу, авторы работы [1] добились хорошей точности воспроизведения экспериментальных сечений захвата с WS потенциалом при энергиях столкновения на 5–10 % выше барьера. Глубина потенциала бралась фиксированной  $V_{ws} = -100$  MeV, а радиус и диффузность подгонялись для каждой реакции.

Результаты сравнения расчетных значений с экспериментальными данными представлены на рис. 2. На панели (а) этого рисунка показаны функции возбуждения захвата для системы  $^{16}O + ^{144}Sm$ . Такое представление результатов является традиционным, но мы предпочитаем использовать дальше другой метод: показывать не абсолютные значения экспериментальных и рассчитанных сечений, а отношение рассчитанного сечения к экспериментальному. Такой способ представления данных позволяет судить о степени согласия теории с экспериментом количественно. Он использовался неоднократно ранее в работах [20–23]. Эти отношения показаны на рис. 2б. Видно, что расчёт с помощью WSC-потенциала, имеющего большую диффузность ( $a_{ws} = 0,75$  фм), согласуется с экспериментом гораздо лучше, чем расчёт с DF2-потенциалом, имеющим заметно меньшую диффузность. В то же время DF2-потенциал, в отличие от WSC-потенциала, основан на хорошо обоснованном микроскопически МЗУ-нуклон-нуклонном взаимодействии с плотностной зависимостью. В этом и состоит суть проблемы аномально большой диффузности, в решении которой мы пытаемся продвинуться в данной работе.

На рис. 2 вверху представлены функции возбуждения захвата для системы  $^{16}O + ^{144}Sm$ ; внизу — отношение расчётных сечений к экспериментальным. В обоих случаях для расчёта использована МПОБ.

В модели остаются неопределёнными только коэффициенты  $K_R$  и  $K_\phi$ . Первый из них мы будем использовать в качестве подгоночного параметра. Значение  $K_\phi$  влияет на сечения очень слабо; во всех расчётах ниже  $K_\phi = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ MeV}^{-1} \cdot \text{zs}$ .

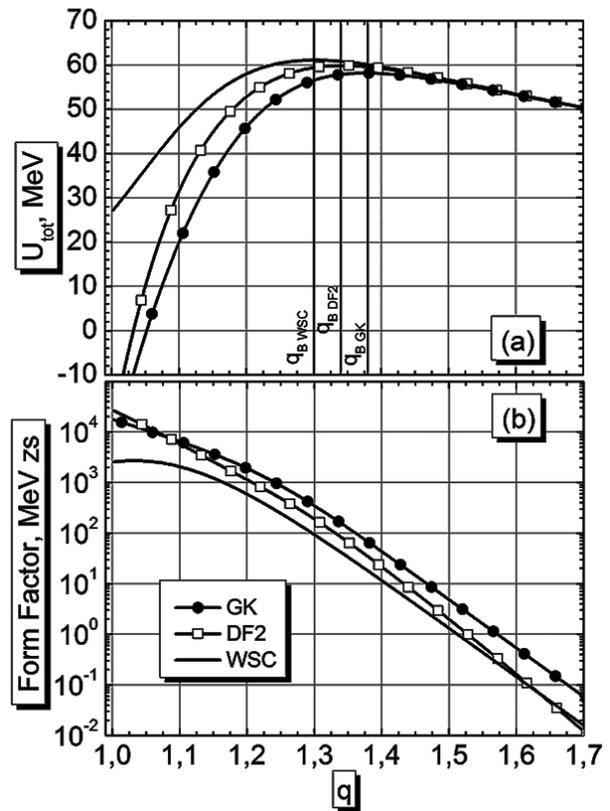


Рис. 1. Зависимость от межцентрового расстояния а) полной энергии взаимодействия  $U_{tot}(q)$ ; б) радиального фрикционного формфактора  $K_R(dU/dq)^2$  для реакции  $^{16}O + ^{144}Sm$ , полученная при использовании GK-потенциала

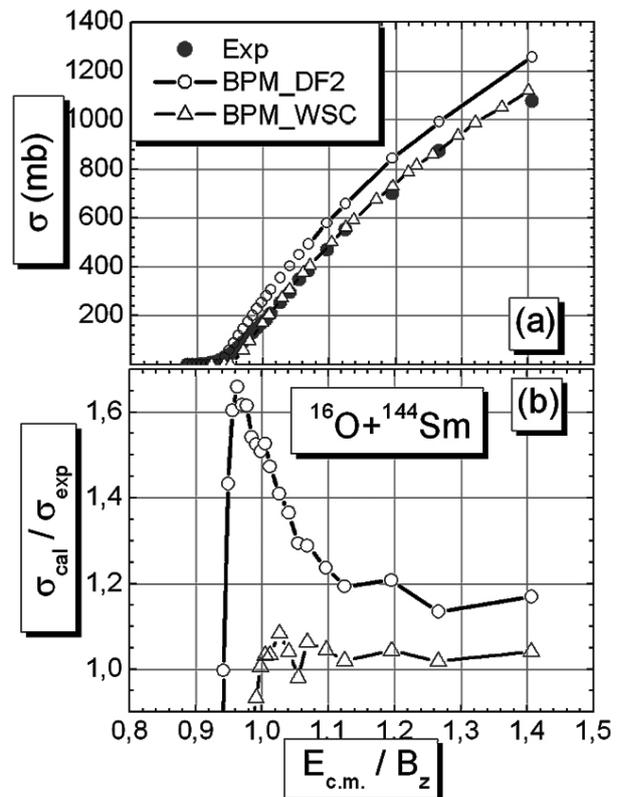


Рис. 2. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными из работы [14]

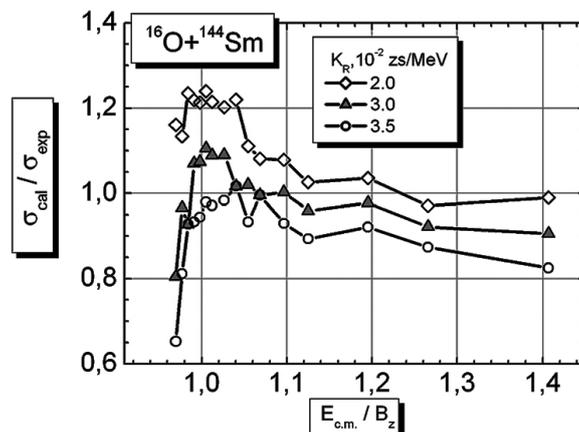


Рис. 3. Отношение расчётных сечений к экспериментальным значениям из работы [14] для системы  $^{16}\text{O}+^{144}\text{Sm}$  в рамках КТДМ

В данной работе мы рассматриваем реакцию  $^{16}\text{O}+^{144}\text{Sm}$ . Результаты расчётов в виде отношений теоретических сечений к экспериментальным приведены на рис. 3. Расчёт с  $K_R = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{MeV}^{-1} \cdot \text{zs}$  (кружки) отлично согласуется с экспериментом при энергиях вблизи барьера, но явно проваливается при больших энергиях. Заметим, что при энергиях вблизи и ниже барьера должны себя проявлять неучтённые в нашей модели эффекты связи каналов, которые всегда увеличивают расчётное сечение. Таким образом, это значение  $K_R$  вряд ли приемлемо. Каждый из расчётов с  $K_R = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{MeV}^{-1} \cdot \text{zs}$  и  $2,0 \cdot 10^{-2} \text{MeV}^{-1} \cdot \text{zs}$  имеет свои недостатки и преимущества: первый из них лучше согласуется с экспериментом при энергиях вблизи барьера, а второй — при высоких энергиях. Таким образом, путь решения проблемы аномально большой диффузности потенциала, которая как будто требовалась для воспроизведения высокоточных сечений захвата в работе [1], видится нам в учёте динамических эффектов. Учёт первого из них — диссипации коллективной энергии сразу позволил улучшить согласие с экспериментом: отклонение расчётных сечений от экспериментальных составило не более 10 %, в то время как без учёта динамики расхождение было не менее 20 %.

*М. В. Чушнякова благодарит фонд Д. Б. Зимина «Династия» за финансовую поддержку.*

#### Библиографический список

1. Newton J. O., Butt R. D., Dasgupta M., Hinde D. J., Gontchar I. I., Morton C. R., Hagino K. Systematics of precise nuclear fusion cross sections: the need for a new dynamical treatment of fusion // Phys. Lett. — 2004. — Vol. 586. — P. 219–224.
2. Experimental data on fusion // Nrv server [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://nrv.jinr.ru/nrv/webnrv/fusion/reactions.php> (дата обращения: 18.01.2012).
3. Dasgupta M. et al. Measuring barriers to fusion // Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. — 1998. — Vol. 48. — P. 401–461.
4. Hagino K., Rowley N., Kruppa A. T. Heavy-Ion fusion reactions at energies below the Coulomb barrier // Comput. Phys. Comm. — 1999. — Vol. 123. — P. 143–152.
5. Frobrich P. Fusion and capture of heavy ions above the barrier: analysis of experimental data with the surface friction model // Phys. Rep. — 1984. — Vol. 116. — P. 337–400.
6. Gross D. H. E., Kalinowski H. Friction model of heavy-ion collisions // Phys. Rep. — 1978. — Vol. 45. — P. 175–210.

7. Frobrich P., Strack B., Durand M. Unified description of statistical excitations, deformations and charge transfer in dynamical theory of deep-inelastic heavy-ion collisions // Nucl. Phys. — 1983. — Vol. A406. — P. 557–573.

8. Frobrich P. Fusion and capture of heavy ions above the barrier: analysis of experimental data with the surface friction model // Phys. Rep. — 1984. — Vol. 116. — P. 337–400.

9. Frobrich P., Marten J., A Langevin description of the competition between fusion and deep-inelastic collisions close to the barrier // Z. Phys. — 1991. — Vol. A339. — P. 171–175.

10. Frobrich P., Gonchar I. I. Langevin description of fusion, deep-inelastic collisions and heavy-ion-induced fission // Phys. Rep. — 1998. — Vol. 292. — P. 131–237.

11. Oertzen W. Nuclear spectroscopy, nuclear clustering and exotic shapes // Phys. Scripta. — 2000. — Vol. 88. — P. 83–89.

12. Gontchar I. I., Chushnyakova M. V. A C-code for the double-folding interaction potential of two spherical nuclei // Computer Physics Communications. — 2010. — Vol. 181. — P. 168–182.

13. Newton J. O. Experimental barrier distributions for the fusion of  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{28}\text{Si}$ , and  $^{35}\text{Cl}$  with  $^{92}\text{Zr}$  and coupled-channels analyses / J. O. Newton, C. R. Morton, M. Dasgupta, J. R. Leigh, J. C. Mein, D. J. Hinde, H. Timmers, and K. Hagino // Phys. Rev. C. — 2001. — Vol. 64. — P. 064608.

14. Leight J. R. et al. Barrier distributions from the fusion of oxygen ions with  $^{144,148,154}\text{Sm}$  and  $^{186}\text{W}$  // Phys. Rev. C. — 1995. — Vol. 52. — P. 3151–3166.

15. Morton C. R. Coupled-channels analysis of the  $^{16}\text{O}+^{298}\text{Pb}$  fusion barrier distribution / C. R. Morton, A. C. Berriman, M. Dasgupta, D. J. Hinde, J. O. Newton, K. Hagino, I. J. Thompson // Phys. Rev. C. — 1999. — Vol. 60. — P. 044608.

16. Ignatyuk A. V. Anomalous influence of the angular momentum on the fission of light nuclei by protons and a particles / A. V. Ignatyuk, M. G. Itkis, V. N. Okolovich, G. N. Smirenkin, and A. S. Tishin // Yad. Fiz. — 1975. — Vol. 21. — P. 1185.

17. Gontchar I. I., Hinde D. J., Dasgupta M., Newton J. O. // Double folding nucleus-nucleus potential applied to heavy-ion fusion reactions // Phys. Rev. C. — 2004. — Vol. 69. — P. 024610.

18. Gontchar I. I., Chushnyakova M. V. A C-code for the double folding interaction potential for reactions involving deformed target nuclei // Comp. Phys. Comm. — 2013. — Vol. 184. — P. 172.

19. Dao T. Khoa, W. von Oertzen. Nuclear Rainbow Scattering and Nucleus-Nucleus Potentials at small Distances // Phys. Rev. B. — 1993. — Vol. 8. — P. 304–312.

20. Zagrebaev V. Nuclear clusters in dissipative medium // Z. Phys. — 1994. — Vol. A349. — P. 367–370.

21. Uegaki E., Abe Y. A Molecular Model for High-Spin Heavy-Ion Resonances // Prog. Theor. Phys. — 1993. — Vol. 90 — P. 615–664.

22. Gontchar I. I., Chushnyakova M. V., Aktaev N. E., Litnevsky A. L. and Pavlova E. G., Disentangling effects of potential shape

in the fission rate of heated nuclei // Phys. Rev. C. — 2010. — Vol. 82 — 064606.

23. Pavlova E. G., Aktaev N. E., Gontchar I. I. Modified Kramers formulas for decay rate in agreement with dynamical modeling // Physica. — 2012. — Vol. A 391 — 6084 — 6100.

**ЧУШНЯКОВА Мария Владимировна**, аспирантка кафедры физики и химии.

**ГОНЧАР Игорь Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор (Россия), профессор кафедры физики и химии.

**ГЕЛЬВЕР Сергей Александрович**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры физики и химии.

Адрес для переписки: gerversa@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 06.05.2013 г.

© М. В. Чушнякава, И. И. Гончар, С. А. Гельвер

УДК 519.2:004.7(075)

**В. Н. ЗАДОРЖНЫЙ**

Омский государственный  
технический университет

## ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ФРАКТАЛЬНОЙ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Формулируется основная задача фрактальной теории массового обслуживания. Рассматриваются пути ее решения.

**Ключевые слова:** системы массового обслуживания, аналитико-имитационное моделирование.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-07-00149-а.*

**Введение.** Необходимость создания фрактальной теории массового обслуживания (фрактальной ТМО) обусловлена все возрастающей актуальностью проблем обслуживания фрактального трафика в современных телекоммуникационных сетях [1, 2]. В целях формирования основ такой теории в работах [3–7] выполняются аналитико-имитационные исследования фрактальных систем массового обслуживания (СМО) и выявляются их особенности, обусловленные вероятностными распределениями с тяжелыми хвостами (РТХ), которыми описываются фрактальные СМО. Проникновение РТХ в ТМО порождает целый каскад проблем фундаментального уровня, без преодоления которых невозможно корректно решать задачи анализа фрактальных СМО. В статье [3] предлагается ускоренный аналитико-имитационный метод расчета буферов фрактальных СМО. В статье [4] выявляются специфические проблемы генерации фрактальных случайных величин (с.в.), т.е. таких с.в., которые описываются асимптотически-степенными распределениями вероятностей с бесконечными моментами. Именно асимптотически-степенные распределения чаще всего и называют РТХ. С практической точки зрения наиболее важными и интересными являются случаи, когда бесконечны все моменты, начиная с дисперсии или даже начиная с математического ожидания (м.о.). Результаты, изложенные в статьях [2–4], систематизируются и обобщаются в работах [5–7]. В монографии [7], в частности, установлено, что одной из актуальнейших областей применения фрактальной ТМО является транспортное моделирование. Показано, что для широкого класса распределений скорости автотранспортных средств время их проезда

по дороге конечной длины описывается фрактальными распределениями с бесконечным м.о.

В статье [8] предлагается формулировка основной задачи фрактальной ТМО и сообщается о нахождении метода кардинального сокращения очередей фрактальных СМО. Метод состоит в простом увеличении числа каналов СМО; неожиданностью является то, что, в отличие от классических систем, для фрактальных СМО этот метод приводит к резкому сокращению очередей и, следовательно, материальных затрат, необходимых для достижения высокого качества сервиса, определяемого заданной малой вероятностью отказа.

**1. Основная задача фрактальной ТМО.** Рассмотрим СМО, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок. Все интервалы  $\tau_i$  их поступления — независимые с.в. — описываются одной и той же функцией распределения вероятностей (ф.р.)  $A(t)$ . Время  $x_i$  обслуживания любой заявки — также независимая с.в. — имеет ф.р.  $B(t)$ . Фрактальной будем называть СМО, у которой хотя бы одна из ф.р.  $A(t)$ ,  $B(t)$  является фрактальной и имеет бесконечную дисперсию. Фрактальная СМО имеет буфер для хранения не более  $m$  заявок ( $0 \leq m < \infty$ ). Если при поступлении в СМО очередной заявки все каналы заняты и в буфере нет свободных мест, то заявка теряется (происходит отказ).

Основная задача фрактальной теории очередей определяется в [8] как задача определения вероятности  $P$  отказа в нахождении эффективных способов ее снижения.

**2. Пути решения основной задачи.** Далее рассматриваются такие фрактальные СМО, у которых ф.р.  $B(t)$  обязательно фрактальная, математические

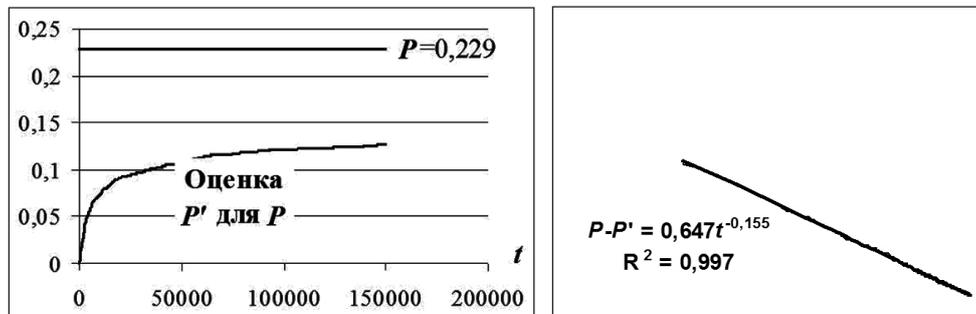


Рис. 1. ПП оценки  $P'$  при ИМ системы  $\text{Pa}|\text{Pa}|1|100, \tau \in \text{Pa}(1; 1,1), x \in \text{Pa}(0,5; 1,1)$

ожидания (м.о.)  $\bar{\tau}, \bar{x}$  величин  $\tau \in A(t), x \in B(t)$  конечны и коэффициент загрузки  $\rho = \bar{x}/(n\bar{\tau}) < 1$  (где  $n$  — число каналов в СМО). Типичными представителями таких СМО являются системы  $M|\text{Pa}|n|m$  и  $\text{Pa}|\text{Pa}|n|m$  (в обозначениях Кендалла), где  $M$  означает экспоненциальное распределение вероятностей,  $\text{Pa}$  — распределение Парето (РП). В виде  $\text{Pa}(K; \alpha)$  обозначается РП с параметрами  $K > 0, \alpha > 0$ , описываемое посредством ф.р.  $F(t)$  или посредством плотности вероятности  $f(t)$  следующим образом:

$$F(t) = 1 - \left(\frac{K}{t}\right)^\alpha, \quad f(t) = \frac{\partial F(t)}{\partial t} = \frac{\alpha K^\alpha}{t^{\alpha+1}}, \quad t \geq K. \quad (1)$$

Чем меньше параметр  $\alpha$ , тем «тяжелее» хвост РП. Чтобы м.о. РП было конечным, должно выполняться условие  $\alpha > 1$ . А поскольку бесконечную дисперсию РП имеет только при  $\alpha \leq 2$ , то для описания фрактальных СМО мы будем выбирать параметр  $\alpha$  в промежутке  $1 < \alpha \leq 2$ .

М.о.  $\bar{x}$  с.в.  $x \in \text{Pa}(K; \alpha)$  определяется формулой

$$\bar{x} = \frac{\alpha K}{(\alpha - 1)}. \quad (2)$$

Изменяя при заданном  $\alpha \in (1, 2]$  масштабный параметр  $K$ , можно получать любое требуемое м.о.  $\bar{x} > 0$ .

Имеется три основных способа снизить вероятность отказа  $P$ :

- 1) увеличить размер буфера;
- 2) ускорить обслуживание;
- 3) использовать большее число каналов.

При исследовании этих способов методом имитационного моделирования (ИМ) необходимо учитывать проблемы корректной реализации фрактальных с.в., вскрытые и исследованные в статьях [2–4].

