

ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

УДК 514.185:512.7

В. Ю. ЮРКОВ

Омский государственный
педагогический университет

ЛИНЕЙЧАТЫЕ СООТВЕТСТВИЯ КАК ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ В МНОГОМЕРНОЙ ИСЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Формулируются некоторые предложения, позволяющие изучать линейчатые соответствия многомерных пространств. Приводятся, связанные с ними, формулы редукции. Описанный метод позволяет свести изучение соответствий общего вида к редукции произведений шубертовых условий инцидентности. Результаты редукции условий трактуются как свойства изучаемых соответствий. Отсутствие ограничений по размерности позволяет изучать многомерные соответствия путем сведения геометрических задач с многообразиями флагов к алгебраическим операциям с символами условий.

Ключевые слова: многообразие, соответствие, условия инцидентности, редукция условий.

Данная статья продолжает ряд работ, посвященных проблемам исчислительной многомерной геометрии [1 – 5].

Хорошо известна операция проектирования n -мерного пространства на его $(n - k)$ -мерное подпространство, представляющая собой отображение

$$Pr : P^n \setminus \{W\} \rightarrow X^{n-k},$$

осуществляемое по правилу

$$Pr : (p \in P^n \setminus \{W\}) \rightarrow (p \cup \{W\}) \cap X^{n-k},$$

где W может быть любой совокупностью из множества линейных подпространств, натянутых на $k + 1$ независимых точек пространства P^n . Кроме аналитического и конструктивного представления, это отображение может быть выражено символически через отношение инцидентности двух флагов — неполного n -мерного флага и полного k -мерного в виде

$$\left(\begin{array}{c} k, k-1, \dots, 1, \quad 0 \\ e_{n, n-1, \dots, n-k+1, 0} \end{array} \right)^{k+1}$$

или любого другого, ему эквивалентного.

Такое отображение индуцирует соответствие

$$f(W) : (\forall X^{n-k} : X^{n-k} \subset P^n, X^{n-k} \cap \{W\} = \emptyset) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall Y^{n-k} : Y^{n-k} \subset P^n, Y^{n-k} \cap \{W\} = \emptyset),$$

которое, как известно, является проективным соответствием. Многообразие $F(W) \subset P^n$ называется соединением подпространств X^{n-k} и Y^{n-k} или ассоциированным многообразием соответствия $f(W) : X^{n-k} \leftrightarrow Y^{n-k}$. Каждая k -плоскость многообразия $F(W)$ находится в некотором отношении инцидентности с элементами множества $\{W\}$ и соединяет соответственные точки подпространств X^{n-k} и Y^{n-k} . С другой стороны, подпространства X^{n-k} и Y^{n-k} являются носителями $(n-k)$ -плоских сечений многообразия $F(W)$. Здесь можно сформулировать несколько предложений, которые могут понадобиться в дальнейшем.

Предложение 1. Операция сечения многообразия $F(W)$ подпространством $X^m \subset P^n$, для которого $X^m \cap \{W\} = \emptyset$, осуществляется по правилу

$$\text{Sec} : P^k \subset F(W) \rightarrow P^{k+m-n} \subset X^m,$$

которое записывается в виде отношения инцидентности двух флагов

$$\begin{matrix} e_{a_k, a_{k-1}, \dots, a_m, \dots, a_1, a_0}^{k, k-1, \dots, m, \dots, 1, 0} \rightarrow \\ \rightarrow e_{a_k - n + m, a_{k-1} - n + m, \dots, a_{k-m+2} - n + m, a_{k-m+1} - n + m}^{k+m-n, k+m-n-1, \dots, 1} \end{matrix}$$

При этом должны выполняться два условия. Первое — равенство размерностей правой и левой частей и второе — расслоение многообразия $F(W)$ с базисным семейством подпространств $X^{k+m-n} \subset X^m$.

Общим сечением многообразия является многообразие. Тривиальными примерами являются k -плоские сечения линейных многообразий гиперплоскостей

$$\begin{matrix} e_{n, n-1, \dots, m+1, m, \dots, 1, 0}^{n-1, n-2, \dots, m+1, m, \dots, 1, 0} \rightarrow \\ \rightarrow e_{k, k-1, \dots, k-n+m+1, k-n+m, \dots, 1, 0}^{k-1, k-2, \dots, k-n+m+1, k-n+m, \dots, 1, 0} \end{matrix}$$

где $m=0, \dots, n-2$ и для каждого значения m существует несколько значений $k=n-1, \dots, n-m-1$.