**3. О точности расчета вероятности отказа и переходных процессах в ИМ.** Использование в рассматриваемых СМО конечного буфера предопределяет существование стационарного режима функционирования. Вместе с тем бесконечная дисперсия фрактального распределения  $B(t)$  порождает длительные переходные процессы (ПП) как в самой СМО, так и, в особенности, у рассчитываемых в ходе ИМ статистических оценок ее показателей. Так, при  $x \in \text{Pa}(K; \alpha)$  и  $\alpha \downarrow 1$  даже простейшие оценки — оценки м.о. разыгрываемых паретовских с.в.  $x$  (и, следовательно, оценки коэффициента загрузки  $\rho$ ) практически невозможно рассчитать с приемлемой для решения основной задачи точностью [2]. Например, с.в.  $x \in \text{Pa}(K; \alpha) = \text{Pa}(1; 1,1)$  имеет м.о.  $\bar{x} = 11$ . Чтобы при компьютерной реализации этой с.в. ее дискретизация не изменяла существенно ее м.о., требуется ЭВМ с длиной разрядной сетки около 150 бит [4]. При этом для получения выборочной оценки м.о.  $\bar{x}$  с погрешностью  $\pm 0,1$  (в смысле правила трех сигм)

потребуется сгенерировать примерно  $3 \cdot 10^{39}$  реализаций с.в.  $x$  и потратить на это около  $10^{29}$  лет машинного времени [5], что действительно практически невозможно.

Применяя обычную двойную точность вычислений (15 десятичных цифр), корректные оценки характеристик фрактальной СМО можно получать за практически приемлемое время моделирования лишь при  $\alpha > 1,2 \div 1,25$  [5].

Большое число выполненных в [2–5] имитационных экспериментов и точных численных расчетов позволяют со всей определенностью утверждать, что при ИМ оценки многих числовых показателей фрактальных СМО отклоняются от своих предельных стационарных значений на величины, убывающие в среднем как степенные функции числа опытов или времени моделирования. Это позволяет находить искомые стационарные значения показателей, не дожидаясь завершения ПП. Благодаря этому было установлено, что ПП у оценки  $P'$  вероятности отказа  $P$  и стационарное значение оценки  $P'$  существенно зависят от точности реализации фрактальных распределений. Следовательно, при двойной точности вычислений расчет  $P$  методом ИМ практически возможен лишь при  $\alpha > 1,2 \div 1,25$ . Поэтому необходимо указывать шаг  $\epsilon$  решетки, на которой разыгрываются значения БСВ. Все имитационные эксперименты, результаты которых приводятся в данной статье, выполнены на языке GPSS при  $\epsilon = 10^{-12}$ .

На рис. 1 приведены результаты анализа ПП оценки  $P'$  при ИМ СМО  $\text{Pa}|\text{Pa}|1|100, \tau \in \text{Pa}(1; 1,1), x \in \text{Pa}(0,5; 1,1)$ . Здесь  $\bar{\tau} = 11, \bar{x} = 5,5, \rho = 0,5$ . Слева показан ПП оценки  $P'$ , усредненный по 1000 независимым прогонам модели. Справа показан график зависимости усредненной величины  $(P - P')$  от модельного времени  $t$ , построенный в логарифмических шкалах (кривая линия), и его степенная аппроксимация (прямая линия) в ходе построения которой и вычислена асимптота  $P = 0,229$ . Это неизвестное априори значение  $P$  определено подбором как значение, доставляющее максимум показателя  $R^2$  достоверности аппроксимации (см. рис. 1, справа). Таким образом, ПП оценки  $P'$  описывается уравнением  $M(P') \approx 0,229 - 0,647t^{-0,155}$ . Отсюда находим, что при длине прогона 300 млн. ед. модельного времени (что соответствует прохождению через СМО 100 млн заявок) оценка  $P'$  в среднем составит 0,198, т.е. примерно на 14 % все еще «не дотянет» до точного значения  $P$ . Чтобы получить оценку  $P' = 0,225$  (имеющую удовлетворительную точность), потребуется собрать статистику по приблизительно  $1,67 \cdot 10^{14}$  заявкам, что потребует около 2 тыс. суток непрерывной работы компьютера средней мощности. При столь длинных прогонах погрешности моделирования могут сильно возрасти вследствие недостаточно вы-

Вероятности отказа в различных фрактальных СМО

№	Тип СМО	Распределение с.в. $\tau$	Распределение с.в. $x$	$\rho$	$P$
1	$Pa Pa 1 100$	$\tau \in Pa(1; 1,1)$	$x \in Pa(0,5; 1,1)$	0,5	0,229
2	$Pa Pa 1 300$	$\tau \in Pa(1; 1,25)$	$x \in Pa(1; 1,5)$	0,6	0,0124
3	$Pa Pa 1 400$	$\tau \in Pa(1; 1,25)$	$x \in Pa(1; 1,5)$	0,6	0,0102
4	$Pa Pa 1 500$	$\tau \in Pa(1; 1,25)$	$x \in Pa(1; 1,5)$	0,6	0,0087
5	$Pa Pa 1 m (m > 200)$	$\tau \in Pa(1; 1,25)$	$x \in Pa(1; 1,5)$	0,6	$0,6467m^{-0,693}$
6	$Pa Pa 1 2,43 \cdot 10^8$	$\tau \in Pa(1; 1,25)$	$x \in Pa(1; 1,5)$	0,6	$10^{-6}$
7	$Pa Pa 1 4 \cdot 10^5$	$\tau \in Pa(1; 1,25)$	$x \in Pa(0,1; 1,5)$	0,06	$10^{-6}$
8	<b><math>Pa Pa 5 15</math></b>	$\tau \in Pa(1; 1,25)$	$x \in Pa(1; 1,5)$	0,12	<b>0</b>
9	$M Pa 1 100$	$\tau \in Exponential(3)$	$x \in Pa(0,5; 1,5)$	0,5	0,012
10	$M Pa 1 600$	$\tau \in Exponential(5)$	$x \in Pa(1; 1,5)$	0,6	0,004
11	$M Pa 1 600$	$\tau \in Exponential(5)$	$x \in Pa(0,1; 1,5)$	0,06	0,00005
12	<b><math>M Pa 5 15</math></b>	$\tau \in Exponential(5)$	$x \in Pa(1; 1,5)$	0,12	<b>0</b>

сокого качества датчиков псевдослучайных чисел. В статье [9], например, показано, что датчики псевдослучайных чисел системы GPSS World начинают выдавать заметно коррелирующие числа уже при длине их последовательности  $100 \div 200$  млн. Поэтому предложенный выше простой метод аппроксимации переходных процессов представляется достаточно удачным путем расчета стационарных характеристик фрактальных СМО: он не требует выполнять длинные прогоны моделей, т.е. весьма экономичен по времени, и не требует применения таких длинных последовательностей случайных чисел, для генерации которых распространены датчики не предназначены.

**4. Эффективный метод снижения вероятности  $P$  отказа.** С учетом всех особенностей ИМ фрактальных СМО в экспериментах с ними установлено, что увеличение размера буфера, как и ускорение обслуживания являются здесь весьма неэффективными методами обеспечения малой вероятности отказа (в отличие от «классических» СМО) [2–5]. Однако неожиданно высокоэффективным путем становится увеличение числа каналов. Например, в системе  $Pa|Pa|1|m$  при  $\tau \in Pa(1; 1,25)$ ,  $x \in Pa(1; 1,5)$  (здесь  $\rho = 3/5 = 0,6$ ), чтобы достичь вероятности отказа  $P = 10^{-6}$ , необходим буфер для хранения  $m \approx 2,43 \cdot 10^8$  заявок. Если ускорить обслуживание заявок на порядок, т.е. положить, что  $x \in Pa(0,1; 1,5)$ , то потребуются буфер размером  $4 \cdot 10^5$  мест. А вот если быстродействие каналов сохранить, но увеличить их число (не на порядок, а всего лишь в пять раз), то в полученной системе  $Pa|Pa|5|m$  уже при  $m = 10 \div 15$  достигается вероятность отказа, практически равная нулю: при прогоне через СМО 10 млн заявок не происходит ни одного отказа, а максимальная длина очереди достигает лишь 7. Аналогичный эффект наблюдается и при других соотношениях параметра  $\alpha$  в распределениях с.в.  $x$ ,  $\tau$ , а также в системах  $M|Pa|n|m$  (табл. 1).

При расчете зависимостей вероятностей отказа от размеров буферов, т.е. зависимостей  $P(m)$ , характеризующих различные СМО, представленные в табл. 1, ускоренный метод, разработанный в [5], не использовался. Для его корректного применения необходимо разработать рекомендации по определению числа моделируемых периодов непрерывной занятости (ПНЗ) СМО, обеспечивающих требуемую

точность этого метода. На рис. 2, например, сопоставляются расчеты зависимости  $P(m)$ , полученные в пяти независимых прогонах ускоренного метода, выполненных для системы  $M|Pa|1|m$  (которая при  $m = 600$  характеризуется строкой 10 табл. 1). Каждый прогон выполнен по 500 000 ПНЗ системы. Сравнение результатов прогонов показывает, что при выбранной длине прогона оценки вероятности  $P$  еще далеко не стабилизировались. Степенные аппроксимации полученных приближений зависимости  $P(m)$  при больших размерах  $m$  буфера расходятся на порядки. При этом один из графиков приближения  $P(m)$  (линия 3 на рис. 2) получился даже не степенным, а линейным, что свидетельствует о большой погрешности этого приближения. Вместе с тем подход, описанный в разделе 3 и состоящий в обработке результатов большого числа независимых прогонов модели, может быть распространен и на случай применения к фрактальным СМО ускоренного метода, предложенного в работе [5].

**5. «Физическое» объяснение эффекта многоканальности.** Для того чтобы понять механизм, делающий предложенный метод столь высокоэффективным для фрактальных СМО (и малоэффективным — для классических), сравним хвосты степенного распределения (например, РП) и какого-нибудь классического (например, экспоненциального) распределения.

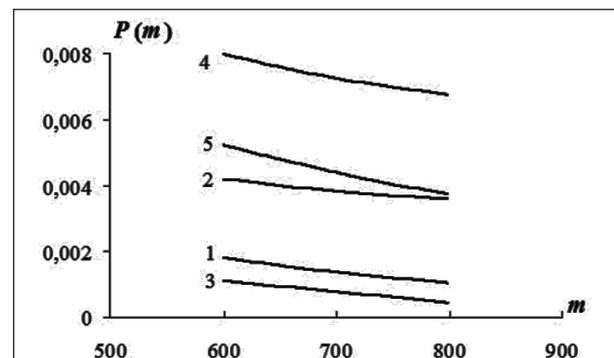


Рис. 2. Расчеты зависимости  $P(m)$  ускоренным методом по 500 тысячам ПНЗ дают большой разброс и большие погрешности. Графики 1–5 получены для системы  $M|Pa|1|m$  при  $\tau \in Exponential(5)$ ,  $x \in Pa(1; 1,5)$ ,  $\rho = 0,6$

Хвост  $\bar{F}_{pa}(t)$  РП, исходя из формулы (1), определяется выражением

$$\bar{F}_{pa}(t) = 1 - F(t) = \left(\frac{K}{t}\right)^\alpha, \quad (3)$$

а хвост  $\bar{F}_{exp}(t)$  экспоненциального распределения — выражением

$$\bar{F}_{exp}(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}. \quad (4)$$

Для обоснованности сравнения рассмотрим оба хвоста (3) и (4) при одинаковых м.о., равных единице. Для этого в формуле (4) положим  $\lambda = 1$ . В формуле (3) примем, что  $\alpha = 1,5$ ,  $K = 1/3$ : согласно формуле (2) при таких параметрах м.о. РП будет равно 1.

Хвост распределения для каждого  $t$  определяет вероятность того, что с.в., описываемая этим распределением, примет значение больше, чем  $t$ . Сопоставим такие вероятности, определяемые хвостами (3) и (4), при  $t = 1; 10$  и  $100$ . Для степенного хвоста (3) эти вероятности равны  $0,19; 0,0061$  и  $0,00019$ , а для экспоненциального (4), соответственно,  $0,37; 4,5 \cdot 10^{-5}$  и  $3,7 \cdot 10^{-44}$ . Таким образом, если время  $x$  обслуживания заявки распределено по экспоненциальному закону с  $\bar{x} = 1$ , то заявки с трудоемкостью  $x > 100$  практически не появляются. Если по степенному — то из ста тысяч заявок девятнадцать будут иметь трудоемкость более 100. Нетрудно продолжить расчет и найти, что при степенном хвосте (3) шесть заявок из миллиона будут иметь трудоемкость более 1000, а две из десяти миллионов заявок — более 10 000. Появление со временем все более трудоемких заявок объясняет большую длительность ПП при моделировании фрактальных СМО.

Заявки с такой «катастрофической» трудоемкостью, появляясь во входном потоке одноканальной СМО, захватывают канал на очень длительный промежуток времени, в результате чего заявки, приходящие после них, скапливаются в огромные очереди. Но когда в СМО больше одного канала, то «катастрофически» трудоемкая заявка, занявшая какой-либо канал, не мешает обычным «умеренным» заявкам обслуживаться на других каналах. В классических СМО ввиду отсутствия «катастрофических» заявок они не вызывают сверхдлинных очередей, вследствие чего либо проблемы сокращения очередей нет как таковой, либо она вызвана другими причинами (например, тем, что коэффициент загрузки превышает единицу). Соответственно, увеличение числа каналов играет в классических СМО примерно такую же роль, как другие методы (например, как и повышение быстродействия канала).

Приведенный качественный анализ влияния «катастрофических» заявок на свойства фрактальных СМО еще не говорит о том, насколько это влияние велико. Составить представление о величине влияния степенных распределений на свойства очередей можно, рассмотрев фрактальную СМО  $M|Pa|1|_\infty$ . В этой СМО распределение времени  $x$  обслуживания описывается распределением Парето с бесконечной дисперсией. Средняя длина  $L$  очереди определяется здесь формулой Полячека-Хинчина:

$$L = \frac{\lambda^2 x^{(2)}}{2(1-\rho)},$$

где  $\lambda$  — интенсивность входного пуассоновского потока,  $\rho$  — коэффициент загрузки,  $x^{(2)}$  — второй начальный момент времени обслуживания. Поскольку

$x$  имеет бесконечную дисперсию, то второй момент  $x^{(2)}$  также бесконечен. Следовательно, и средняя длина  $L$  очереди в этой фрактальной СМО бесконечна (при любом сколь угодно малом коэффициенте загрузки  $\rho > 0$ ).

**6. Текущие проблемы развития фрактальной ТМО.** Перечислим проблемы и методы их решения, разработанные в серии работ [2–9] в целях создания основ фрактальной ТМО. Основные проблемы таковы:

**1) проблема корректной реализации РТХ в ИМ.** Фрактальные СМО практически не поддаются аналитическим методам исследования. Непосредственное ИМ фрактальных СМО также не приносит заметных успехов (здесь мы понимаем ИМ в широком смысле слова, т.е. включаем в него и численные методы). Поэтому для решения основной задачи фрактальной ТМО необходимо совместное использование аналитических и имитационных методов. Проблема корректной реализации РТХ поставлена в работах [2, 3], в работе [4] она исследована точными методами, и в результате получены соотношения, определяющие причины и условия возникновения больших погрешностей реализации с.в. К таким условиям относится, например, близость параметра  $\alpha$  в распределении Парето к единице (в этом случае необходимо увеличивать длину разрядной сетки ЭВМ);

**2) проблема медленной сходимости оценок.** Эта проблема состоит в том, что при ИМ оценки м.о. фрактальных с.в. могут сходиться к истинным средним слишком долго (миллионы, миллиарды лет и более). Если с.в. имеет бесконечную дисперсию, то оценить м.о. этой с.в. путем ИМ чрезвычайно трудно. Для решения этой проблемы в настоящее время хорошие рекомендации не найдено.

В качестве некоторого утешения можно заметить, что, поскольку в основной задаче мы должны оценивать характеристики СМО (например, среднюю длину очереди) при конечных дисперсиях. Это вытекает из того, что размер буфера фрактальной СМО ограничен, следовательно, очередь также ограничена, и, следовательно, ограничены ее м.о. и дисперсия. Что касается оценки вероятности отказа, то она, разумеется, также ограничена;

**3) проблема длительных переходных процессов в системе.** При ИМ СМО мы начинаем вычислять оценки искомых показателей начиная с некоторого фиксированного состояния СМО (как правило, из состояния, когда СМО пуста). Оценки показателей постепенно сходятся к стационарным значениям, однако длительность переходных процессов так велика, что мы снова сталкиваемся с серьезной проблемой. Для решения этой проблемы выше предложен метод применения степенных аппроксимаций, получаемых по наблюдениям за начальной фазой ПП;

**4) проблема больших затрат времени на ИМ.** Несмотря на наличие ряда упомянутых методов затраты времени на ИМ продолжают оставаться слишком большими, на порядки превышая время ИМ классических СМО. Некоторую помощь здесь способен оказать ускоренный метод, описанный в работах [3, 5] и основанный на анализе периодов непрерывной занятости в СМО. Однако применять его следует с большими предосторожностями, поскольку пока отсутствуют строгие исследования точности этого метода, которые позволили бы устранить опасность больших ошибок (подобно тому, как это позволяют сделать соотношения, найденные в [4] для генераторов фрактальных с.в.).

**Заключение.** В статье, которая является продолжением серии работ [1–9], направленных на создание основ фрактальной ТМО, предложена постановка основной задачи этой теории, предложен и продемонстрирован метод сокращения затрат времени на моделирование затяжных переходных процессов, а также метод радикального сокращения размеров буферов фрактальных СМО при удержании вероятности отказа в заданных малых пределах.

Эти три новых результата развивают основы фрактальной ТМО, предназначенной для решения практических проблем проектирования телекоммуникационных систем в условиях фрактального трафика.

#### Библиографический список

1. William Stallings. Интернет и телекоммуникации [Электронный ресурс]. — URL: [http://my.online.ru/it/press/cwm/19\\_97/world.htm](http://my.online.ru/it/press/cwm/19_97/world.htm). (дата обращения: 13.03.2010).
2. Задорожный, В. Н. Предпосылки создания фрактальной теории массового обслуживания / В. Н. Задорожный // Омский научный вестник. — 2010. — № 2 (90). — С. 182–187.
3. Задорожный, В. Н. Моделирование и расчет буферов фрактальных СМО / В. Н. Задорожный, О. И. Кутузов // Имитационное моделирование. Теория и практика (ИММОД-2011) : материалы 5-й Всерос. конф. — СПб. : ЦТ СС, 2011. — Т. 1. — С. 156–161.
4. Задорожный, В. Н. Проблемы генерации случайных величин с фрактальными распределениями / В. Н. Задорожный,

О. И. Кутузов // Омский научный вестник. — 2012. — № 3 (113). — С. 20–24.

5. Задорожный, В. Н. Методы моделирования очередей в условиях фрактального трафика в сетях с коммутацией пакетов : учеб. пособие / В. Н. Задорожный, О. И. Кутузов. — Омск : ОмГТУ, 2013. — 104 с.

6. Задорожный, В. Н. Метод ускоренного расчета буферов для фрактальных систем с очередями / В. Н. Задорожный // Омский научный вестник. — 2013. — № 1 (117). — С. 216–220.

7. Задорожный, В. Н. Аналитико-имитационные методы решения актуальных задач системного анализа больших сетей : моногр. / В. Н. Задорожный, Д. Ю. Долгушин, Е. Б. Юдин. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2013. — 324 с.

8. Задорожный, В. Н. Основная задача фрактальной теории очередей / В. Н. Задорожный, О. И. Кутузов // Информационные технологии и автоматизация управления : материалы V Всерос. науч.-практ. конф., 23–26 апреля 2013 года. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2013. — С. 80–82.

9. Задорожный, В. Н. О качестве программных генераторов случайных чисел / В. Н. Задорожный // Омский научный вестник. — 2009. — № 2 (80). — С. 199–205.

**ЗАДОРЖНЫЙ Владимир Николаевич**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Адрес для переписки: [zwn@yandex.ru](mailto:zwn@yandex.ru)

Статья поступила в редакцию 02.07.2013 г.

© В. Н. Задорожный

УДК 519.711.3:004

**В. И. ПОТАПОВ**

Омский государственный  
технический университет

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ СТРУКТУРНО-ПЕРЕСТРАИВАЕМОЙ ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМОЙ, УПРАВЛЯЕМОЙ ПО КАНАЛАМ СВЯЗИ

Построена математическая модель и разработан алгоритм оптимального управления участвующей в конфликтной ситуации подвижной управляемой по каналам связи резервированной системой, у которой интенсивность отказов компонентов зависит от времени и точки пространства, в котором перемещается система.

**Ключевые слова:** математическая модель, алгоритм, подвижная система, конфликтная ситуация.

В последнее время в силу целого ряда объективных причин приобрели актуальность задачи, связанные с разработкой математических моделей и алгоритмов управления подвижными объектами в конфликтных ситуациях, когда подвижный объект, участвующий в конфликтной ситуации, в течение времени конфликта и положения в пространстве

должен защищаться за счет собственных ресурсов (как правило — избыточности) от воздействия другой из конфликтующих сторон, стремящейся своими средствами увеличить вероятность отказа подвижного объекта в течение конфликта в пространстве взаимодействия, то есть уменьшить надежность каналов связи подвижного объекта с системой его

управления и надежностью аппаратных компонентов подвижного объекта (подвижной системы).

Таким образом, в качестве причины отказа участвующего в конфликтной ситуации управляемого подвижного объекта являются отказы его аппаратных компонентов, отказы каналов связи системы управления и особенности свойств пространства, в котором перемещается управляемый объект.

Поскольку в данной постановке задачи интенсивность отказов является функцией нескольких параметров (времени и точки пространства), то для оценки надежности и оптимизации управления подобными подвижными избыточными объектами, участвующими в конфликтных ситуациях, необходима разработка новых математических моделей, описывающих поведение таких объектов с учетом указанных выше причин отказов.

В общем виде задача, рассматриваемая в данной работе, может быть описана на содержательном уровне следующим образом. Для участвующей в конфликтной ситуации перемещающейся в пространстве в заданную точку структурно-перестраиваемой избыточной аппаратно-резервированной системы, управляемой по каналом связи, интенсивности отказов компонентов которой и каналов связи являются функциями времени и точки пространства, в которой находится подвижная система, определить оптимальные траектории движения системы, вектор настройки системы и векторы резервирования, обеспечивающие максимизацию значения вероятности безотказной работы конфликтующей подвижной системы в заданной точке пространства.

Перейдем теперь к формализации задачи и ее математической постановке. Будем считать, что участвующий в конфликтной ситуации подвижный объект представляет собой управляемую по каналам связи перемещающуюся в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$  избыточную  $A(n, m, \bar{s}, q, \lambda(t, \bar{r}), \bar{\tau})$  систему, состоящую из  $n$  основных модулей, разбитых на  $q$  групп по  $n_1, n_2, \dots, n_q$  ( $n_i \geq 1$ ) модулей в каждой. Интенсивности отказов модулей, входящих в соответствующую группу  $\lambda_1(t, \bar{r}), \lambda_2(t, \bar{r}), \dots, \lambda_q(t, \bar{r})$ , являются функциями времени и точки пространства, в которой находится система. В состав подвижной системы входят, по числу основных,  $q$  групп резервных модулей по  $s_1, s_2, \dots, s_q$  ( $s_i \geq 0$ ) модулей в каждой группе  $s_1 + s_2 + \dots + s_q = m$ , интенсивность отказов каждого из которых также является функцией времени и точки пространства  $\lambda_0(t, \bar{r})$ . В каждой  $q$ -ой группе основные модули при их отказе мгновенно замещаются резервными из этой же группы. Как только резервный модуль подключается вместо отказавшего основного в своей группе, он начинает функционировать с интенсивностью отказов  $\lambda_i(t, \bar{r})$ , ( $1 \leq i \leq q$ ).

Считаем, что вектор резервирования  $s = (s_1, s_2, \dots, s_q)$  является переменным во времени, т.е. в моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L$  по командам может происходить перераспределение резервных модулей между группами, которое назовем настройкой системы, а соответствующие моменты времени  $\tau_\sigma$  ( $1 \leq \sigma \leq L$ ) — моментами настройки и, соответственно,  $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L)$  — вектором настройки. Каждому моменту настройки  $\tau_\sigma$  соответствует вектор резервирования  $\bar{s}_\sigma = (s_{\sigma 1}, s_{\sigma 2}, \dots, s_{\sigma q})$ . Количество настроек за время движения системы  $t_f$  ограничено числом  $L$  ( $L \geq 0$ ).

В подвижной рассматриваемой системе каждая  $i$ -я группа модулей ( $1 \leq i \leq q$ ) получает управляющие сигналы из центра управления, размещенного, например, в начале координат пространства, в кото-

ром движется система, по  $N_i$  каналам связи. Причем, отказ в каждой группе  $Q_i$  каналов связи из  $N_i$  ( $Q_i < N_i$ ) еще не приводит к отказу системы управления  $i$ -й группы модулей подвижной системы  $A$ , а отказ  $Q_i + 1$  каналов связи приводит к отказу.

Пусть  $\Lambda_i(t, \bar{\tau})$  — интенсивность отказов на единицу длины одного канала связи  $i$ -й группы модулей системы  $A$ , которую назовем удельной интенсивностью отказов  $i$ -й группы каналов связи и будем использовать при разработке алгоритмов оптимального управления подвижной системой.

**Формальная постановка задачи.** При заданных  $\lambda_i = \lambda_i(t, \bar{r})$ , ( $0 \leq i \leq q$ ) и  $\Lambda_i = \Lambda_i(t, \bar{\tau})$ , ( $1 \leq i \leq q$ ) для системы  $A(n, m, \bar{s}, q, \lambda(t, \bar{r}), \bar{\tau}, \Lambda(t, \bar{r}), N_i, Q_i)$ , участвующей в конфликтной ситуации, алгоритм оптимального управления, включающий алгоритмы вычисления траектории ее движения  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ , вектора настройки  $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L)$  и векторов резервирования  $\bar{s}_\sigma = (s_{\sigma 1}, s_{\sigma 2}, \dots, s_{\sigma q})$ , ( $0 \leq \sigma \leq L$ ), отвечающих моментам настройки  $\tau_\sigma$ , максимизирующих вероятность безотказной работы  $P(t_f)$  подвижной конфликтующей системы в момент  $t_f$  прибытия ее в заданную точку  $\bar{r}_f$  пространства. То есть решить задачу оптимизации выбора траектории и пространственно-временной стратегии резервирования избыточной подвижной системы, участвующей в конфликте [1].

Положим, что  $A$  — система из начала координат должна попасть в заданную конечную точку  $\bar{r}_f$  пространства  $R^3$ . Время движения системы  $t_f$  зависит от траектории и имеет естественное ограничение  $t_f \leq T$ , указывающее на то, что время полета ограничено.

Введем следующие ограничения для подвижной системы. В связи с тем, что прочностные характеристики аппаратной части подвижной системы всегда ограничены должно соблюдаться условие

$$\left| \ddot{\bar{r}}(t) \right| \leq M \text{ для любого } t \in [0, t_f]. \quad (1)$$

Из неравенства (1) следует, что для любого  $t \in [0, t_f]$ .

$$\left| \dot{\bar{r}}(t) \right| \leq Mt + v_0; \quad \left| \bar{r}(t) \right| \leq Mt^2 / 2 + v_0 t; \quad (2)$$

где  $v_0$  — начальная скорость аппаратной части подвижной системы.

Последнее ограничение на траекторию движения подвижной системы:

$$\bar{r}(t) \in V \text{ для любого } t \in [0, t_f], \quad (3)$$

где  $V$  — заданная область конечной связности в  $R^3$  (ясно, что  $\bar{0} \in V$  и  $\bar{r}_f \in V$ ).

Это ограничение «запрещает» для траектории некоторые односвязные области пространства.

Чтобы завершить построение математической модели подвижной системы воспользуемся следующим приемом. Вместо каналов связи подвижной системы с центром управления введем в каждый  $i$ -й аппаратный основной модуль  $n_i$  системы переменное число фиксированных элементов  $\bar{n}_i(t, \bar{r})$  и в каждую  $i$ -ю группу резервных модулей —  $Q_i$  фиктивных элементов.

Проведя такую замену удалось избавиться от каналов связи и получить новую  $A^*(n^1(t, \bar{r}), m^1, \bar{s})$  — систему с переменным числом элементов в основном и резервном модулях, где  $n^1(t, \bar{r}) = n + \bar{n}_1(t, \bar{r}) + \bar{n}_2(t, \bar{r}) + \dots + \bar{n}_q(t, \bar{r})$ ,  $m^1 = m + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_q$ .

Число фиктивных элементов  $\bar{n}_i(t, \bar{r})$  определяется из уравнения

$$N_i \Lambda_i(t, \bar{r}) \left| \bar{r} \right| = \bar{n}_i(t, \bar{r}) \lambda_i(t, \bar{r}) + Q_i(t, \bar{r}) \lambda_0(t, \bar{r}). \quad (4)$$

Отсюда, учитывая, что  $\bar{n}_i(t, \bar{r})$  — натуральное число (опуская при записи аргументы), получим

$$\bar{n}_i = \left\lceil \frac{N_i \Lambda_i |\bar{r}| - Q_i \lambda_0}{\lambda_i} \right\rceil + 1, \quad 1 \leq i \leq q, \quad (5)$$

где  $[X]$  — ближайшее натуральное число, меньшее  $X$ .

Легко понять, что физический смысл уравнения (4) состоит в том, что суммарная интенсивность отказов каналов связи  $i$ -го модуля «перекаладывается» на  $i$ -й модуль аппаратной части подвижной системы.

Будем полагать, что поведение участвующей в конфликте подвижной  $A^*(n^1(t, \bar{r}), m^1, \bar{s})$ -системы может быть аппроксимировано марковским случайным процессом с конечным числом состояний, соответствующих числу отказов в системе. Тогда система дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающих однородный марковский процесс, соответствующий функционированию подвижной  $A^*$ -системы, имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} p'_0(t, \bar{r}) &= -D_0 p_0(t, \bar{r}), \\ p'_k(t, \bar{r}) &= A_k p_{k-1}(t, \bar{r}) - D_{k+1} p_k(t, \bar{r}), \quad (6) \\ &1 \leq k \leq m^1 \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_{m^1}(0) = 0, \quad (7)$$

где  $p_k(t, \bar{r})$  — вероятность пребывания подвижной  $A^*$ -системы в момент времени  $t$  в состоянии с  $k$  отказами.

При этом

$$\begin{aligned} D_k &= A_k + B_k, \quad 1 \leq k \leq m^1, \\ D_{m^1+1} &= B_{m^1+1}. \end{aligned}$$

Коэффициенты системы уравнений (6) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{i=0}^q \alpha_i(k) \lambda_i(t, \bar{r}), \quad 1 \leq k \leq m^1, \\ D_k &= \sum_{i=0}^q \beta_i(k) \lambda_i(t, \bar{r}), \quad 1 \leq k \leq m^1 + 1, \quad (8) \end{aligned}$$

где для  $0 \leq k \leq m^1$  имеет место

$$\alpha_i(k) = \begin{cases} (m^1 - k + 1) \bar{R}_k, & \text{если } i = 0, \\ \delta_i n_i \bar{R}_k, & \text{если } 0 \leq i \leq q; \end{cases} \quad (9)$$

$$\beta_i(k) = \begin{cases} (m^1 - k + 1) \bar{R}_k, & \text{если } i = 0, \\ \delta_i n_i \bar{R}_k - n_i^1 \Theta_i(k), & \text{если } 1 \leq i \leq q, \end{cases} \quad (10)$$

$$\beta_i(m^1 + 1) = \delta_i n_i, \quad 1 \leq i \leq q,$$

$$\bar{R}_k = \binom{n^1 + m^1}{k} R_k.$$

Коэффициенты  $\delta_i$  и  $\Theta_i(k)$ , являющиеся элементами векторов  $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q)$  и  $\bar{\Theta}(k) = (\Theta_1(k), \Theta_2(k), \dots, \Theta_q(k))$ , определяются следующим образом:

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } s_i = 0, \\ 1, & \text{если } s_i \geq 1, \end{cases} \quad (11)$$

$$\Theta_i(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \leq s_i, \\ 1, & \text{если } k \geq s_i + 1. \end{cases} \quad (12)$$

Очевидно, что  $\Theta_i(1) = 1 - \delta_i$ .

Переменная  $R_k$  определяет число возможных попаданий конфликтующей подвижной системы  $A^*(n^1(t, \bar{r}), m^1, \bar{s})$  в состояние с  $k$  отказами и вычисляется [2] по формуле

$$R_k = \sum_{\bar{v} \in \Omega(k, \bar{s})} \prod_{i=1}^q \binom{n_i^1 + s_i}{v_i}, \quad (13)$$

где  $\Omega(k, \bar{s}) = \{ \bar{v} \mid v_1 + v_2 + \dots + v_q = k; \forall i, 0 \leq v_i \leq s_i + Q_i \}$ ,  $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_q)$  — целочисленный вектор, представляющий сумму целочисленных векторов ( $\bar{v} = \bar{x} + \bar{z}$ ),  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q)$  и  $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_q)$ .

Выражение (13) получено в предположении, что  $k$  отказов в рассматриваемой подвижной системе распределены следующим образом: в  $i$ -й группе основных модулей  $n^1 - x_i$  отказов, в  $i$ -й группе резервных модулей  $m^1 - z_i$  отказов ( $1 \leq i \leq q$ ). Если  $x_i = 0$  или  $z_i = 0$ , то в соответствующей группе отказов не было.

Очевидно, что аналитическое решение поставленной задачи оптимального управления, участвующей в конфликтной ситуации подвижной  $A^*(n^1(t, \bar{r}), m^1, \bar{s})$ -системой, не представляется возможным, поэтому воспользуемся приближенным численным методом для решения данной задачи, основанным на методе дискретизации [2–4].

Суть этого метода, применительно к рассматриваемой задаче, состоит в том, что систему дифференциальных уравнений (6), коэффициенты которой являются функциями времени и точки пространства, в которой находится подвижная система, необходимо заменить системой дискретных аналогов, у которых коэффициенты можно рассматривать как постоянные (с заранее установленной степенью точности) на дискретных интервалах времени и пространства, в котором движется конфликтующая система  $A^*$ .

Прежде всего, получим оценку  $t_r$ . Из второго неравенства (2) следует

$$|\bar{r}(t_r)| = |\bar{r}_r| \leq M t_r^2 / 2 + v_0 t_r.$$

Отсюда имеем

$$t_r \geq \frac{1}{M} (-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2M|\bar{r}_r|}). \quad (14)$$

Обозначим правую часть неравенства (14) через  $t_r^{\min}$ . Ясно, что  $t_r^{\min} \leq T$ .

На вектор настройки  $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$  из физических соображений естественно наложить следующее ограничение:  $\min_{0 \leq \delta \leq L-1} (\tau_{\delta+1} - \tau_\delta) \geq \alpha$ , смысл которого заключается в том, что две последовательные настройки подвижной системы  $A^*(n^1(t, \bar{r}), m^1, \bar{s})$  нельзя производить быстро, между ними должно пройти некоторое время, не меньше  $\alpha$ .

Обозначим теперь через  $\epsilon$  точность измерения траектории  $\bar{r}(t)$  движения системы  $A^*$ , при которой становится заметно, когда в какой-либо окрестности любой точки  $t_0 \in [0, t_r]$  траектория начинает отклоняться от касательной, проходящей через точку  $\bar{r}(t_0)$ . Используя величину  $\epsilon$  нетрудно вычислить временной интервал дискретизации  $\Delta t$ .

Для этого разложим вектор-функцию  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t_0 \in [0, t_r]$  и ограничимся двумя членами:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \dot{\bar{r}}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\bar{r}}(t_0)(t-t_0)^2.$$

Отсюда ясно, что траектория  $\bar{r}(t)$  в окрестности точки  $t_0$  не будет отличаться от касательной с точностью  $e$ , если

$$\left| \ddot{\bar{r}}(t_0) \right| (t-t_0)^2 / 2 \leq e.$$

Исходя из выражения (1), следует, что это неравенство выполняется наверное, если выполняется неравенство

$$M(t-t_0)^2 / 2 \leq e.$$

Отсюда следует, что за временной интервал дискретизации можно принять

$$\Delta t = \sqrt{2e/M}. \quad (15)$$

При этом из физических соображений ясно, что  $\Delta t < a$ , так как в малой окрестности любой точки  $\bar{r} \in R^3$  пространство можно считать изотропным, а настройка подвижной систем  $A^*$  необходима только тогда, когда изотропность существенно нарушается.

Теперь, на основании (15),  $t_i$  может принимать дискретные значения  $t_i = t_i^{\min} + \ell \Delta t$ , где  $0 \leq \ell \leq \bar{\ell}$ , а  $\bar{\ell} = [(T - t_i^{\min}) / \Delta t]$ .

Координаты вектора настройки  $A^*$ -системы  $\bar{\tau} = (\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L)$  могут принимать значения из дискретного множества  $\chi = \{0, a, 2a, \dots, \bar{\omega}a\}$ , где  $\bar{\omega} = [t_r / a]$ .

Ясно, что  $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_L < \tau_r$ . Каждому моменту настройки  $\tau_\sigma$  отвечает вектор резервирования  $\bar{s}_\sigma = (s_{\sigma 1}, s_{\sigma 2}, \dots, s_{\sigma q})$ ,  $0 \leq \sigma \leq L$ .

Обозначим через  $t_\omega = \omega a$ ,  $0 \leq \omega \leq \bar{\omega}$ , тогда вектор настройки  $\tau$  будет описываться вектором натуральных чисел  $\bar{\omega} = (\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(L))$  через отображение  $\tau_\sigma \rightarrow \omega(\sigma)$ , при этом  $\omega(0) = 0$ .

Обозначим  $\Delta_\sigma = [\omega(\sigma)a, \omega(\sigma+1)a]$ ,  $0 \leq \sigma \leq L-1$ , и  $t_v^\sigma = t_{\omega(\sigma)} + v \Delta t$ , где  $0 \leq v < \bar{v}(\sigma)$ , а  $\bar{v}(\sigma) = (\omega(\sigma+1) - \omega(\sigma)) [a / \Delta t]$  и введем множество  $\Delta_{v\sigma} = [t_{v-1}^\sigma, t_v^\sigma]$ ,  $1 \leq v \leq \bar{v}(\sigma)$ .

Очевидно, что

$$\Delta_\sigma = \bigcup_{v=1}^{\bar{v}(\sigma)} \Delta_{v\sigma};$$

$$[0, t_r] = \left( \bigcup_{\sigma=0}^L \Delta_\sigma \right) \cup [\omega(L)a, t_r],$$

причем для любых  $\sigma \neq \sigma'$   $\Delta_\sigma \cap \Delta_{\sigma'} = \emptyset$ , для любых  $v \neq v'$  и любого  $\sigma$  справедливо  $\Delta_{v\sigma} \cap \Delta_{v'\sigma} = \emptyset$ .

Теперь система уравнений (6) с начальными условиями (7), описывающая поведение подвижной системы  $A^*(n^1(t, \bar{r}), m^1, \bar{s})$ , разобьется на  $K(t_i)$  систем уравнений с постоянными коэффициентами  $A_{kv}^\sigma$  и  $D_{kv}^\sigma$  по числу множеств  $\Delta_{v\sigma}$ , где

$$K(t_i) = \sum_{\sigma=0}^L v(\sigma),$$

которые являются дискретным аналогом системы уравнений (6),

$$(\rho_{0v}^\sigma)' = -D_{1v}^\sigma \rho_{0v}^\sigma,$$

$$(\rho_{kv}^\sigma)' = A_{kv}^\sigma \rho_{k-1,v}^\sigma - D_{k+1,v}^\sigma \rho_{kv}^\sigma, \quad 1 \leq k \leq m^1, \quad (16)$$

с начальными условиями

$$\rho_{kv}^\sigma(t_{v-1}^\sigma) = \begin{cases} \rho_{k,r(\sigma-1)}^{\sigma-1}(\tau_{\sigma-1}), & \text{если } v=1, \\ \rho_{k,v-1}^\sigma(t_{v-1}^\sigma), & \text{если } 2 \leq v \leq r(\sigma), \end{cases} \quad (17)$$

для  $2 \leq \sigma \leq l$  и

$$\rho_{kv}^1(t_{v-1}^1) = \begin{cases} \rho_{k0}(0), & \text{если } v=1, \\ \rho_{k,v-1}^1(t_{v-1}^1), & \text{если } 2 \leq v \leq r(1), \end{cases} \quad (18)$$

для  $\sigma=1$ .