Предложение 2. Над каждым многообразием $X^{k+m-n} \subset X^m$ может быть построен конус. Построение конуса осуществляется по правилу

$$\begin{matrix} e_{m, \dots}^{k+m-n, \dots, 0} \rightarrow \\ \rightarrow e_{m+a, \dots}^{k+m-n+a, \dots, 0} \cdot \left(e_{m+a, \dots, n-k+1, 0}^{k+m-n+a, \dots, 1, 0} \right)^a \end{matrix}$$

Предложение 3. Числовые характеристики общего сечения многообразия $F(W)$ равны числовым характеристикам многообразия $F(W)$.

В качестве примера можно привести гиперквадрики при $n \geq 3$

$$\left(e_{n, n-1, \dots, 3, 1}^{n-2, n-3, \dots, 1, 0} \right)^3 \left(e_{n, n-1, \dots, 3, 0}^{n-2, n-3, \dots, 1, 0} \right)^{n-3} = :$$

$$= 2e_{n-1, n-3, \dots, 1, 0}^{n-2, n-3, \dots, 1, 0}$$

В левой части уравнения приведены условия, а в правой — результат их редукции. Коэффициент в правой части свидетельствует, что полученные многообразия есть гиперквадрики. Их k -мерными сечениями будут многообразия

$$2e_{k-1, k-3, \dots, 1, 0}^{k-2, k-3, \dots, 1, 0}$$

Известно утверждение: линейный комплекс прямых может быть вложен в линейный пучок плоскостей. Оно справедливо для трёхмерного пространства, но обобщается и на n -мерные пространства

Предложение 4. Линейное $(n+k-1)$ -мерное многообразие прямых может быть вложено в линейное $(n-k-1)$ -мерное многообразие гиперплоскостей.

Такое вложение осуществляется по правилу

$$e_{n, k}^{1, 0} \rightarrow e_{n, \dots, k+1, k, \dots, 0}^{n-1, \dots, k+1, k, \dots, 0}$$

где $1 \leq k \leq n-2$.

Размерность многообразия прямых есть

$$2(n-1) - [2(n-1) + 1 - n - k] = n + k - 1.$$

Размерность многообразия гиперплоскостей равна

$$n + (n-1 + \dots + k + 1) - (n + \dots + k + 2) = n - k - 1.$$

Очевидно, что каждая прямая такого многообразия пересекает k -плоскость в точке. Предположим, что выбрана одна из точек k -плоскости. Тогда можно выбрать только $n-k-1$ независимых прямых, инцидентных этой точке, но не лежащих в k -плоскости, которые вместе с k прямыми, инцидентными этой же точке, но лежащими в k -плоскости, образуют базис гиперплоскости, инцидентной данной k -плоскости. Выбор ещё одной прямой, инцидентной этой же точке, дополнительной к уже выбранным прямым и независимой от них, образует базис пространства. Поэтому невозможно выбрать больше чем $n-k-1$ независимых прямых, инцидентных одной точке. Замена любой из выбранных прямых на другую влечет изменение гиперплоскости, сохраняя её инцидентность данной k -плоскости и данному многообразию.

Другими словами, в пространстве не найдётся ни одной такой прямой, которая пересекала бы данную k -плоскость и при этом не принадлежала бы никакой гиперплоскости указанного многообразия.

Следующим шагом на пути обобщения может быть такой.

Предложение 5. Линейное $(2n+k-4)$ -мерное многообразие 2-плоскостей может быть вложено в линейное $(n-k-1)$ -мерное многообразие гиперплоскостей.

Такое вложение осуществляется по правилу

$$e_{n, n-1, k}^{2, 1, 0} \rightarrow e_{n, \dots, k+2, k, \dots, 0}^{n-1, \dots, k+1, k, \dots, 0}$$

где $1 \leq k \leq n-4$.

В самом общем случае пусть m -плоскость и k -плоскость пересекаются по g -плоскости. Тогда может быть доказано предложение.