Коэффициенты  $A_{kv}^\sigma$  и  $D_{kv}^\sigma$  определяются по формулам (8)-(13) с соответствующими изменениями, о которых говорилось выше. В частности, вместо  $n_i$  будет  $n_i + \bar{n}_i(t_v^\sigma, \bar{r})$ , а вместо  $\lambda_i$  будет  $\lambda_{iv}$ .

Теперь проведем операцию дискретизации пространства, в котором перемещается участвующая в конфликтной ситуации система  $A^*$ .

Допустим, что движущаяся система  $A^*$  в момент времени  $t = t_0$  попала в точку пространства  $\bar{r}_0 = \bar{r}$ . Требуется определить радиус  $\rho = \rho(\Delta t)$  максимального шара  $U(\bar{r}_0, \Delta t)$  с центром в точке  $\bar{r}_0$ , за который подвижная система не выйдет за время  $(\Delta t)$ . Этот шар является пространственным аналогом элемента временной дискретизации.

Для этого решим дифференциальное неравенство  $|\dot{\bar{r}}(t)| \leq M$  с начальными условиями  $\bar{r}(t_0) = \bar{r}_0$ ,  $\dot{\bar{r}}(t_0) = \dot{\bar{r}}_0$ .

Получим  $|\bar{r}(t) - \bar{r}_0| \leq |\dot{\bar{r}}_0|(t-t_0) + M(t-t_0)^2 / 2 - M t_0(t-t_0)$ .

Отсюда, учитывая первое из неравенств (2), имеем

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}_0| \leq (v_0 + \frac{M}{2}(t-t_0))(t-t_0).$$

Следовательно,

$$\rho(\Delta t) = \left( v_0 + \frac{M}{2} \Delta t \right) \Delta t. \quad (19)$$

Дискретизацию  $\lambda_i = \lambda_i(t, \bar{r})$ ,  $0 \leq i \leq q$  и  $\Lambda_i = \Lambda_i(t, \bar{r})$ ,  $1 \leq i \leq q$  проведем, руководствуясь следующими соображениями.

Из построения множества  $\Delta_{v\sigma}$  ясно, что для любого  $t \in [0, t_r]$  всегда можно найти такие  $\sigma$  и  $v$ , что  $t \in \Delta_{v\sigma}$ . Выше было показано, что для любого  $\bar{r} \in R^3$  шар  $U(\bar{r}, \Delta t) = \{ \bar{r}' \mid |\bar{r}' - \bar{r}| \leq \rho(\Delta t) \}$  является пространственным интервалом дискретизации.

Функции  $\lambda_i$  и  $\Lambda_i$  отображают четырехмерное евклидово пространство  $R^4 = R^1 \otimes R^3$  на  $R^1$ , где  $R^1 = \{t \mid t \in [0, \infty)\}$ , а  $R^3$  — физическое трехмерное пространство, в котором перемещается система  $A^*$ . Элементом дискретизации в пространстве  $R^4$  является четырехмерный шар  $|\bar{r}' - \bar{r}|^2 + t^2 \leq \rho^2 + (\Delta t)^2$ , объемом которого  $u(\gamma)$ , где  $\gamma = U(\bar{r}, \Delta t) \otimes \Delta_{v\sigma}$ , вычисляется по формуле  $u(\gamma) = \pi^2(\rho^2 + (\Delta t)^2)^2 / 2$ .

Теперь интенсивности отказов на элементе дискретизации  $\gamma$  можно определить как средние интегральные:

$$\lambda_{iv}^\sigma = (u(\gamma))^{-1} \int_{t_{v-1}^\sigma}^{t_v^\sigma} dt \int_{|\bar{r}' - \bar{r}| \leq \rho} \lambda_i(t, \bar{r}') du', \quad (20)$$

$$\Lambda_{iv}^\sigma = (u(\gamma))^{-1} \int_{t_{v-1}^\sigma}^{t_v^\sigma} dt \int_{|\bar{r}' - \bar{r}| \leq \rho} \Lambda_i(t, \bar{r}') du', \quad (21)$$

где  $\bar{r}(x_1, x_2, x_3)$ ,  $du = dx_1 dx_2 dx_3$ .

Будем рассматривать  $R^3$  как ячеистую структуру с узлами в точках  $\bar{r}(i) = (x_1, x_2, x_3)$ , где  $x_1 = ei_1$ ,  $x_2 = ei_2$ ,  $x_3 = ei_3$ , а  $\bar{i}(i_1, i_2, i_3)$  — целочисленный вектор. Будем также считать, что подвижная система  $A^*$  наблюда-

ется и корректируется только в точках  $\bar{r}(i)$ , что не противоречит реальности.

Установим, для каких векторов  $\bar{i}$  рассматриваемая система не выйдет за пределы шара  $U(\bar{r}_0, \Delta t)$ .

Пусть вектору  $\bar{r}_0$  отвечает целочисленный вектор  $\bar{i}^0 = (i_1^0, i_2^0, i_3^0)$ . Тогда очевидно, что для всех  $\bar{i}(i_1, i_2, i_3)$ , удовлетворяющих неравенству

$$(i_1 - i_1^0)^2 + (i_2 - i_2^0)^2 + (i_3 - i_3^0)^2 \leq \left(\frac{\rho}{e}\right)^2, \quad (22)$$

точка  $\bar{r}(\bar{i}) \in U(\bar{r}_0, \Delta t)$ .

Теперь, после проведенной дискретизации с учетом (20) и (21), формула (5) принимает вид

$$\bar{n}_i = \left[ \frac{N_i \Lambda_{iv}^\sigma |\bar{r}| - Q_i \lambda_{ov}^\sigma}{\lambda_{iv}^\sigma} \right] + 1 \quad (23)$$

для  $t \in \Delta_{iv}^\sigma$ .

Выполнив дискретизацию компонентов рассматриваемой задачи перейдем к вычислению управлений, максимизирующих вероятность безотказной работы  $P(t_j)$  подвижной конфликтующей системы  $A^*$  в момент  $t_j$  достижения системой заданной точки  $\bar{r}_j$  пространства.

Необходимо вычислить управления

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \quad \tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_L) \text{ и}$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{01} & s_{02} & \dots & s_{0q} \\ s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{L1} & s_{L2} & \dots & s_{Lq} \end{bmatrix}$$

матрицы, строки которой составлены из последовательности координат векторов резервирования  $\bar{s}$ , максимизирующих  $P(t_j)$ . При этом задача максимизации  $P(t_j)$  для фиксированных  $\tau$  и  $S$ , то есть выбор оптимальной траектории  $\bar{r}(t)$ , эквивалентна задаче максимизации  $P(t)$  в любой точке  $e[0, t_j]$ . Этот факт доказан в [2].

Теперь для решения задачи потребуется еще несколько неравенств, которым подчиняется траектория  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ , а именно: оценки снизу и сверху величины  $|\bar{r}_i - \bar{r}(t)|$ .

Обозначим через  $\mu(t)$  длину пути от точки  $\bar{r}(t)$  до  $\bar{r}_i$  по траектории  $\bar{r}(t)$ . Очевидно, что

$$\mu(t) = \int_t^{\bar{r}_i} |\dot{\bar{r}}(x)| dx \leq \max_{x \in [t, \bar{r}_i]} |\dot{\bar{r}}(x)| (t_i - t) = (Mt_i + v_0)(t_i - t).$$

Обозначим  $r_{\max}^1(t) = (Mt_i + v_0)(t_i - t)$ , а  $r_{\max}^2(t) = Mt^2/2 + v_0 t$ . Из выражения (2) следует, что  $|\dot{\bar{r}}(t)| \leq r_{\max}^2(t)$ . Тогда

$$|\bar{r}_i - r_{\max}^2(t)| \leq |\bar{r}_i - \bar{r}(t)| < r_{\max}^1(t).$$

В [2] показано, что неравенство

$$r_{\max}^1(t) + r_{\max}^2(t) > |\bar{r}_i|$$

выполняется для всех  $t \in [0, t_i]$ .

В рассматриваемой задаче  $P(t)$  представляет функционал качества управления. Обозначим его через  $P[\bar{r}, S, \bar{r}(t); t]$ , где  $\bar{r}, S, \bar{r}(t)$  — управления, тогда алгоритм решения данной задачи, в котором использован принцип последовательной оптимизации, можно описать следующим образом.

#### Алгоритм

1. Задать  $n, m, q, \{n_1, n_2, \dots, n_q\}, \{\lambda_0(t, \bar{r}), \lambda_1(t, \bar{r}), \dots, \lambda_q(t, \bar{r})\}, \{\Lambda_1(t, \bar{r}), \Lambda_2(t, \bar{r}), \dots, \Lambda_q(t, \bar{r})\}, \{N_1, N_2, \dots, N_q\}, \{Q_1, Q_2, \dots, Q_q\}$ ,

$L, T, M, v_0, a, e, \bar{r}_i$ , множество  $V$ .

2. Вычислить  $t_i^{\min} = \frac{1}{M}(-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2M|\bar{r}_i|})$ .
3. Вычислить  $\Delta t = \sqrt{2e/M}$ .
4. Вычислить  $\bar{t} = [(T - t_i^{\min})\Delta t]$ .
5. Вычислить  $\rho = (v_0 + M\Delta t/2)\Delta t$ .
6. Положить  $j = 0$ .
7. Вычислить  $t_j = t_i^{\min} + j\Delta t$ .
8. Вычислить  $\bar{\omega} = [t_j/a]$ .
9. Для всех векторов  $\bar{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_L)$ , где  $\tau_\sigma \in \mathcal{X}$ , выполнить процедуру п.п. 10 – 25.
10. Положить  $\sigma = 0$ .
11. Положить  $\bar{i}_0 = 0$ .
12. Положить  $v = 1$ .
13. Вычислить  $z = \omega(\sigma) + v$ .
14. Вычислить  $\lambda_{iv}^\sigma, \Lambda_{iv}^\sigma$  для всех  $0 \leq i \leq q$  ( $\Lambda_{ov}^\sigma = 0$ ) по формулам (20) и (21) соответственно.
15. Вычислить  $\bar{n}_i, 1 \leq i \leq q$  по формуле (23).
16. Для всех натуральных решений  $\bar{s}_\sigma = (s_{\sigma 1}, s_{\sigma 2}, \dots, s_{\sigma q})$  дифференциального уравнения

$$s_{\sigma 1} + s_{\sigma 2} + \dots + s_{\sigma q} = m + \sum_{i=1}^q Q_i - \left[ \sum_{k=0}^m k p_{k, \omega(\sigma)}^\sigma(\tau_\sigma) \right],$$

где  $p_{k, \omega}^\sigma(t)$  — решение системы уравнений (16) с начальными условиями (17), (18), выполнить процедуру п.п. 17 – 20.

17. Для всех целочисленных векторов  $\bar{i} = (i_1, i_2, i_3) \in I_z$  где  $I_z = I_z^1 \cap I_z^2 \cap \bar{V}$  а множества  $I_z^1, I_z^2, \bar{V}$  определяются следующим образом:

$$I_z^1 = \{ \bar{i} \mid |\bar{i} - \bar{i}_{z-1}| \leq \rho/e \};$$

$$I_z^2 = \{ \bar{i} \mid |\bar{i} - \bar{i}| \leq \frac{1}{e}(Mt_i + v_0)(t_i - t_i^0) \};$$

$$\bar{V} = \{ \bar{i} \mid e\bar{i} \in V \}, \quad a \quad \bar{r}_i = e\bar{i}_i,$$

выполнить процедуру п.п. 18 – 19.

18. Если  $I_z = \emptyset$ , идти к п. 27.

19. Вычислить

$$P_j[\bar{r}_\sigma, \{\bar{s}_0^0, \bar{s}_1^0, \dots, \bar{s}_{\sigma-1}^0, \bar{s}_\sigma^0\}, \bar{r}(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma] = \sum_{k=0}^m p_{kv}^\sigma(t_{v+1}^\sigma),$$

где  $\bar{r}(t_{v+1}^\sigma) = e\bar{i}$ ,  $\tau_\sigma = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_\sigma)$ , а принцип вычисления векторов  $\bar{s}_\mu^0, 0 \leq \mu \leq \sigma - 1$  описывается в п. 21 этого алгоритма (ясно, что для  $\sigma = 0$   $\{\bar{s}_0^0, \bar{s}_1^0, \dots, \bar{s}_{\sigma-1}^0, \bar{s}_\sigma^0\} = \{\bar{s}_0^0\}$ ).

20. Вычислить вектор  $\bar{i}_z \in I_z$ , для которого

$$P_j[\bar{r}_\sigma, \{\bar{s}_0^0, \bar{s}_1^0, \dots, \bar{s}_{\sigma-1}^0, \bar{s}_\sigma^0\}, \bar{r}^0(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma] = \max_{i \in I_z} P_j[\bar{r}_\sigma, \{\bar{s}_0^0, \bar{s}_1^0, \dots, \bar{s}_{\sigma-1}^0, \bar{s}_\sigma^0\}, \bar{r}(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma],$$

где  $\bar{r}^0(t_{v+1}^\sigma) = e\bar{i}_z$ .

21. Вычислить вектор  $\bar{s}_\sigma^0$ , для которого

$$P_j[\bar{r}_\sigma, \{\bar{s}_0^0, \bar{s}_1^0, \dots, \bar{s}_{\sigma-1}^0, \bar{s}_\sigma^0\}, \bar{r}^0(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma] = \max_{\bar{s}_\sigma} P_j[\bar{r}_\sigma, \{\bar{s}_0^0, \bar{s}_1^0, \dots, \bar{s}_{\sigma-1}^0, \bar{s}_\sigma^0\}, \bar{r}^0(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma].$$

22. Положить  $v = v + 1$ .

23. Если  $v \leq \bar{v}(\sigma)$ , идти к п. 13.

24. Положить  $\sigma = \sigma + 1$ .

25. Если  $\sigma \leq L$ , идти к п. 11.

26. Вычислить вектор  $\bar{r}_L^0$ , для которого

$$P_j[\bar{r}_L^0, S^0, \bar{r}^0(t_i); t_i] = \max_{\bar{r}_L^0} P_j[\bar{r}_L^0, S^0, \bar{r}^0(t_i); t_i],$$

где  $S_0$  — матрица, строки которой составлены из последовательных координат векторов  $\bar{s}_0^0, \bar{s}_1^0, \dots, \bar{s}_L^0$ .

27. Положить  $j = j + 1$ .

28. Если  $j \leq \bar{J}$ , идти к п. 7.

29. Вычислить  $\bar{j}$ , для которого

$$P_j[\bar{\tau}_L^0, S^0, \bar{r}^0(t_i); t_i] = \max_{0 \leq j \leq \bar{J}} P_j[\bar{\tau}_L^0, S^0, \bar{r}^0(t_i); t_i].$$

30. Конец (управление  $\{\tau, S, \bar{r}(t)\}$ , где величины  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_L^0$ ,  $S = S^0$ ,  $\bar{r}(t) = e \dot{i}_z$  для  $t \in \Delta_{\text{вс}}$  соответствуют индексу  $\bar{j}$ , является оптимальным).

#### Библиографический список

1. Потапов, В. И. Постановка двух задач оптимального управления подвижной структурно-перестраиваемой избыточной системой, управляемой по каналам связи / В. И. Потапов // Динамика систем, механизмов и машин : материалы VIII Междунар. науч.-техн. конф., посвящ. 70-летию ОмГТУ. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2012. — С. 276–278.

2. Потапов, В. И. Новые задачи оптимизации резервированных систем / В. И. Потапов, С. Г. Братцев. — Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1986. — 112 с.

3. Потапов, В. И. Противоборство (дифференциальная игра) двух нейрокompьютерных систем / В. И. Потапов, И. В. Потапов // Информационные технологии. — 2005. — № 8. — С. 53–57.

4. Потапов, В. И. Надежность технических нейросистем : моногр. / И. В. Потапов. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011. — 212 с.

**ПОТАПОВ Виктор Ильич**, доктор технических наук, профессор (Россия), заведующий кафедрой «Информатика и вычислительная техника», заслуженный деятель науки и техники РФ.  
Адрес для переписки: ivt@omgtu.ru

Статья поступила в редакцию 11.07.2013 г.  
© В. И. Потапов

УДК 519.711.2:625.85

**В. Д. БЕЛИЦКИЙ**  
**А. В. КАТУНИН**

Омский государственный  
технический университет

## ТЕЗАУРУС МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССА УПЛОТНЕНИЯ АСФАЛЬТОБЕТОННОЙ СМЕСИ

Приводится тезаурус математических моделей процесса уплотнения асфальтобетонной смеси. Показано, что обеспечение релаксации смеси в процессе ее уплотнения дает возможность достигнуть качества покрытия и наименьшей энергоемкости процесса уплотнения смеси. Рассмотрены алгоритм и условие реализации рациональной скорости движения дорожного катка в процессе уплотнения, что позволяет разработать алгоритм определения технологических показателей процесса уплотнения асфальтобетонной смеси, отвечающих условию минимизации энергозатрат.

**Ключевые слова:** математическая модель, процесс уплотнения, асфальтобетонная смесь, период релаксации.

Представление о характере изменения напряжений и деформации материала, в зависимости от его физико-механических свойств при механическом воздействии, дают реологические модели. Последние представляют среду в виде упрощенных механических моделей, составленных из элементов, каждый из которых или их сочетание дают представление об основных свойствах материала и характере напряженно-деформированного состояния под действием внешних нагрузок. Модели идеально пластического тела описывают моделью Сен-Венана. Материал такого типа под действием внешней нагрузки не деформируется пластически до тех пор, пока напряжение не превзойдет определенный предел пластичности  $\tau_n$  [1]. Условие наступления пластической деформации как остаточной деформации сдвига определяется соотношением  $\tau = \tau_n$ . Чтобы описать поведение материала, способного проявлять как

упругие, так и вязкие свойства, обычно применяют прием, позволяющий использовать уравнения Гука и Ньютона. Один из путей предложен Максвеллом, который, продифференцировав по времени уравнение Гука

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\tau}{Edt}, \quad (1)$$

сложил полученную скорость деформации с той скоростью, которая определяется уравнением Ньютона

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\tau}{\eta}, \quad (2)$$

где  $\tau$  — напряжение,  $\varepsilon$  — относительная деформация;  $E$  — модуль упругости;  $t$  — время;  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости.

Полученное уравнение

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\tau}{Edt} + \frac{\tau}{\eta} \right), \quad (3)$$

или

$$\tau = e^{-\frac{E}{\eta}(t-t_0)} \left( \tau_0 + E \int_{t_0}^t \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot e^{\frac{E}{\eta}(t-t_0)} dt \right), \quad (4)$$

поведение материала, который, обладая упругостью, по существу является жидкостью (максвелловская жидкость). Интересен случай поведения такого материала, когда деформация в нем поддерживается постоянной, т.е. когда  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ . Тогда из (3), при начальном условии  $\tau(t_0) = \tau_0$ , здесь  $t_0$  — начальное время, имеем

$$\tau = \tau_0 e^{-\frac{E}{\eta}(t-t_0)}. \quad (5)$$

При фиксированном значении величины деформации напряжения, возникающие в таком материале, постепенно убывают, происходит релаксация напряжений.

Изучение свойств асфальтобетонной смеси на этапе уплотнения позволило выдвинуть гипотезу о том, что процесс релаксации напряжений в период контакта материала с поверхностью уплотняющего тела происходит по закону (5). При этом значение величины коэффициента динамической вязкости  $\eta$  численно равно коэффициенту внутреннего трения асфальтобетонной смеси [2]. В период очередного прохода уплотняющего агрегата, то есть при фиксированном значении величины деформации, поскольку вес агрегата постоянен, релаксация напряжений в асфальтобетонной смеси происходит по следующему закону [3]

$$\tau = \tau_0 e^{-\frac{E}{tg\varphi}(t-t_0)}, \quad (6)$$

где  $\varphi$  — угол внутреннего трения.

Определим момент времени, когда напряжение асфальтобетонной смеси будет на порядок меньше исходного напряжения  $\tau_0$ , последнее зависит от массы уплотняющего агрегата. Положив  $\tau = 0,1\tau_0$ , получим из формулы (6)

$$t = t_0 + \frac{tg\varphi}{E} \ln 10. \quad (7)$$

Очевидно, что при нагружении величина относительной деформации асфальтобетонной смеси после  $i$ -ого прохода уплотняющего тела, при прочих равных условиях, будет пропорциональна ее относительной плотности, то есть

$$\frac{\Delta\varepsilon_i}{h} = \alpha \frac{\rho_i - \rho_0}{\rho_i}, \quad (8)$$

где  $\Delta\varepsilon_i$  — величина абсолютной деформации уплотняемого слоя;  $h$  — толщина уплотняемого слоя,  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности;  $\rho_0$  — начальная плотность смеси;  $\rho_i$  — плотность асфальтобетонной смеси после  $i$ -ого прохода уплотняющего тела.

Учитывая, что  $\rho_0/\rho_i = b_i$  — показатель степени уплотняемости смеси [4], получим

$$\Delta\varepsilon_i = h\alpha(1 - b_i). \quad (9)$$

Таким образом, при  $b_i \rightarrow 1$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  процесс уплотнения практически закончен. Выбрав начальное значение показателя степени уплотняемости смеси,

а также массу и геометрические параметры уплотняющего тела, можно сформулировать динамику процесса уплотнения, описать процесс уплотнения асфальтобетонной смеси во времени, установить влияние габаритов уплотняющего тела на процесс уплотнения. Так, по формулам (6) и (7) определяем период времени, необходимый для реализации процесса релаксации напряжений  $\Delta t = t - t_0$ . Зависимость коэффициента внутреннего трения от показателя степени уплотняемости смеси устанавливается по аналогии с методом, изложенным в работе [5]. Для реализации закона (6) необходимо выполнение условия

$$\Delta t \leq \bar{t}, \quad (10)$$

где  $\bar{t}$  — время контакта уплотняемой площадки асфальтобетонной смеси с уплотняющим телом. Логично сделать допущение о том, что период  $\Delta t$  — величина постоянная. Это объясняется тем, что при уплотнении асфальтобетонной смеси, то есть при росте  $b_i$ , одновременно увеличиваются  $tg\varphi$  и  $E$ , а их отношение сохраняет постоянство. По формуле (9) определяются соответствующие значения относительной деформации смеси.

Под рациональной скоростью движения дорожного катка, уплотняющего асфальтобетонную смесь, будем понимать значение величины скорости, при котором реализуется период релаксации. Период релаксации — это время, в течение которого первоначальная величина напряжений при фиксированной деформации снижается в  $e$  раз ( $e$  — основание натурального логарифма) [6]. В работе [7] получено аналитическое условие рациональной скорости движения дорожных катков при уплотнении асфальтобетонной смеси. То есть скорости, при которой реализуется период релаксации уплотняемой смеси. Были установлены зависимости между такими важными технологическими показателями, как: временем релаксации и углом внутреннего трения, абсолютной и относительной деформациями, модулем упругости смеси, контактными напряжениями, деформацией, показателем степени уплотняемости смеси и другими величинами. Полученные закономерности позволяют разработать алгоритм определения параметров процесса уплотнения асфальтобетонной смеси, при котором достигается высокое качество покрытия, а энергозатраты минимальны. Также доказано [8], что обеспечение релаксации смеси в процессе ее уплотнения как раз и дает возможность достигнуть этих двух важнейших показателей: качества покрытия и наименьшей энергоемкости процесса уплотнения смеси. Приходим к выводу, что реализация рациональной скорости движения катков при уплотнении смеси позволит достигнуть указанных показателей.

Анализ теоретических и экспериментальных данных [9, 10] позволил получить качественные характеристики зависимостей между величинами абсолютной деформации уплотняемого асфальтобетонного слоя и контактного напряжения, создаваемого катком при условии реализации и не реализации релаксационного процесса асфальтобетонной смеси. Когда процесс релаксации уплотняемой асфальтобетонной смеси реализуется, напряжения в уплотняемом слое падают практически до нуля. Далее, при каждом последующим контакте катка с поверхностью уплотняемого слоя, последний начинает деформироваться с начального момента контакта, а не с запаздыванием. Запаздывание процесса

деформирования происходит, когда время тратится на преодоление остаточных упругих напряжений, что имеет место при отсутствии реализации процесса релаксации. Как следствие этого, уменьшение величины абсолютной деформации при повторных контактах катка с уплотняемым слоем происходит по линейному закону, если процесс релаксации реализуется, и имеет нелинейную зависимость в противном случае. Таким образом, для обеспечения стабильного приращения величины абсолютной деформации асфальтобетонного слоя, в случае не реализации процесса релаксации, необходимо увеличить контактные напряжения, что приводит к дополнительным энергозатратам.

Итак, величина скорости движения катков при уплотнении асфальтобетонной смеси в алгоритме — рациональная ( $\vartheta_{pi}$ ). Тогда величину производительности процесса уплотнения определим как

$$P = \sum_{i=1}^n P_i, \quad (11)$$

здесь  $P_i$  — производительность уплотнения при  $i$ -ом проходе, которую, в свою очередь, определим, как

$$P_i = B_i \Delta \varepsilon_i \vartheta_{pi}, \quad (12)$$

где  $B_i$  — ширина вальца;  $\vartheta_{pi}$  — скорость движения дорожного катка при  $i$ -ом проходе.

Величина энергии, затраченная на весь процесс уплотнения, определяется следующими выражениями:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i, \quad (13)$$

$$W_i = \tau_0 B_i \Delta \varepsilon_i L_i, \quad (14)$$

здесь  $L_i$  — длина  $i$ -ого прохода.

Выражение (13), с учетом формулы (14) и величины рациональной скорости, представим в виде

$$W = \sum \tau_0 B_i \Delta \varepsilon_i \vartheta_{pi} t_i, \quad (15)$$

где  $t_i$  — время (продолжительность)  $i$ -ого прохода.

Время  $t_i$  определим как отношение величины  $L_i$ , которую можно считать константой к величине  $\vartheta_{pi}$ , то есть

$$t_i = \frac{L_i}{\vartheta_{pi}}. \quad (16)$$

Скорость  $\vartheta_{pi}$  являясь решением уравнения (12), также выражается через  $b_i$ . В свою очередь, как показано в работе [7]

$$E_i = C_i + D_i \vartheta_{pi}^2, \quad (17)$$

где  $C$  и  $D$  — величины, зависящие от  $b_i$ .

Наконец, связь величин  $B_i$  с  $b_i$  найдем, воспользовавшись формулами из работы [11]

$$\tau_0 = \frac{Q_i (g d u_i + 2 \vartheta_{pi}^2)}{B_i g (d u_i)^2}, \quad (18)$$

$$d u_i = 2 R_i \arccos \left( 1 - \frac{h \alpha (1 - b_i)}{R_i} \right), \quad (19)$$

здесь  $R_i$  — радиус вальца;  $d u_i$  — длина дуги окружности вальца, которая погружена в смесь при контакте;  $Q_i$  — вес катка, приходящийся на валец.

Действительно, установив, например, зависимость между величинами абсолютной деформации и контактных напряжений в режиме нагрузка — разгрузка, при соблюдении релаксационного периода для данного типа смеси можно, реализуя полученные здесь зависимости, определить технологические параметры процесса уплотнения, энергоемкость уплотнения при каждом проходе катка, а также энергоемкость операции уплотнения в целом.

#### Выводы.

1. Согласно аксиоме реологии, каждый реальный материал, в том числе и асфальтобетонная смесь, обладает всеми реологическими свойствами, проявляющимися в различной степени в зависимости от условий протекания деформации. В модели (6) — (10), на разных этапах уплотнения сочетаются как упругие, так и пластические свойства асфальтобетонной смеси.

2. Возможность определения периода релаксации напряжений асфальтобетонной смеси позволяет установить рабочую скорость уплотняющего агрегата, поскольку период релаксации напряжений должен быть не больше времени контакта смеси с уплотняющим телом.

3. Величину энергии, затрачиваемой на весь процесс уплотнения, можно представить как энергетическую функцию одной переменной  $b$ , то есть  $W = W(b)$ . Это позволяет разработать алгоритм определения технологических показателей процесса уплотнения асфальтобетонной смеси, отвечающих условию минимизации энергозатрат.

#### Библиографический список

1. Гольденблат, И. И. Введение в теорию ползучести строительных материалов / И. И. Гольденблат. — М., Л.: Гос. изд-во по строительству и архитектуре, 1952. — 120 с.
2. Завьялов, М. А. Возможная реологическая модель релаксации асфальтобетонной смеси при уплотнении / М. А. Завьялов, А. М. Завьялов // Строительные и дорожные машины. — 2002. — № 7. — С. 25 — 26.
3. Богуславский, А. М. Реологические свойства асфальтового бетона различных составов / А. М. Богуславский, Л. А. Богуславский // Автомобильные дороги. — 1968. — № 2. — С. 18 — 19.
4. Завьялов, А. М. Анализ энергозатрат при укладке асфальтобетонной смеси / А. М. Завьялов, М. А. Завьялов // Строительные и дорожные машины. — 2001. — № 5. — С. 15 — 18.
5. Завьялов, М. А. Влияние удобоукладываемости асфальтобетонной смеси на энергоемкость процесса уплотнения / М. А. Завьялов, А. М. Завьялов // Строительные и дорожные машины. — 2002. — № 1. — С. 14 — 16.
6. Гезенцевей, Л. Б. Релаксация напряжений в асфальтобетоне / Л. Б. Гезенцевей, Э. А. Казарновская // Тр. СоюздорНИИ. — М.: Транспорт, 1966. — Вып. 7. — С. 54 — 59.
7. Завьялов, А. М. Аналитическое условие рациональной скорости движения дорожных катков при уплотнении асфальтобетонной смеси / А. М. Завьялов, М. А. Завьялов // Строительные и дорожные машины. — 2002. — № 9. — С. 44 — 45.
8. Завьялов, М. А. Закономерности остывания асфальтобетонного слоя и их связь с продолжительностью процесса уплотнения / М. А. Завьялов // Механизация строительства. — 2004. — № 2. — С. 17 — 18.
9. Завьялов, М. А. Формирование и оценка состояния дорожного асфальтобетонного покрытия на основе термодинамической теории: автореф. дис. ... д-ра техн. наук / М. А. Завьялов. — М., 2008. — 42 с.
10. Завьялов, М. А. Энергетическая функция процесса уплотнения асфальтобетонной смеси / М. А. Завьялов // Строительные и дорожные машины. — 2003. — № 3. — С. 19 — 21.

11. Завьялов, А. М. Влияние скорости движения дорожных катков на величину контактных напряжений при уплотнении асфальтобетонной смеси / А. М. Завьялов, М. А. Завьялов // Строительные и дорожные машины. — 2003. — № 9. — С. 22 — 23.

**БЕЛИЦКИЙ Виктор Дмитриевич**, кандидат технических наук, доцент (Россия), заместитель заведующего кафедрой «Нефтегазовое дело», почетный работник высшей школы Российской Федерации.

**КАТУНИН Александр Владимирович**, аспирант кафедры «Нефтегазовое дело», заведующий лабораториями.

Адрес для переписки: thngss@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 24.04.2013 г.

© В. Д. Белицкий, А. В. Катунин

УДК 517.9

**Л. В. БЕЛЬГАРТ**

Омский государственный  
технический университет

## О ДИХОТОМИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для указанного в названии статьи класса динамических систем получен достаточный признак экспоненциальной дихотомии в терминах коэффициентов.

**Ключевые слова:** экспоненциальная дихотомия, прямой метод Ляпунова, индефинитная эрмитова форма.

1. Одна из проблем теории устойчивости — разработка эффективных методов анализа поведения при большом времени динамических систем, параметры которых почти периодически зависят от времени. Во второй половине прошлого века получен ряд результатов по этой проблематике в рамках метода малого параметра — работы И. З. Штокало, Н. П. Еругина, В. Н. Фомина, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского, В. Ш. Бурда, Ю. С. Колесова [1–7] и других авторов. Вместе с тем в ряде случаев возникающие в приложениях задачи расчёта динамических систем на устойчивость и дихотомию не вкладываются в схему этого метода.

Некоторое продвижение произошло в последние 20 лет. В цикле работ [8–20] группы сотрудников и аспирантов ОмГТУ получены прямым методом Ляпунова признаки экспоненциальной устойчивости для различных классов почти периодических уравнений — дифференциальных, разностных, функционально-дифференциальных — с существенно ослабленным по сравнению с общим случаем условием на производную функции Ляпунова вдоль траекторий системы.

Начиная с середины прошлого века в теории дифференциальных уравнений интенсивно изучается более сложный, чем устойчивость, тип поведения решений, получивший название «экспоненциальная дихотомия». Получены приложения теории экспоненциальной дихотомии к задачам теории нелинейных колебаний, теории автоматического управления и другие. Представляет теоретический и практический интерес распространение методов и результатов указанных выше работ по анализу устойчивости решений почти периодических систем на этот случай. Первые результаты в этом на-

правлении получены в вышедших в последние пять лет работах Р. К. Романовского и Л. В. Бельгарт [21–24]. В частности, в работе [22] доказан прямым методом Ляпунова критерий экспоненциальной дихотомии для линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (1)$$

с почти периодической матрицей  $A(t)$  с ослабленным условием на производную функции Ляпунова вдоль траекторий системы. Данная работа является продолжением исследований, выполненных в этой работе.

Задачи теории колебаний, теории автоматического управления в ряде случаев приводят к анализу асимптотического поведения — устойчивости, дихотомии — линейных систем вида

$$\ddot{u} + p(t)\dot{u} + q(t)u = 0, \quad (2)$$

с периодическими и почти периодическими матрицами  $p(t)$ ,  $q(t)$ . Результат работы [22] позволяет получить просто проверяемый достаточный признак экспоненциальной дихотомии для системы (2).

Далее в пунктах 2–4 даны необходимые определения и сформулирована теорема из [22], в п. 5 излагается новый результат.

2. Пусть заданы функция  $f(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  и число  $\varepsilon > 0$ .

Число  $T = T(\varepsilon)$  называется  $\varepsilon$ -почти-периодом функции  $f(t)$ , если выполняется неравенство  $|f(t+T) - f(t)| < \varepsilon$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).

Функция  $f(t)$  называется почти периодической (п.п.), если она непрерывна на оси и для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $l = l(\varepsilon)$ , что любой отрезок длины  $l$  на оси содержит хотя бы один  $\varepsilon$ -почти-период.

Матрица  $A(t)$  называется почти периодической, если все её элементы почти периодические.

3. Говорят, что для системы (1) с непрерывной матрицей  $A(t)$  и матрицей Коши  $U(t)$  имеет место свойство экспоненциальной дихотомии (э-дихотомии), если фазовое пространство распадается в прямую сумму

$$E = E_1 \dot{+} E_2$$

так что

1°) при некоторых  $\mu, \nu > 0$  выполняются оценки

$$\begin{cases} x \in E_1 \Rightarrow |U(t)x| \leq \mu e^{-\nu(t-\tau)} |U(\tau)x| & (t \geq \tau), \\ x \in E_2 \Rightarrow |U(t)x| \leq \mu e^{-\nu(\tau-t)} |U(\tau)x| & (t \leq \tau), \end{cases}$$

2°) взаимный наклон движущихся подпространств  $E_k(t) = U(t)E_k$  отделён от нуля.

4. Обозначим  $\mathfrak{S}$  класс матриц  $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(N, C)$  со свойствами

$$F \in C^1, F^* = F, |\det F| \geq \text{const} > 0, F, F^* \text{ п.н.},$$

форма  $v(x, t) = \langle F(t)x, x \rangle$  индефинитна.

**Теорема 1.** [22] **I.** Если для системы (1) с п. н. матрицей  $A(t)$  существует матрица  $F \in \mathfrak{S}$  такая, что

1°)  $G(t) = \dot{F} + FA + A^*F \leq 0 \quad (t \in \mathbb{R})$ ,

2°) форма  $\dot{v}(x, t) = \langle G(t)x, x \rangle$ , отлична от тождественного нуля на каждом ненулевом решении  $x(t)$  системы (1):  $\dot{v}(x(t), t) \neq 0$ , то для системы (1) имеет место свойство э-дихотомии.

**II.** Если для системы (1) с п. н. матрицей  $A(t)$  имеет место свойство э-дихотомии, то существует матрица  $F \in \mathfrak{S}$  со свойствами 1°, 2°.

5. Будем говорить, что для уравнения (2) имеет место свойство э-дихотомии, если это свойство имеет место для эквивалентной системы (1), где

$$x = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -q & -p \end{bmatrix}. \quad (3)$$

**Теорема 2.** Пусть для уравнения (2) с почти периодическими матрицами  $p, q$  выполняются условия

$$\begin{cases} q^* = q, q \leq -mI \quad (m > 0), \det h \neq 0, \\ h = \dot{q} + pq + qp^* \geq 0 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4)$$

Тогда для уравнения (2) имеет место свойство э-дихотомии.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим

$$F = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Очевидно  $F \in \mathfrak{S}$ .

Покажем, что для матрицы  $G$  и формы  $\dot{v}$  на решении  $x(t)$  верны равенства

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q^{-1}hq^{-1} \end{bmatrix}, \dot{v}(x(t), t) = -\dot{u}^*q^{-1}hq^{-1}\dot{u}. \quad (5)$$

Имеем

$$\begin{aligned} G &= \dot{F} + FA + A^*F = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}\dot{q}q^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -q & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -q \\ I & -p^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}\dot{q}q^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -q^{-1}p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & -p^*q^{-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}(\dot{q} + pq + qp^*)q^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}hq^{-1} \end{bmatrix} = -\text{diag}(0, q^{-1}hq^{-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(t), t) &= x^*Gx = \begin{bmatrix} \dot{u}^* & \dot{u}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}hq^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{u}^*q^{-1}hq^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix} = -\dot{u}^*q^{-1}hq^{-1}\dot{u}, \end{aligned}$$

тем самым равенства (5) доказаны.

Пусть  $x(t)$  — ненулевое решение системы (1) с матрицами (3). Тогда  $\dot{u} \neq 0$ : в противном случае из (2) получим  $u=0 \Rightarrow x=0$ . С учётом этого из (3), (5) нетрудно убедиться, что если  $h \geq 0$  условия 1°, 2° теоремы 1 выполняются. Теорема доказана.

Обратим внимание, что матрица  $G$  вырождена и *заведомо не удовлетворяет* требованию  $G(t) \leq -mI, t \in \mathbb{R}$  доказанного А. Д. Майзелем [25] критерия э-дихотомии для системы (1) с непрерывной матрицей  $A(t)$ .

Рассмотрим важный для приложения частный случай, когда уравнение (2) скалярное и коэффициенты  $p(t), q(t)$  — вещественные тригонометрические многочлены:

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \sin(\nu_k t + \varphi_k), \\ q(t) &= b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \sin(\omega_k t + \psi_k). \end{aligned} \quad (6)$$

Предполагается

$$a_k, b_k, \nu_k, \omega_k > 0 \quad (k \geq 1). \quad (7)$$

**Теорема 3.** Для того, чтобы для уравнения (2) с коэффициентами (6) имело место свойство э-дихотомии, достаточно выполнение неравенств

$$b_0 < -\sum_{k=1}^n b_k, 2 \left( a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \right) \left( b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \right) - \sum_{k=1}^n \omega_k b_k > 0. \quad (8)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В проверке нуждаются последние два требования (4). Из (6) – (8) легко получить:  $p < 0, q < 0$ ,

$$|p(t)| \geq - \left( a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \right), |q(t)| \geq - \left( b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \right), |q_0| \geq \sum_{k=1}^n \omega_k b_k.$$

С учётом этого имеем

$$\begin{aligned} h &= 2pq + \dot{q} \geq 2 \min_t |pq| - \max_t |\dot{q}| \geq 2 \min_t |p| \cdot \min_t |q| - \max_t |\dot{q}| \geq \\ &\geq 2 \left( a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \right) \left( b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \right) - \sum_{k=1}^n \omega_k b_k > 0, \end{aligned}$$

откуда следует требуемое.

#### Библиографический список

1. Штокало, И. З. Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных уравнений с квазипериодическими коэффициентами / И. З. Штокало // Матем. сб. — 1946. — Т. 19 (61), № 2. — С. 263–268.
2. Еругин, Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами / Н. П. Еругин. — Минск: Изд-во АН БССР, 1963. — 273 с.
3. Фомин, В. И. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах / В. И. Фомин. — Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1972. — 237 с.
4. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
5. Бурд, В. Ш. Бифракция почти периодических колебаний дифференциальных уравнений с последствием нейтраль-

ного типа, с быстрым и медленным временем / В. Ш. Бурд // Исследования по устойчивости и теории колебаний : сб. науч. тр. — Ярославль, 1976. — С. 143–153.