Предложение 6. Линейное $[(n - m)(m - r) + (r + 1)(k - r)]$ -мерное многообразие m -плоскостей может быть вложено в пучок гиперплоскостей.

Размерность линейного многообразия m -плоскостей определяется как разность размерности грасманова многообразия m -плоскостей и размерности условия пересечения с k -плоскостью по r -плоскости:

$$(m + 1)(n - m) - (r + 1)(n - m - k + r) = (n - m)(m - r) + (r + 1)(k - r).$$

Такое вложение осуществляется по правилу

$$e_{n, m, m-1, \dots, r+1, r, r-1, \dots, 1, 0} \rightarrow e_{n, n-1, \dots, n-m+r+1, k, k-1, \dots, k-r+1, k-r}$$

$$\rightarrow e_{n, k+m-r, k+m-r-1, \dots, k+1, k, k-1, \dots, 0}$$

Учитывая все сформулированные предложения, попробуем применить их к изучению некоторых свойств проективных соответствий в многомерных пространствах.

Вернёмся к проективному соответствию $f(W)$ в его двумерном варианте $f(W): X^2 \leftrightarrow Y^2$, но индуцированному множеством W в n -мерном пространстве при условии, что $(X^2, Y^2) \subset P^n, X^2 \cap Y^2 = \emptyset, X^2 \cap \{W\} = \emptyset, Y^2 \cap \{W\} = \emptyset$. Кроме этого, будем рассматривать X^2 и Y^2 как линейчатые многообразия. Тогда очевидно, что

$$W = \left(e_{n, n-1, n-2, \dots, 1, 0}^{n-2} \right).$$

Теперь можно легко определить некоторые свойства соответствия.

1. Соответствие является взаимно однозначным. То есть общей прямой, выбранной в X^2 , соответствует единственная прямая в Y^2 и наоборот. При этом нас не должно смущать то обстоятельство, что прямая фактически выбирается в P^n , так как условия $X^2 \cap \{W\} = \emptyset, Y^2 \cap \{W\} = \emptyset$ позволяют сначала выбрать прямую, а потом провести инцидентную ей плоскость X^2 . Доказательством является редукция условий

$$e_{n, n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0} \cdot W = e_{n, n-1, n-2, \dots, 1, 0}.$$

Выбор Y^2 означает двумерное сечение гиперплоскости, полученной в результате редукции. Сечением является прямая $e_{n, 1, 0}$.

2. Соответствие является линейным. Во-первых, общему пучку прямых, выбранному в X^2 , соответствует единственный пучок прямых в Y^2 и наоборот. Аналогично предыдущему пучок фактически выбирается в P^n , но выбор пучка означает выбор плоскости X^2 . Доказательством является редукция условий

$$e_{n, n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0} \cdot W = e_{n, n-2, \dots, 1, 0}.$$

Выбор Y^2 означает двумерное сечение пучка гиперплоскостей, полученного в результате редукции. Сечением является пучок прямых $e_{n, 1, 0}^{2, 0}$.

Во-вторых, общему полю прямых, выбранному в X^2 , соответствует единственное: пучок прямых в Y^2

и наоборот. Опять, аналогично предыдущему, поле прямых фактически выбирается в P^n , но выбор поля прямых означает выбор плоскости X^2 . Доказательством является редукция условий

$$e_{n, n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0} \cdot W = e_{n, n-1, n-3, \dots, 1, 0}.$$

Выбор Y^2 означает двумерное сечение многообразия гиперплоскостей, полученного в результате редукции. Сечением является поле прямых $e_{n, 1, 0}^{2, 1}$.

3. Соответствие имеет три слабоинвариантные прямые. Строгого доказательства этого утверждения не приводим, но некоторые основные идеи должны быть упомянуты. Во-первых, инвариантная система должна определяться не сама по себе, а относительно некоторого другого соответствия, которое условно можно назвать совмещающим соответствием. Очевидно, что вводить в рассмотрение совмещающее соответствие более сложное, чем проективное, нет смысла. Пусть таким соответствием будет соответствие $g(V): X^2 \leftrightarrow Y^2, V \neq W, \{V\} \cong \{W\}, \{V\} \cap \{W\} = \emptyset$. Свойства изучаемых соответствий будут определяться с точностью до проективных соответствий.