6. Колесов, Ю. С. Необходимые и достаточные условия экспоненциальной дихотомии решений линейных почти периодических уравнений с последействием / Ю. С. Колесов // Вестн. Яросл. ун-та. — 1973. — № 5. — С. 28–62.

7. Колесов, Ю. С. Обзор результатов по теории устойчивости решений дифференциально-разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами / Ю. С. Колесов // Исследования по устойчивости и теории колебаний : сб. науч. тр. — Ярославль, 1977. — С. 82–141.

8. Боль, П. О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применяемых в механике / П. О. Боль. — Юрьев, 1900.

9. Добровольский, С. М. Об устойчивости решений линейных систем с почти периодической матрицей / С. М. Добровольский, А. С. Котюргина, Р. К. Романовский // Матем. заметки. — 1992. — Т. 52, вып. 6. — С. 10–14.

10. Добровольский, С. М. Метод функций Ляпунова для почти периодических систем / С. М. Добровольский, Р. К. Романовский // Матем. заметки. — 1997. — Т. 62, вып. 1. — С. 151–153.

11. Добровольский, С. М. Прямой метод Ляпунова для почти периодической разностной системы на компакте / С. М. Добровольский, А. В. Рогозин // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 1. — С. 98–105.

12. Кириченнова, О. В. Метод функций Ляпунова для систем линейных разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами / О. В. Кириченнова, А. С. Котюргина, Р. К. Романовский // Сиб. мат. журн. — 1996. — Т. 37, № 1. — С. 170–174.

13. Кириченнова, О. В. Об устойчивости решений нелинейных почти периодических систем разностных уравнений / О. В. Кириченнова // Сиб. мат. журн. — 1998. — Т. 39, № 1. — С. 45–48.

14. Мендзив, М. В. Прямой метод Ляпунова для гиперболических систем с почти периодическими по времени коэффициентами / М. В. Мендзив // Омский научный вестник. — 2006. — № 3 (36). — С. 75–78.

15. Рогозин, А. В. Прямой метод Ляпунова для почти периодических систем в банаховом пространстве / А. В. Рогозин, Р. К. Романовский // Доклады АН ВШ РФ. — 2005. — № 2 (5). — С. 65–72.

16. Рогозин, А. В. Об устойчивости решений линейного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве

с почти периодическим оператором / А. В. Рогозин // Доклады АН ВШ РФ. — 2006. — № 1 (6). — С. 24–32.

17. Прямой метод Ляпунова для уравнений с почти периодическими коэффициентами / Р. К. Романовский [и др.]. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2001. — 80 с.

18. Романовский, Р. К. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с почти периодическими коэффициентами / Р. К. Романовский, Г. А. Троценко // Сиб. мат. журн. — 2003 — Т. 44, № 2. — С. 444–453.

19. Стругова, Т. М. Об устойчивости линейных стохастических разностных систем с почти периодическими коэффициентами / Т. М. Стругова // Матем. заметки. — 2005. — Т. 78, № 3. — С. 472–475.

20. Троценко, Г. А. Об устойчивости решений почти периодической системы функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа / Г. А. Троценко // Изв. вузов. Матем. — 2003. — № 6. — С. 77–81.

21. Бельгарт, Л. В. Об экспоненциальной дихотомии линейных разностных систем с почти периодической матрицей / Л. В. Бельгарт, Р. К. Романовский // Матем. заметки. — 2008. — Т. 84, № 4. — С. 638–640.

22. Бельгарт, Л. В. Об экспоненциальной дихотомии линейных систем с почти периодической матрицей / Л. В. Бельгарт, Р. К. Романовский // Сиб. мат. журн. — 2009. — Т. 50, № 1. — С. 190–198.

23. Бельгарт, Л. В. Об экспоненциальной дихотомии решений систем линейных разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами / Л. В. Бельгарт, Р. К. Романовский // Изв. вузов. Математика. — 2010. — № 10. — С. 51–59.

24. Бельгарт, Л. В. Дихотомия решений задачи Коши для почти периодической гиперболической системы на плоскости / Л. В. Бельгарт, Р. К. Романовский // Доклады АН ВШ РФ. — 2010. — № 2 (15). С. 14–24.

25. Майзель, А. Д. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений / А. Д. Майзель // Тр. Ур. ПИ. Сер. мат. — 1954. — № 51. — С. 20–50.

**БЕЛЬГАРТ Любовь Васильевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.

Адрес для переписки: [belgart@rambler.ru](mailto:belgart@rambler.ru)

Статья поступила в редакцию 10.06.2013

© Л. В. Бельгарт

## Книжная полка

514.18/Ч-37

**Чекмарев, А. А. Начертательная геометрия и черчение [Электронный ресурс] : учеб. для бакалавров высш. учеб. заведений по техн. специальностям / А. А. Чекмарев. - 4-е изд., испр. и доп. - М. : Юрайт, 2012. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM) : цв. ; [471] с. : рис. - (Бакалавр) (Электронные учебники издательства «Юрайт»). - Загл. с титул. экрана.**

В учебнике изложены основы начертательной геометрии в непосредственной связи с основами технического рисунка и черчения; основы машиностроительного черчения, правила выполнения схем; даны элементы строительного и топографического черчения; основы использования персональных электронных вычислительных машин для решения графических задач.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

## АЛГОРИТМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ В ПАРАЛЛЕЛЬНО-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНУЮ

Для проведения анализа и исследования сложных систем необходимо иметь описание их структуры (структурной функции). Зачастую структура сложных систем является неупорядоченной. Такую структуру будем приводить к структуре типа «k» из «n». В настоящей работе рассматривается алгоритм преобразования структурной модели сложной системы в параллельно-последовательную структуру. Неупорядоченная структура описывается с помощью графа (ориентированного или неориентированного). Для реализации на каком-либо алгоритмическом языке предложен псевдокод алгоритма. Одним из вариантов применения алгоритма могут быть задачи оценки надежности сложных систем.

**Ключевые слова:** сложная система, структура, параллельно-последовательная структурная модель, алгоритм преобразования, граф, структурная функция.

**Введение.** Сложные системы характеризуются большим числом элементов, многообразием форм их связи, множественностью целей функционирования, многообразием природы элементов, изменчивостью и состава, и структуры ... [1–6].

Ряд задач системного анализа требует исследования структурной модели сложной системы. При этом некоторые из них решаются лишь при преобразовании существующей, часто неупорядоченной структуры к виду, который позволяет достичь решения задач, поставленных перед исследованием.

**1. Способы описания и упорядочивания структуры сложной системы.** Рассмотрим пример. Пусть требуется определить состояние работоспособности системы  $\varphi$  при известных состояниях её компонентов  $x_i$ , где  $i = 1 \dots n$ ,  $n$  — число элементов системы:  $\varphi = \{x_i\}$ ;

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й элемент работоспособен,} \\ 0, & \text{если } i\text{-й элемент отказал.} \end{cases} \quad (1)$$

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{если система работоспособна,} \\ 0, & \text{если система отказала.} \end{cases} \quad (2)$$

Если состояние системы полностью определено состоянием ее элементов, то можно использовать математическую модель структуры в виде функции  $\varphi = \varphi(x)$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Функция  $\varphi(x)$  называется структурной функцией системы (здесь структурной моделью системы) [7].

Произвольную структуру системы можно привести к одному из трех типов структур [7, 8]. Первый — последовательная структура: система работоспособна тогда и только тогда, когда работоспособны все ее элементы. Структурная функция в этом случае

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^n x_i = \min(x_1, \dots, x_n). \quad (3)$$

Второй — параллельная структура: система работоспособна тогда и только тогда, когда работоспособен по крайней мере один из ее элементов. Структурная функция в этом случае

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^n x_i = \max(x_1, \dots, x_n), \quad (4)$$

где введено обозначение  $\prod_{i=1}^n x_i \equiv 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$ .

Третий — структура типа «k из n»: система работоспособна тогда и только тогда, когда по крайней мере k её элементов работоспособны. Структурная функция задается в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^n x_i \geq k, \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^n x_i < k. \end{cases} \quad (5)$$

Структуру сложной системы, учитывая её свойство живучести, в частности, можно представить только в виде (5). Учитывая все k-наборов работоспособных элементов, перепишем структурную модель системы (5) в виде [7]

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x_1 \dots x_k) \vee (x_1 \dots x_{k-1} x_{k+1}) \vee \dots \vee (x_{n-k+1} \dots x_n) \equiv \\ &\equiv \max\{(x_1 \dots x_k), (x_1 \dots x_{k-1} x_{k+1}), \dots, (x_{n-k+1} \dots x_n)\}. \end{aligned}$$

Максимум в этом выражении означает, что система считается работоспособной, если, хотя бы одним из k-наборов, все элементы работоспособны.

Далее. Каждый  $k$ -й набор элементов является вектором минимального пути [7], т.е.  $\varphi(x) = 1$  (система работоспособна). Тогда структурную функцию  $\varphi(x)$  можно представить посредством минимальных путей:

$$\varphi(x) \equiv \prod_{j=1}^P \rho_j(x) \equiv 1 - \prod_{j=1}^P (1 - \rho_j(x)), \quad (6)$$

где  $\rho_j(x) = \prod_{i \in P_j} x_i$  —  $j$ -й минимальный путь,  $P$  — множество минимальных путей. В итоге описанным образом произвольная структурная модель в задаче оценки работоспособности системы может быть представлена параллельным соединением последовательных структур минимальных путей и аналитически записана в виде (6). В этом смысле мы говорим об адекватности модели задаче.

В качестве примера системы с произвольной структурой в рассматриваемой задаче рассмотрим мостиковую схему (рис. 1).

Используя (6), представим мостиковую структуру в виде параллельно-последовательной структуры (рис. 2), со структурными функциями минимальных путей соответственно:

$$\rho_1 = x_1 x_3 x_5, \quad \rho_2 = x_2 x_3 x_4, \quad \rho_3 = x_1 x_4, \quad \rho_4 = x_2 x_5,$$

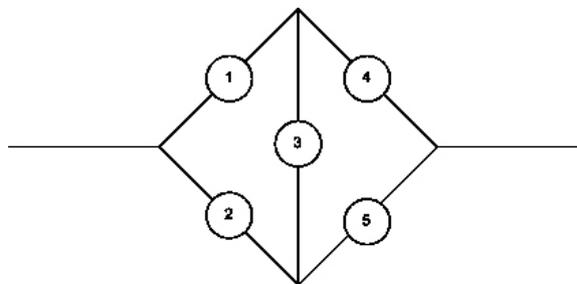


Рис. 1. Мостиковая структура

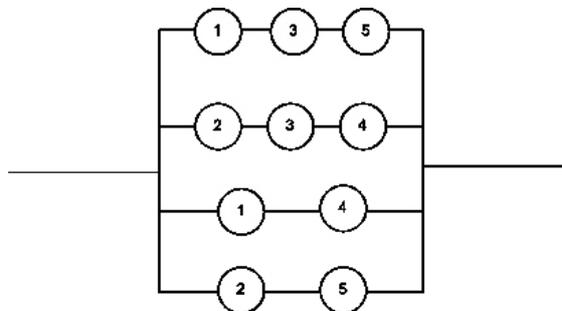


Рис. 2. Представление мостиковой структуры через минимальные пути

*DNF(G, s, d)*

1.  $u \leftarrow s$
2.  $path \leftarrow NIL$
3. *for* (для) каждой вершины  $v$ , смежной с  $u$  &  $v \notin path$
4.      $do\ path \leftarrow u$
5.     *while*  $d \notin path$
6.          $path \leftarrow path + v$
7.         добавление  $Edge(u, v)$  к  $BlackEdges$
8.          $u \leftarrow v$
9.          $v \leftarrow GetNextWhiteVertex(u)$
10.     сохранение  $path$  в  $ListPaths$
11.      $v \leftarrow FindNewCandidate(G, path, BlackEdges)$
12.     *if*  $path \neq s$  &  $v \neq NIL$  *goto* 5

Рис. 3. Процедура DNF

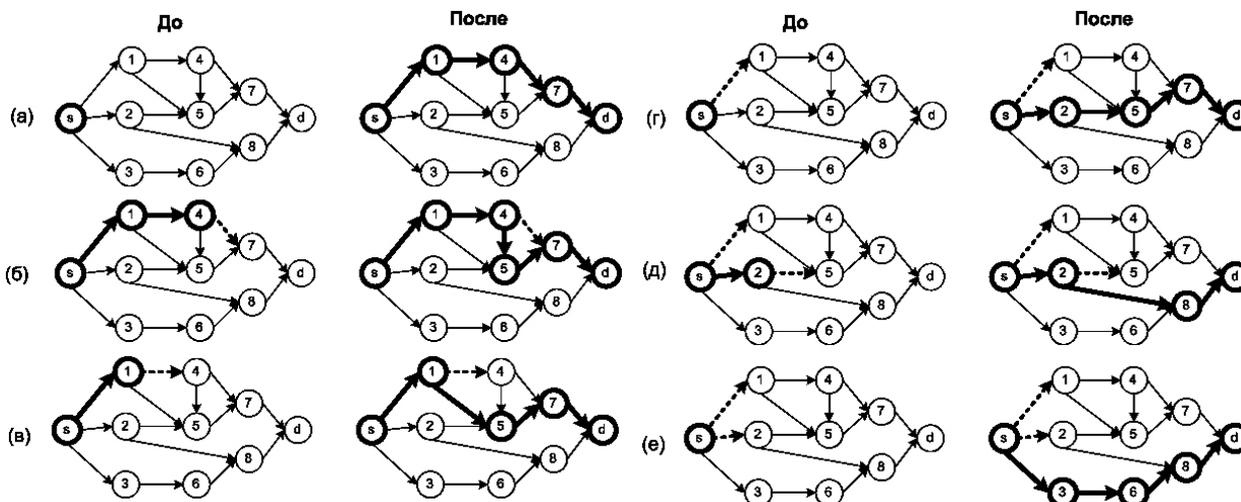


Рис. 4. Исполнение процедуры DNF для ориентированного графа

**2. Численный алгоритм преобразования произвольной структурной модели системы в параллельно-последовательную.** Для нахождения всех минимальных путей предлагается следующий алгоритм. Пусть задан граф  $G=(V, E)$ , где  $V$  — множество вершин и  $E$  — множество ребер, и фиксированы начальная вершина (source vertex)  $s$  и конечная вершина (destination vertex)  $d$ . Алгоритм поиска перечисляет все достижимые пути из  $s$  в  $d$ . Алгоритм применим и к ориентированным, и к неориентированным графам. Для наглядности мы будем считать, что в процессе работы алгоритма вершины и ребра графа могут быть белыми и черными. В алгоритме используется две стратегии. Первая стратегия — поиск в глубину: идти «вглубь», пока это возможно (есть непройденные исходящие ребра) и пока не достигнута вершина  $d$  (путь найден). Вторая стратегия заключается в модификации (последовательное удаление справа из пути вершины и поиск нового ребра) найденного пути таким образом, чтобы достичь вершины  $d$  (новый путь).

Приведенная на рис. 3 процедура DNF использует представление графа  $G=(V, E)$  матрицей смежности [9].

В строках 1–2 происходит начальная инициализация списка черных вершин  $path$  (текущий минимальный путь) и вершиной-родителем становится  $u$ . В основном цикле программы (строки 5–9) осуществляется поиск пути от  $s$  к  $d$ . Полученный путь сохраняется в списке путей  $ListPaths$  (строка 10). В строках 11–12 выполняется такой выбор вершины  $v$ , которая бы позволила достичь вершины  $d$  другим путем. Если такая вершина не найдена и текущий путь равен  $s$ , то возвращаемся на шаг 3. На рис. 4 приведен пример исполнения процедуры DNF.

Если известна дополнительная информация, как, например, интенсивность отказов или вероятность безотказной работы отдельных элементов системы, то может решаться задача оценки надежности системы [10].

**Заключение.** В контексте задачи оценки работоспособности сложной системы построена математическая модель её структуры, отражающая параллельно-последовательное преобразование исходной структуры.

Предложен численный алгоритм преобразования произвольной структурной модели системы в параллельно-последовательную.

#### Библиографический список

1. Кориков, А. М., Теория систем и системный анализ : учеб. пособие ; ред. 2 / А. М. Кориков, С. Н. Павлов. — Томск : Изд-во ТИАСУР, 2008. — 264 с.

2. Математическая энциклопедия. В 5 т. Т. 4 / Гл. ред. И. М. Виноградов. — М. : Советская энциклопедия, 1984. — 1216 стб.

3. Растрингин, Л. А. Адаптация сложных систем / Л. А. Растрингин. — Рига : Зинатне, 1981. — 375 с.

4. Лоскутов, А. Ю. Основы теории сложных систем / А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов. — М. — Ижевск : Регулярная и стохастическая динамика, 2007. — 612 с.

5. Боуддинг, К. Общая теории систем — скелет науки / К. Боуддинг // Исследования по общей теории систем. — М. : Прогресс, 1969. — С. 106–124.

6. Шаракшанэ, А. С. Сложные системы : учеб. пособие для вузов / А. С. Шаракшанэ, И. Г. Железнов, В. А. Ивницкий — М. : Высшая школа, 1977. — 247 с.

7. Барлоу, Р. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность / Р. Барлоу, Ф. Прошан ; пер. с англ. — М. : Наука, 1984. — 328 с.

8. Надежность и эффективность в технике: Справочник. В 10 т. Т. 5 Проектный анализ надежности / Под ред. В. И. Патрушева, А. И. Рембезы. — М. : Машиностроение, 1988. — 320 с.

9. Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест ; пер. с англ. под ред. А. Шеня. — М. : МЦНМО, 2002. — 960 с.

10. Маер, А. В. Автоматизированный программный комплекс для моделирования надежности сложных систем / А. В. Маер // Вестник Тюменского государственного университета. — Тюмень : ТюмГУ, 2009. — № 6. — С. 234–240.

**БАТРАКОВ Петр Андреевич**, аспирант, ассистент кафедры теплоэнергетики Омского государственного технического университета.

**МАЕР Алексей Владимирович**, преподаватель кафедры программного обеспечения и автоматизированных систем Курганского государственного университета.

**ШАПЦЕВ Валерий Алексеевич**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры информационных систем Тюменского государственного университета.

Адрес для переписки: alex\_povt@mail.ru

Статья поступила в редакцию 11.07.2013 г.

© П. А. Батраков, А. В. Маер, В. А. Шапцев

## Книжная полка

51/0-74

Осипова, В. А. Основы дискретной математики : учеб. пособие для вузов по направлению подгот. «Экономика» / В. А. Осипова. — М. : Форум. — [Б. м.] : ИНФРА-М, 2012. — 158 с.

Излагаются основы современной дискретной математики. Рассматриваются вопросы, связанные с комбинаторикой, математической логикой, теорией графов. Приводятся практические задачи и даются алгоритмы их решения.

## ЭВОЛЮЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ МОЛНИИ В ПРОЦЕССЕ ИСКРОВОГО РАЗРЯДА

В статье рассмотрена структура молнии в процессе искрового разряда. Рассмотрен характер распространения заряженных частиц в канале молнии на основании полученных экспериментальных данных.

**Ключевые слова:** молния, разряд, стример, спираль.

Механизм развития разряда молнии достаточно подробно представлен в литературе [1, 2]. Общепринятый механизм описан, например, в работе [2]. Автор рассматривает развитие разряда в так называемой лидерной форме, представляющей собой последовательный ряд возникающих каналов-стримеров, сдвинутых один по отношению к другому в пространстве и во времени. Поток электронов, перемещающихся вдоль последовательно развивающихся стримеров, разогревает канал лидера до нескольких тысяч градусов, благодаря чему электроны в виде искрового разряда преодолевают гигантские расстояния. Далее указывается, что перемещение электронов вдоль стримеров приводит к образованию объёмного заряда вокруг разогретого искрового канала, полярность которого соответствует знаку заряда грозового облака.

Однако в этой общепринятой модели развития разряда молнии не совсем понятен характер распространения электронов внутри канала. В некоторых источниках искровой разряд молнии представляет собой плотный поток плазмы заряженных частиц, сжатых мощным магнитным полем в очень узком канале диаметром около сантиметра. Предполагается, что магнитное поле образуется благодаря самому потоку заряженных частиц и имеет поперечную коаксиальную форму сходящихся к центру канала окружностей. Непонятно, как заряженным частицам с низкой начальной скоростью удаётся в процессе разряда создавать магнитное поле, удерживающее достаточно плотную плазму в очень малом объёме пространства. В настоящей статье предпринята попытка осмысления этого процесса.

Электрон в постоянном магнитном поле движется по спирали [3]:

$$M = eV/w, \quad (1)$$

где  $M$  — масса электрона,  
 $e$  — заряд электрона,  
 $V$  — индукция магнитного поля,  
 $w$  — угловая частота спирали.

При этом угловая частота определяется по формуле:

$$w = 2\pi f, \quad (2)$$

где  $f$  — циклотронная частота. Например, для электронов земной ионосферы, находящихся в магнитном поле Земли, согласно формулам (1) и (2), циклотронная частота  $f = 1,4 \times 10^6$  Гц [3]. С другой стороны, циклотронная частота определяется как число оборотов электронов вокруг оси распространения за секунду, то есть:

$$f = v_s/\lambda \quad (3)$$

где  $v_s$  — скорость линейного распространения электронов,  $\lambda$  — шаг спирали.

Кроме того, из литературы известны параметры линейной молнии и магнитного поля Земли:

диаметр канала ствола молнии — 10–45 см;

скорость линейного распространения молнии — 150 км/с;

сила тока в канале — 200 кА;

длительность молнии — до 0,5 с;

индукция магнитного поля Земли —  $5 \times 10^{-5}$  Тл.

Фотография линейной молнии, небольшой участок которой изображён на рис. 1, была сделана в июле поздним вечером обычным зеркальным фотоаппаратом.

Снимок представляет собой многократно увеличенный участок молнии, составляющий ~1–2 % от общей длины молнии, попавшей в кадр фотоплёнки. Это, безусловно, отразилось на резкости и контрастности изображения, однако позволило увидеть детали, недоступные при меньшем увеличении.

На негативе показаны три момента жизни молнии. В центре снимка зафиксирована начальная стадия жизни молнии — яркий однородный шнур. Плотность заряженных частиц настолько высока, что различить характер движения этих частиц практически невозможно. Внизу показана последняя стадия жизни молнии — остатки канала, растворяющиеся в атмосфере. В верхней части фотографии показана промежуточная стадия развития линейной молнии, на которой отчётливо видна спираль некоторых частиц. Принимая диаметр канала молнии ~0,2 м, можно по фотографии определить шаг спирали  $\lambda \sim 0,1$  м. Затем, используя вышеуказанные пара-



Рис. 1. Эволюция линейной молнии

метры линейной молнии и магнитного поля Земли, по формуле (3) можно определить циклотронную частоту  $f = 1,5 \times 10^6$  об/сек, что достаточно точно совпадает с результатом, вычисленным по формулам (1) и (2) для электронной спирали. Соответствующая масса частицы, вычисленная по формуле (1), равна  $8,5 \times 10^{-31}$  кг, что с большой точностью соответствует массе электрона ( $9,1 \times 10^{-31}$  кг). Следовательно, согласно теории [2], в данном случае наблюдался искровой разряд электронов в системе положительно заряженных стримеров.

Выражение силы Лоренца, действующей на движущуюся в электромагнитном поле заряженную частицу, в векторной форме имеет вид [3]:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}], \quad (4)$$

где  $E$  — напряжённость электрического поля,

$B$  — магнитная индукция,

$v$  — скорость частицы,

$q$  — заряд частицы.

Если считать магнитное поле Земли постоянным и однородным для относительно компактной среды распространения молнии, то канал линейной молнии, вероятно, искривляется под действием электрического поля, непрерывно меняющегося в зависимости от заряда близлежащих облаков. Магнитное поле Земли заставляет электроны, летящие под углом  $\alpha$  к силовым линиям поля, двигаться внутри канала по спирали радиуса  $R$ :

$$R = \frac{v_{\perp}}{(e/m)B},$$

и двигаться вдоль силовых линий магнитного поля Земли со скоростью  $v_s$ , где  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ ,  $v_s = v \cos \alpha$  [3]. Таким образом, при вхождении электронов в поле Земли под углом  $\alpha$ , близким к  $90^\circ$ , спираль имеет максимальный радиус и минимальную скорость линейного перемещения вдоль канала стримера. Дальнейшее распространение спирали вдоль каналов последовательно идущих стримеров незначительно зависит от магнитного поля Земли, ибо, благодаря явлению самоиндукции, процесс распространения спирали продолжается автоматически. Спираль электронов аналогична цилиндрической катушке длиной  $l$  и с количеством витков  $N$ , по которым протекает ток  $I_L$ . В окрестностях любой цилиндрической катушки, благодаря явлению электромагнетизма, всегда существует магнитное поле [4]. В данном случае катушка практически бесконечна, и магнитное поле в основном сосредоточено внутри неё и по правилу буравчика направлено по направлению линейного распространения молнии. Индукция магнитного поля внутри спирали определяется как:

$$B_L = \mu_0 H_L,$$

где  $\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6}$  Вс/(Ам) — магнитная постоянная,  $H_L = I_L N / l$  — напряжённость магнитного поля [4]. Используя из фотографических данных величину шага спирали  $\lambda = 0,1$  м можно записать  $H_L = I_L / \lambda$ . Таким образом, для тока в спирали  $I_L \sim 10^6$  А, находим  $H_L \sim 10^7$  А/м,  $B_L \sim 12$  Тл, что в двести тысяч раз больше параметров магнитного поля Земли. Явление самоиндукции выражается в скачкообразном увеличении магнитного поля внутри спирали, которое индуцирует напряжение в самой спирали, создающей это магнитное поле. Напряжение противоположно порождающему его изменению тока. В результате самоиндукция препятствует скачкообразному изменению тока, обуславливает медленное нарастание тока при замыкании цепи [4], то есть при искровом разряде. Процесс формирования и распространения спирали, таким образом, стабилизируется.

В результате выполненной работы рассмотрена эволюция линейной молнии в процессе её распространения в атмосфере Земли. В виде гипотезы предложена модель распространения заряженных частиц внутри канала линейной молнии, согласно которой искровой разряд линейной молнии, протекающий в последовательном ряде положительно заряженных стримеров, представляет собой лавину электронов, движущихся по спирали, образованной в магнитном поле Земли и распространяющейся благодаря явлениям электромагнетизма и самоиндукции.

#### Библиографический список

1. Викизнание : свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://wikiznanie.ru> (дата обращения: 22.10.2012).
2. Александров, Г. Н. Главная стадия разряда молнии: механизм и выходные характеристики / Г. Н. Александров // Журнал теоретической физики. — 2006. — Т. 76. — Вып. 12. — С. 101–105.
3. Можаяев, В. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях / В. Можаяев // Квант. — 1979. — № 4. — С. 40–43.
4. Кухлинг, Х. Справочник по физике / Х. Кухлинг. — М., 1983. — С. 345.

**ТИХОНОВ Игорь Анатольевич**, ведущий инженер-конструктор.

Адрес для переписки: [kauk20000007@rambler.ru](mailto:kauk20000007@rambler.ru)

Статья поступила в редакцию 27.02.2013 г.

© И. А. Тихонов

## РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РАДИАЦИОННОМ ОБЛУЧЕНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ

Для объяснения причин образования сетки трещин на поверхности образцов в конструкционных сталях с покрытием, при радиационной обработке низкоэнергетическими сильноточными пучками электронов и ионов, проведены модельные расчеты температурных полей и термоупругих напряжений. Расчеты показали, что при воздействии на поверхность стали 50Х6ФМС импульсным пучком электронов с кинетической энергией 500 кэВ, плотности тока 0,8 кА/см<sup>2</sup> и продолжительности импульса свыше 150 нс возникают напряжения, превышающие предел прочности материала, что может служить основанием для объяснения причин разрушения. Напряжения, возникающие на поверхности образца в направлении, перпендикулярном потоку электронов, превосходят напряжения, возникающие по глубине образца, в 2–3 раза. Тем самым установлено, что основной вклад при образовании сетки трещин в поверхностном слое вносят поперечные напряжения.

**Ключевые слова:** сильноточные электронные пучки, температурные поля, термоупругие напряжения, моделирование.

Актуальность изучения процессов, происходящих на поверхности металлических сплавов при облучении сильноточными пучками электронов и ионов, обусловлена тем, что такой метод обработки позволяет значительно повысить твердость, износостойкость, усталостную и коррозионную прочность конструкционных и инструментальных материалов. Это относится к имплантации ионов сверхмалых энергий, к имплантации больших доз, к легированию и к импульсной термообработке имплантационных слоев [1]. Как показывают экспериментальные исследования, в ряде случаев облучение способствует образованию различного рода дефектов кристаллической решетки. А неравномерный нагрев иногда приводит к образованию поверхностной сетки трещин в материале [2]. Поэтому в данной работе моделировались температурные поля и термомеханические напряжения, возникающие при воздействии низкоэнергетическими сильноточными пучками электронов и ионов с целью возможного объяснения наблюдаемого разрушения и ряда явлений, протекающих на поверхности материала, при воздействии концентрированными потоками энергии.

**Методика расчета термоупругих напряжений.** При неравномерном распределении температуры по глубине мишени в последней генерируются упругие волны: продольная и поперечная [3].

Для расчета температурных полей и распределения упругих напряжений мы ограничились решением одномерной по пространственной координате задачи на отрезке  $0 \leq x \leq x_{\text{конечное}}$  вдоль полуоси  $x$ , направленной перпендикулярно к облучаемой поверхности в глубину образца.

Особую сложность представляет расчет продольной составляющей напряжения  $\sigma_x$ , для чего требуется решать уравнение гиперболического типа, которое имеет следующий вид [3]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v_{\text{зв}}^2 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} = \Gamma c_v \rho \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $c_v$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме;  $v_{\text{зв}}$  — продольная скорость звука;  $\rho$  — плотность;  $\Gamma$  — параметр Грюнайзена,  $T$  — температура.

Начальные и граничные условия для этого уравнения:  $\sigma_x(x, 0) = 0$ ,  $\left( \frac{\partial \sigma(x)}{\partial t} \right)_{t=0} = 0$ ,  $\sigma_x(0, t) = 0$ ,  $\sigma_x(x_{\text{конечное}}, t) = 0$

[3]. Глубину  $x_{\text{конечное}}$ , на которую распространяется волна за время облучения  $t_{\text{обл}}$ , вычисляли по глубине проникновения высокоэнергетических электронов или ионов  $h$  и скорости звука:

$$x_{\text{конечное}} = h + v_{\text{зв}} \times t_{\text{обл}}. \quad (2)$$

Вычисление глубины  $h$  производилось методами, описанными в работе [4]. Алгоритм вычисления  $h$  реализован в программе [5].

Для определения профиля температурного поля решалась одновременно с уравнением (1) задача Стефана для одномерного уравнения теплопроводности с внутренними источниками тепла [4]:

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + W(x, t), \quad (3)$$

где  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $W$  — удельная мощность энерговыделения при прохождении частиц через вещество. Вычисления функции  $W(x, t)$  и температурного поля производились с помощью разработанной компьютерной программы [5].

Решение дифференциального уравнения (1) осуществлялось численными методами на ЭВМ по двучеточной схеме [6, 7]. Частные производные замещены конечными разностями:

$$\frac{\sigma_m^{n+1} - 2\sigma_m^n + \sigma_m^{n-1}}{\tau^2} = v_{\text{зв}}^2 \frac{\sigma_{m+1}^n - 2\sigma_m^n + \sigma_{m-1}^n}{\Delta x^2} - \Gamma v_{\text{зв}}^2 \rho \frac{T_m^{n+1} - 2T_m^n + T_m^{n-1}}{\tau^2}. \quad (4)$$

Для этого строилась неявная пространственно-временная устойчивая разностная схема, в которой учтена возможность фазового перехода из твердого в жидкое состояние:

$$\frac{\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n}{\tau} = \frac{v_{3b}^2}{\Delta x} (\xi_1 (v_{m+1}^{n+1} - v_m^{n+1}) + (1 - \xi_1) (v_{m+1}^n - v_m^n)) + F_{m+1/2}^{n+1/2} \quad (5)$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} = \frac{1}{\Delta x} (\xi_2 (\sigma_m^{n+1} - \sigma_{m-1}^{n+1}) + (1 - \xi_2) (\sigma_m^n - \sigma_{m-1}^n)) \quad (6)$$

$$F(t, x) = \int_0^x \Gamma c_v \rho \frac{\partial^2 T(t, \eta)}{\partial t^2} d\eta \quad (7)$$

Здесь  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — подгоночные параметры ( $0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1$ ), которые также корректировались численным методом перебора и приближения. Схема безусловно устойчива, если  $\xi_1 \geq 0,5$  и  $\xi_2 \geq 0,5$  [6]. Вычисление интеграла (7) по пространственной координате  $\eta$  также производилось численными методами [6].

Численное решение системы линейных уравнений уравнения (5) и (6) на каждом временном слое  $\tau$  осуществлялось многократной прямой и обратной пошаговой прогонкой по пространственной координате  $x$ . Во время прямой прогонки, на каждом шаге  $m$  по координате  $x$ , прогнозировалось внутреннее напряжение  $\sigma_m^{n+1}$  и корректировался параметр  $\xi_1$ . Во время обратной прогонки прогнозировалась характеристика  $v_m^{n+1}$  и корректировался параметр  $\xi_2$ . Точность вычислений проверялась путем сгущения сетки в три раза методами, описанными в работе [7]. По численным решениям на двух сетках, при каждой прогонке, вычислялись невязки по результатам текущего и предыдущего временных шагов:

$$R = \left( -\Gamma c_v \rho \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_{nt} + \left( v_{3b}^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} \right)_{nt} \quad (8)$$

Невязки  $R^{(0)}$  и  $R^{(3)}$  вычислялись по формуле (8) методами численного дифференцирования, где  $R^{(0)}$  — невязка на сетке с мелким шагом,  $R^{(3)}$  — на сетке, шаг которой в три раза больше. Корректировка осуществлялась путем многократной прогонки по пространственной координате на каждом временном слое, невязки  $R^{(0)}$  и  $R^{(3)}$  не достигли заданной точно-

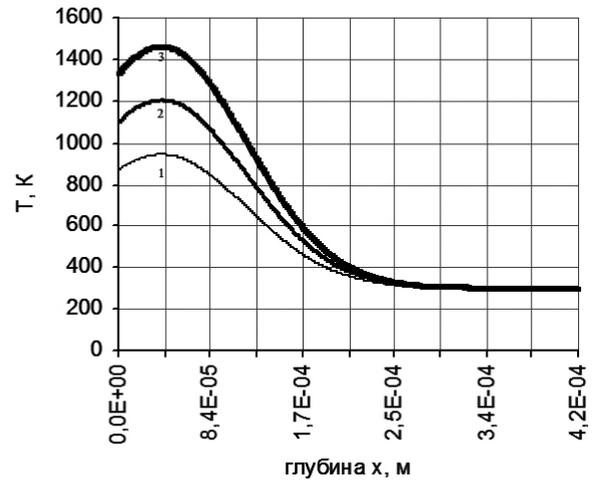


Рис. 1. Профили распределения температуры по глубине образца при воздействии пучком электронов на сталь 50X6ФМС с энергией  $E=500$  кэВ, плотностью тока  $j=0,8$  кА/см<sup>2</sup>, время импульса 1 – 100 нс; 2 – 150 нс; 3 – 200 нс.

сти. В разработанной программе погрешность расчетов составила 0,016.

Напряжения, возникающие в поперечных направлениях оси  $x$ , которые соответственно обозначены  $y$  и  $z$ , вызванные градиентом температуры вдоль оси  $x$ , вычислялись с помощью выражения [3]:

$$\sigma_z = \sigma_y = -K(x)T(x) +$$

$$+ \frac{K(x)}{h} \int_0^h T dx + \frac{3K(x) \left( x - \frac{h}{2} \right)}{h^3/4} \int_0^h T \left( x - \frac{h}{2} \right) dx, \quad (9)$$

где  $K = \frac{\alpha(x)E}{1-\mu}$ ,  $\alpha(T)$  — коэффициент теплового расширения,  $E$  — модуль Юнга,  $\mu$  — коэффициент Пуассона. Интегралы в выражении (9) находились численными методами, описанными в источнике [6].

На основе описанного алгоритма смоделировано распространение волны термоупругих напряжений, вызванных неравномерным распределением тем-

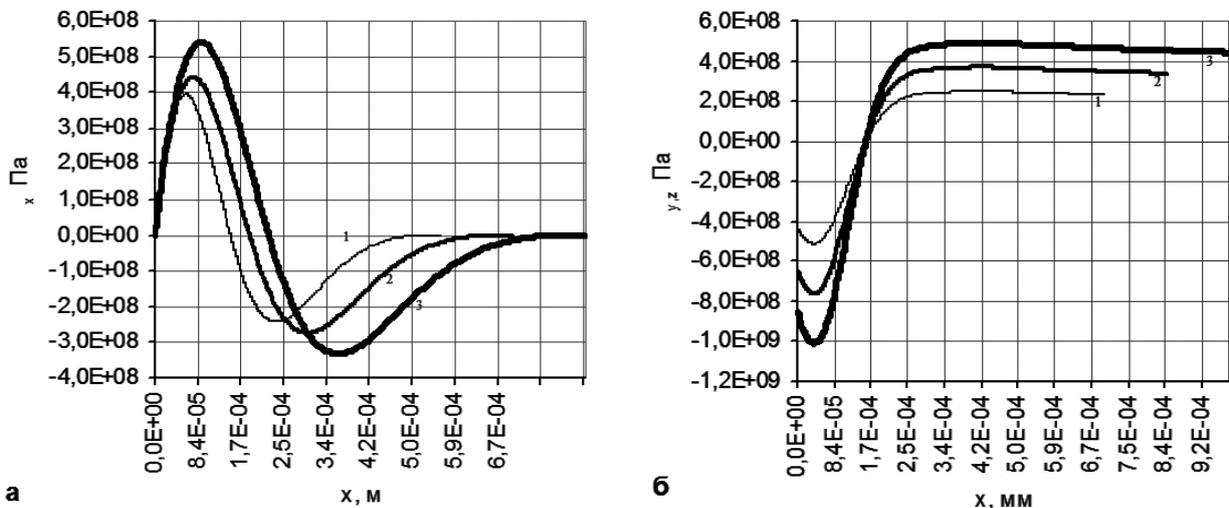


Рис. 2. Профили продольных (а) и поперечных (б) напряжений при воздействии пучком электронов на образец из стали 50X6ФМС с энергией  $E=500$  кэВ, плотностью тока  $j=0,8$  кА/см<sup>2</sup>, время импульса 1 – 100 нс; 2 – 150 нс; 3 – 200 нс

пературы по глубине образца  $x$  при интенсивном нагреве.

**Анализ полученных результатов.** Работа программы верифицирована в соответствии с результатами распределения температуры и термомеханических напряжений по глубине образца, представленными в источниках [3, 8].

С помощью разработанной программы проводились модельные расчеты температуры и напряжений в процессе радиационной обработки поверхности стали 50Х6ФМС при различных параметрах электронного пучка. Установлено, что радиационную обработку электронами с кинетической энергией 500 кэВ, целесообразно проводить при плотности тока в диапазоне  $0,6 \div 0,8$  кА/см<sup>2</sup>.

На рис. 1 представлены результаты расчетов распределения температуры (а), полученные с помощью программы [5], при воздействии на образец, легированной хромом стали 50Х6ФМС [9, 10], импульсным электронным пучком с энергией  $E = 500$  кэВ, плотностью тока  $j = 0,8$  кА/см<sup>2</sup> и длительностью импульса: 100 нс, 150 нс и 200 нс. С помощью описанного алгоритма рассчитаны распределения продольных и поперечных напряжений по глубине образца стали 50Х6ФМС при тех же параметрах пучка, и представлены на рис. 2. На представленных графиках видно, что при импульсе продолжительностью более 150 нс поперечные напряжения превышают предел прочности стали  $410 \div 470$  МПа и тем самым вызывают растрескивание поверхности образца.

Как показывают расчеты, при радиационной обработке поверхности стали электронными пучками с кинетической энергией 500 кэВ, во избежание появления трещин на поверхности, предельная плотность тока не должна превышать  $0,8$  кА/см<sup>2</sup>, а продолжительность импульса 150 нс предельной плотностью тока не должна превышать  $0,8$  кА. Также установлено, что напряжения, возникающие на поверхности образца в направлении перпендикулярном потоку электронов, превосходят напряжения, возникающие по глубине образца в  $2 \div 3$  раза.