Предложение 7. Число простых слабоинвариантных прямых соответствия $f(V): X^2 \leftrightarrow Y^2$ равно числу 3-плоскостей, общих для многообразий $F(W)$ и $G(W)$, которые сами рассматриваются как многообразия 3-плоскостей.

То есть

$$\left(e_{n, n-1, n-3, n-4}^{3, 2, 1, 0} \right)^2 \left(e_{n, n-1, 2, 1}^{3, 2, 1, 0} \right)^2 = 3e_{n, n-1, 2, 1}^{3, 2, 1, 0}.$$

Доказательство этого предложения, как и предыдущих, опускаем за неимением места. Однако следует упомянуть, что последнее предложение будет верно при $n > 4$, то есть при условии отсутствия естественных пересечений X^2 и Y^2 . Например, при $n = 3$ расчет будет давать только одну инвариантную (сильно инвариантную) прямую — прямую пересечения X^2 и Y^2 . Кроме неё будет существовать пучок слабоинвариантных прямых.

Сформулированные предложения и пример рассмотренного проективного соответствия позволяют утверждать, что предложенный метод даст возможность изучить свойства соответствий высшего порядка.

Библиографический список

1. Юрков, В. Ю. Некоторые принципы построения и исследования множеств проекционных систем в многомерных проективных пространствах / В. Ю. Юрков // Прикладная геометрия [Электронный ресурс]. — 2000. — Вып. 2. — № 3. — Режим доступа: <http://www.mai.ru/~apq> (дата обращения: 17.01.2014).
2. Юрков, В. Ю. Исчислительно-геометрическая интерпретация рациональных и бирациональных отображений / В. Ю. Юрков // Омский научный вестник. — 2002. — Вып. 18, март. — С. 84–86.
3. Волков, В. Я. Бирациональные отображения и исчисление Шуберта / В. Я. Волков, В. Ю. Юрков // Математика и информатика: наука и образование. — 2003. — Вып. 3. — С. 9–13.

4. Юрков, В. Ю. Исчислительная интерпретация принципа Шаля и рациональные соответствия / В. Ю. Юрков // Прикладная геометрия [Электронный ресурс]. 2004. — Вып. 6. — № 13 (2004). — С. 1–17. — Режим доступа: <http://apg.mai.ru/> (дата обращения: 17.01.2014).

5. Волков В. Я. Многомерная исчислительная геометрия : моногр. / В. Я. Волков, В. Ю. Юрков. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2008. — 244 с.

ЮРКОВ Виктор Юрьевич, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной информатики и математики.

Адрес для переписки: viktor_yurkov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 20.01.2014 г.

© В. Ю. Юрков

УДК 514.18

В. Ю. ЮРКОВ

Омский государственный
педагогический университет

СТРУКТУРИЗАЦИЯ ВИЗУАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МНОГОМЕРНЫХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Настоящая работа посвящена проблеме построения визуальных моделей многомерных евклидовых пространств. Рассматриваются модели различной структуры, являющиеся обобщением известных визуальных моделей — чертежа Монжа и чертежа Радищева. Показано, что основными структурными компонентами являются аффинные соответствия общего вида.

Ключевые слова: многомерные пространства, визуальные модели, соответствия.

В настоящее время существуют, развиваются и взаимно дополняют друг друга 2D и 3D компьютерные технологии обработки визуальной информации, а также 2D и 3D компьютерные модели и технологии моделирования. В связи с некоторой терминологической неоднозначностью, прослеживающейся в различных статьях и книгах, определимся с основными понятиями, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Под **технологией** будем понимать совокупность теоретических основ, методов и алгоритмов продуцирования, преобразования, обработки, хранения и передачи информации об объекте. Если речь идет о визуальной информации, то технология будет называться, соответственно, визуальной технологией или технологией визуализации информации. Следует различать следующие визуальные технологии:

— ручные, то есть технологии построения графических моделей объектов, использующие материальные носители информации, инструменты, визуальные языки и интеллектуальные средства (базы знаний) модельера;

— компьютерные — технологии построения виртуальных графических моделей объектов, использующие интерактивные виртуальные 2D и 3D среды;

— информационные — технологии построения виртуальных моделей классов объектов, использующие возможности хранения, актуализации, сопоставления и использования для решения различных задач с объектами данных классов разной размерности;

— интеллектуальные — технологии, использующие математические методы анализа свойств, присутствующих классам объектов, методы выявления и использования закономерностей данных классов, методы оптимизации при построении виртуальных моделей данного класса.