#### Выводы

1. Разработана модель расчета температурного поля и внутренних напряжений в конструкционных сталях с покрытием.

2. Определены предельные параметры плотности тока, при которых не происходит образование сетки трещин на поверхности образца при радиационной обработке.

3. Предельные параметры при которых возникает растрескивание поверхности стали 50Х6ФМС, составляет  $0,8$  кА/см<sup>2</sup>, при длительности импульса 200 нс и энергии электронов 500 кэВ.

#### Библиографический список

1. Титов, В. В. Роль механических напряжений при легировании материалов с помощью ионных пучков / В. В. Титов. — М. : Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова, 1983. — 47 с.
2. Ткаченко, Э. А. Радиационное повреждение бериллия / Э. А. Ткаченко, Д. В. Постников // Омский научный вестник. — 2011. — № 3 (103). — С. 51–53.
3. Блейхер, Г. А. Тепломассоперенос в твердом теле под действием мощных пучков заряженных частиц / Г. А. Блейхер, В. П. Кривобоков, О. В. Пащенко. — Новосибирск : Наука, 1999. — 176 с.
4. Аброян, И. А. Физические основы электронной и ионной технологии / И. А. Аброян, А. Н. Андронов, А. И. Титов. — М. : Высшая школа, 1984. — 320 с.
5. Постников Д. В. Температурное поле при облучении бинарных сплавов заряженными частицами [Электронный ресурс] : программа / Д. В. Постников, Э. А. Ткаченко. — Электрон. дан. и прог. — М. : Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование», 2011. — Систем. требования: ПК Pentium IV или выше; Windows XP. — Загл. с экрана. № гос. регистрации 16750. — Режим доступа: <http://ofernio.ru/portal/modules/news/> (дата обращения: 08.04.2013).
6. Петров, И. Б. Лекции по вычислительной математике : учеб. пособие / И. Б. Петров, А. И. Лобанов. — М. : Интернет — Университет информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 523 с.
7. Мартыненко, С. И. Универсальная многосеточная технология для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных на структурированных сетках / С. И. Мартыненко // Вычислительные методы программирования. — 2000. — Т. 1. — С. 83–102.
8. Эффекты дальнего действия в ионно-имплантированных металлических материалах / А. Н. Диденко [и др.] — Томск : Изд-во НТЛ, 2004. — 328 с.
9. Сорокин, В. Г. Стали и сплавы. Марочник : справ. изд. / В. Г. Сорокин, М. А. Гервасьев — М. : Интернет Инжиниринг, 2001 — 608с.
10. Физические величины. Справочник / А. П. Бабичев [и др.] ; под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. — М. : Энергоатомиздат, 1991. — 1232 с.

**ТКАЧЕНКО Эдуард Александрович**, аспирант кафедры физики.

**ПОСТНИКОВ Денис Васильевич**, кандидат физико-математических наук, доцент (Россия), доцент кафедры физики.

Адрес для переписки: [dvpostnikov@omgtu.ru](mailto:dvpostnikov@omgtu.ru)

Статья поступила в редакцию 10.04.2013 г.

© Э. А. ткаченко, Д. В. Постников

## СЕЧЕНИЯ ЗАХВАТА И ДИФFUЗНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДЕРНОЙ МАТЕРИИ В СИММЕТРИЧНОЙ РЕАКЦИИ $^{30}\text{Si}+^{30}\text{Si}$

Предпринята попытка использовать функцию возбуждения реакции захвата  $^{30}\text{Si}+^{30}\text{Si}$  как источник информации о диффузности распределения ядерной материи. Для этого сечения захвата рассчитаны с помощью модели DISTODIVE. Процесс столкновения тяжёлых ионов описан стохастическими динамическими уравнениями, в которых учтены диссипация, тепловые флуктуации и эффекты памяти. Для описания диссипации использована модель поверхностного трения, в которой сила трения пропорциональна квадрату производной от ядерной части ядро-ядерного потенциала. Эта часть потенциала рассчитана с помощью модели двойной свёртки с применением МЗУ NN-сил с плотностной зависимостью и конечным радиусом обменного слагаемого. Оказалось, что функция возбуждения чувствительна как к диффузности распределения плотности, так и к динамике процесса. Значения параметров, при которых достигается согласие с экспериментом с  $\chi^2 < 3$ , не противоречат тем, которые получены ранее для других реакций.

**Ключевые слова:** слияние тяжёлых ионов, сечения захвата, модель двойной свёртки.

В работе [1] с помощью первого варианта модели DISTODIVE была сделана успешная попытка продвинуться в решении проблемы «аномально большой диффузности», которая сформулирована в работе [2]. Эта проблема состоит в том, что для согласования расчётных сечений захвата с экспериментальными требуется аномально большая диффузность Вудс-Саксоновского профиля для ядерной части ион-ионного потенциала. Расчёты, проведённые в [1], показали, что сечения захвата для сильно асимметричных реакций  $^{16}\text{O} + ^{92}\text{Zr}$ ,  $^{144}\text{Sm}$ ,  $^{208}\text{Pb}$  могут быть описаны с помощью потенциала двойной свёртки с МЗУ NN-силами. Этот потенциал, имеющий нормальную (малую) диффузность, успешно применяется для анализа данных по упругому рассеянию [3]. Обнаруженная в [2] аномально большая диффузность была следствием того, что при анализе данных игнорировался диссипативный характер столкновения ядер при энергиях выше среднего кулоновского барьера.

Модель DISTODIVE (DInucleus STOchastic DIssipatiVe Evolution) была разработана в [1] для описания столкновения сложных сферических ядер. Относительное движение сталкивающихся ионов моделируется как движение броуновской частицы в центральном поле под действием флуктуационной и диссипативной сил. Квантовые аспекты столкновения игнорируются, так что флуктуации имеют сугубо тепловой характер. Такое приближение оправданно, когда сечения захвата (слияния) превосходят примерно 100 мб.

В модели есть опция, позволяющая учитывать конечное время  $\tau_c$  корреляции случайной силы и, соответственно, запаздывающее трение. Сила трения считается пропорциональной квадрату производной от ядерной части ион-ионного потенциала (модель поверхностного трения). Эта часть потенциала рас-

считывается в рамках модели двойной свёртки с МЗУ NN-силами. Учитываются конечный радиус обменной части нуклон-нуклонного взаимодействия и его плотностная зависимость.

В настоящей работе мы анализируем экспериментальную функцию возбуждения захвата в реакции  $^{30}\text{Si} + ^{30}\text{Si}$ , измеренную в работе [4]. Мы рассчитываем, что анализ функций возбуждения в области энергий, где квантовые эффекты несущественны, позволит определить диффузность распределения материи в  $^{30}\text{Si}$ , а также амплитуду коэффициента трения и время корреляции случайной силы, которые соответствуют межцентровому расстоянию.

Ядерная часть потенциала  $U_{ndf}$ , используемого в нашей модели, вычисляется методом двойной свёртки. В роли нуклон-нуклонного эффективного взаимодействия используется МЗУ взаимодействие, в котором учтён конечный радиус обменного слагаемого и плотностная зависимость. Алгоритм вычисления подробно описан в [5, 6] (в последней работе опубликован компьютерный код для вычисления потенциала). Распределение плотности ядерной материи  $\rho_A(r)$  (мы предполагаем, что распределение нейтронов не отличается от распределения протонов) мы задаём в виде Ферми-функции, которая характеризуется радиусом половинной плотности  $R_A$  и диффузностью  $\alpha_A$ . В экспериментах по электронному рассеянию определяется среднеквадратичный зарядовый радиус  $R_{mq}$ , а затем распределение заряда в ядре аппроксимируют Ферми-функцией с параметрами  $R_q$  и  $\alpha_q$ .

Мы варьируем  $\alpha_q$  как свободный параметр, тогда  $R_q$  находится из определения  $R_{mq}$  по формуле:

$$R_q = \sqrt{\frac{3}{5}R_{mq}^2 - \frac{7\pi^2\alpha_q^2}{5}}. \quad (1)$$

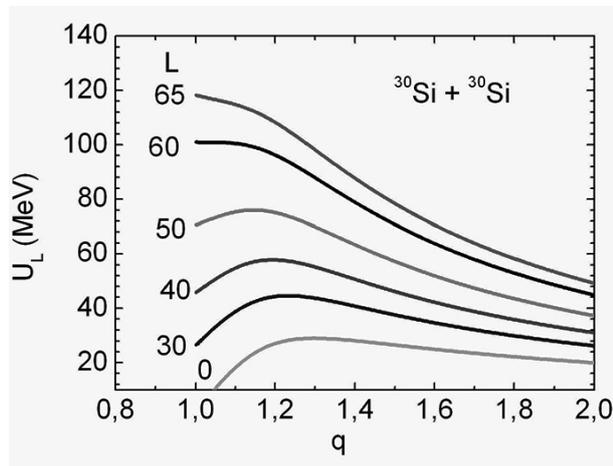


Рис. 1. Зависимость  $U_L$  от безразмерного межцентрового расстояния  $q=R/(2R_A)$  для нескольких значений  $L$  (указаны на рисунке). Расчёт сделан при  $\alpha_A=0,55$  фм

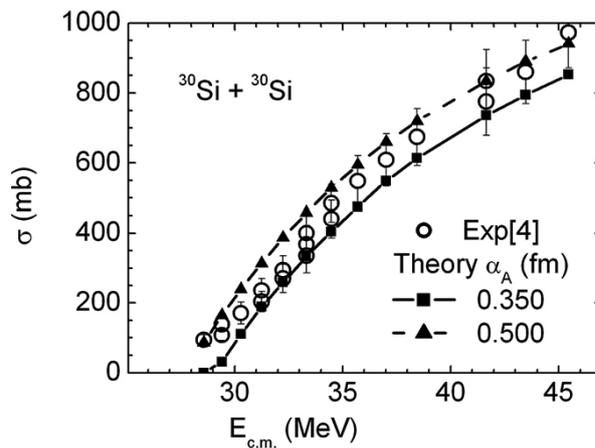


Рис. 2. Экспериментальные сечения захвата (открытые кружки с погрешностями) [4] в зависимости от энергии столкновения в системе центра масс  $E_{c.m.}$  сравниваются с нашими расчетами, в которых учтены флуктуации, но нет задержки трения (сплошные значки с линиями). Квадраты —  $\alpha_A=0,350$  фм, треугольники —  $\alpha_A=0,500$  фм,  $K_R=3,0 \cdot 10^{-2} MeV^{-1}zs$

Таблица 1

Результаты  $\chi^2$ -анализа рассчитанных функций возбуждения захвата в зависимости от свободного параметра  $\alpha_A$ .

$\alpha_A$ , фм	0,350	0,400	0,430	0,450	0,470	0,500	0,550
$R_{A'}$ , фм	3,533	3,409	3,324	3,262	3,196	3,090	2,888
$\alpha_{A'}$ , фм	0,410	0,454	0,480	0,498	0,517	0,544	0,590
$R_{B0'}$ , фм	9,17	9,31	9,36	9,41	9,43	9,49	9,61
$U_{B0'}$ , МэВ	28,99	28,48	28,23	28,05	27,89	27,6	27,13
номер	38100	38120	38181	38140	38121	38160	38180
$\chi_v^2$	5,6	2,9	1,9	1,7	2,0	3,4	9,2

Эта формула получается в первом приближении по малому параметру  $\pi^2 \alpha_q^2 R_q^{-2}$ . Далее принимается, что  $R_A=R_q$  и

$$\alpha_A^2 = \alpha_q^2 - \frac{5}{7\pi^2} \left( \langle r_{qp}^2 \rangle - \langle r_{qn}^2 \rangle \frac{N}{Z} \right). \quad (2)$$

Здесь  $\langle r_{qp}^2 \rangle = 0,76$  фм и  $\langle r_{qn}^2 \rangle = 0,11$  фм [7] представляют собой среднеквадратичные радиусы распределения заряда в протоне и нейтроне соответственно. Данные о  $R_{mq}$  взяты нами из недавнего обзора [8].

Вычисленные сечения захвата в значительной степени определяются эффективной потенциальной энергией  $U_L$ , включающей в себя центробежное слагаемое. Зависимость  $U_L$  от безразмерного межцентрового расстояния  $q=R/(2R_A)$  для нескольких значений  $L$  показана на рис. 1. Видно, как с увеличением углового момента растёт высота барьера слияния, а при  $50 < L < 60$  исчезает «карман» эффективной потенциальной энергии, который обуславливает захват ядер в орбитальное движение.

Сами сечения захвата показаны на рис. 2. Поведение экспериментальных точек (открытые кружки) примерно такое же, как и результатов нашего моделирования (сплошные значки). Расчётные кривые отличаются значениями диффузности ядерного вещества, время корреляции случайной силы нулевое, амплитуда радиального трения  $K_R=3,0 \cdot 10^{-2} MeV^{-1}zs$ .

Чтобы охарактеризовать степень согласия теории с экспериментом количественно, мы исполь-

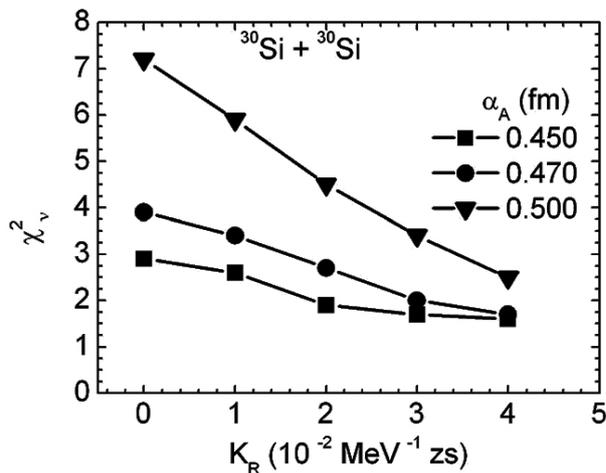


Рис. 3. Зависимость  $\chi_v^2$  от амплитуды коэффициента радиального трения  $K_R$ . Расчеты сделаны при трех значениях диффузности (указаны на рисунке)

зуем критерий Пирсона. Значения  $\chi_v^2$  в зависимости от диффузности  $\alpha_A$  собраны в табл. 1. (Среднеквадратичный зарядовый радиус  $R_{mq}=3,133$  фм [8],  $K_R=3,0 \cdot 10^{-2} MeV^{-1}zs$ . В обзоре [9]  $\alpha_q=0,553$  фм). Виден ярко выраженный минимум  $\chi_v^2$  при значениях  $\alpha_q$  между 0,480 фм и 0,517 фм. Значение  $\alpha_q=0,553$  фм из обзора [9], полученное из данных по электронному рассеянию, не попадает в этот диапазон.

В следующей серии расчётов мы варьируем амплитуду радиального трения  $K_R$  тех значений диффузности, которые обеспечивают минимальное значение  $\chi_v^2$  при  $K_R=3,0 \cdot 10^{-2} \text{MeV}^{-1} \cdot \text{zs}$ . В работе [1] было получено хорошее согласие теории с экспериментом для трёх функций возбуждения при  $K_R=2,5 \cdot 10^{-2} \text{MeV}^{-1} \cdot \text{zs}$ . Поэтому мы варьируем  $K_R$  вблизи этого значения. Результаты этих расчётов представлены на рис. 3. Видно, что сравнительно малые значения диффузности явно предпочтительнее большего ( $\alpha_A=0,500$  фм), которое обеспечивает наилучшее согласие с данными обзора [9]. Впрочем, наши «малые» значения диффузности всего на 10 % меньше большего, так что согласие и с данными по функции возбуждения захвата, и с данными по электронному рассеянию можно считать удовлетворительным.

Результаты нашей работы можно сформулировать следующим образом. С помощью модели DISTODIVE был проведён анализ функции возбуждения захвата для реакции  $^{30}\text{Si}+^{30}\text{Si}$ . Динамика процесса столкновения ядер описывается в модели стохастическими динамическими уравнениями. Для силы трения используется квадратичная зависимость от производной ядерной части ион-ионного потенциала (модель поверхностного трения). Эта часть потенциала рассчитывается с помощью модели двойной свёртки. В качестве NN-сил используется хорошо микроскопически обоснованная МЗУ версия с конечным радиусом обменного слагаемого и плотностной зависимостью. Результаты  $\chi^2$ -анализа рассчитанных функций возбуждения захвата в сравнении с данными [4] показали, что функция возбуждения чувствительна как к величине диффузности распределения плотности  $\alpha_A$ , так и к амплитуде коэффициента радиального трения  $K_R$ . Наилучшее значение  $\chi_v^2$  несколько больше единицы и достигается при значениях  $\alpha_A$  из диапазона 0,450–0,500 фм, что не слишком далеко от значения 0,510 фм из обзора [9]. Значения  $K_R$ , которые обеспечивают  $\chi_v^2 < 3$  не меньше, чем при этом  $1,0 \cdot 10^{-2} \text{MeV}^{-1} \cdot \text{zs}$ , что не противоречит результатам обзора [10] и нашей недавней работы [1].

М.В. Чушнякова благодарит фонд Д. Б. Зиминой «Династия» за финансовую поддержку.

#### Библиографический список

1. Chushnyakova M. V., Gontchar I. I. Heavy ion fusion: Possible dynamical solution of the problem of the abnormally large

diffuseness of the nucleus-nucleus potential // Phys. Rev. C. – 2013. – Vol. 87. – P. 014614.

2. Newton J. O., Butt R. D., Dasgupta M., Hinde D. J., Gontchar I. I., Morton C. R., and Hagino K. Systematic failure of the Woods-Saxon nuclear potential to describe both fusion and elastic scattering: Possible need for a new dynamical approach to fusion // Phys. Rev. C. – 2004. – Vol. 70. – P. 024605.

3. Satchler, G. R. Heavy-ion scattering and reactions near the Coulomb barrier and «threshold anomalies»/ G. R. Satchler // Phys. Rep. – 1991. – Vol. 199. – № 3. – P. 147–190.

4. Dumont H. et al. Limitation to complete fusion in the reactions  $^{12,13}\text{C}+^{48}\text{Ti}$  and  $^{30}\text{Si}+^{30}\text{Si}$  // Nucl. Phys. A. – 1985. – Vol. 435. – № 1. – P. 301–306.

5. Gontchar I. I., Dasgupta M., Hinde D. J., Newton J. O. Double folding nucleus-nucleus potential applied to heavy-ion fusion reactions // Phys. Rev. C. – 2004. – Vol. 69. – P. 024610.

6. Gontchar I. I., Chushnyakova M. V. A C-code for the double folding interaction potential of two spherical nuclei // Comput. Phys. Commun. – 2010. – Vol. 181. – № 1. – P. 168–182.

7. Satchler G. R., Love W. G. Folding model potentials from realistic interactions for heavy-ion scattering // Phys. Rep. – 1979. – Vol. 55. – № 3. – P. 183–254.

8. Angeli I. A consistent set of nuclear rms charge radii : properties of the radius surface  $R(N,Z)$  // At. Dat. Nucl. Dat. Tables. – 2004. – Vol. 87. – № 2. – P. 185–206.

9. H. de Vries, et al. Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering // At. Dat. Nucl. Dat. Tables. – 1987. – Vol. 36. – № 2. – P. 495–536.

10. Fröbrich, P. Fusion and Capture of Heavy ions above the barrier: Analysis of experimental data with the surface friction model / P. Fröbrich // Phys. Rep. – 1984. – Vol. 116. – P. 337–400.

**ЧУШНЯКОВА Мария Владимировна**, аспирантка кафедры физики и химии.

**ГОНЧАР Игорь Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор (Россия), профессор кафедры физики и химии.

**АРОНОВА Тамара Алексеевна**, кандидат физико-математических наук, доцент (Россия), доцент кафедры физики и химии.

Адрес для переписки: tamara.aronova@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 29.04.2013 г.

© М. В. Чушнякова, И. И. Гончар, Т. А. Аронова

## Книжная полка

519.2/В88

Вуколов, Э. А. Основы статистического анализа. Практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и EXCEL : учеб. пособие по специальности «Менеджмент организации» / Э. А. Вуколов. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Форум, 2012. – 462 с.

Книга является учебно-методическим пособием по теории вероятностей, статистическим методам и исследованию операций. Приведены необходимые теоретические сведения и подробно рассматривается решение задач прикладной статистики с использованием пакета STATISTICA. Излагаются основы симплекс-метода и рассматривается решение задач исследования операций средствами пакета EXCEL. Приводятся варианты заданий и методические разработки по основным разделам статистики и исследования операций.