Под **моделированием** будем понимать процесс разработки теоретических основ, методов и алгоритмов генерации совокупности объектов, более простых по сравнению с оригиналом, но сохраняющих в определенной степени те свойства оригинала, которые интересуют модельера в связи с конкретной решаемой задачей. Поскольку речь идет о визуализации, то есть о переводе объекта в визуальную форму, то можно утверждать, что в основе визуального моделирования всегда лежат совокупности геометрических образов, их преобразований и отношений между ними.

Существует виртуальное и реальное моделирование. Реальное моделирование ограничено по размерности и реализуется в пространстве, размерность которого не превышает трех. Так, реальное визуальное 2D моделирование есть просто процесс построения изображения или переход к условно-схематическим образам, подчиняющимся основным аксиомам геометрии плоскости или другого двумерного пространства. Реальное визуальное 3D моделирование есть процесс построения действующей модели или макета, сохраняющего пространственные, структурные, функциональные и другие свойства оригинала. Виртуальное моделирование теоретически не имеет ограничений по размерности, то есть можно утверждать существование виртуального nD моделирования. Но в своем визуально адаптированном варианте оно, к сожалению, всегда ограничено двумерным информационным пространством.

Таким образом, задача построения интеллектуальной визуальной модели многомерного пространства является на сегодняшний день актуальной и может быть сформулирована в теоретико-множественном представлении как задача построения множества отображений:

$$f: R_n \rightarrow W_n \rightarrow W_3 \rightarrow V_2(W_3),$$

$$f: R_n \rightarrow W_n \rightarrow W_2 \rightarrow V_2(W_2),$$

где R_n — многомерное пространство, как правило, неструктурированное, но содержащее всю доступную информацию об оригинале; W_n — виртуальная, структурированная, n -мерная, информационная, компьютерная модель пространства параметров оригинала; V_2 — интеллектуальная визуальная двумерная модель пространства оригинала; $W_2(W_3)$ — виртуальная структурированная компьютерная двумерная (трехмерная) модель оригинала.

В общем случае задачу структуризации визуальной 2D модели виртуального n -мерного евклидова пространства будем рассматривать как задачу объединения и комбинирования слоев:

$$V_2(W_2) = \cup_m (x_i, x_j); \quad i \neq j; \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n;$$

$$m = C_n^2.$$

Легко можно доказать, что любой 0-мерный объект $P_0(x_1, \dots, x_n)$ имеет образ в V_2 :

$$v: P_0 \leftrightarrow \cup_m P_{0, i, j} (x_i, x_j)$$

и обратно. То есть отображение $R_n \rightarrow V_2$ однозначно в каждом слое и обратимо в целом. Аналитически отображение v реализуется по правилу:

$$v: (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \rightarrow$$

$$\rightarrow (0, \dots, 0, x_i, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0).$$

Для $V_2(W_3)$ имеем аналогичную структуру:

$$W_3 = \cup_m (x_i, x_j, x_k); \quad i \neq j \neq k; \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n;$$

$$k = 1, \dots, n; \quad m = C_n^3.$$

Тогда

$$V_2(W_3) = \cup_m (x_i, x_j, x_k)_{s, i}; \quad s = t; \quad s = 1, \dots, m; \quad t = 1, \dots, m.$$

Алгоритм такого отображения реализуется по правилу

$$1) (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n) \rightarrow (0, \dots, 0, x_i, \dots, 0, x_j,$$

$$0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0);$$

$$2) [y_{1, m}, y_{2, m}, 0, 1] = [x_i, x_j, x_k] \cdot A \cdot B \cdot C \cdot D.$$

Здесь $y_{1, m}, y_{2, m}$ — координаты точки m -го слоя визуальной модели; A, B, C, D — матрицы параллельного переноса, поворота вокруг оси x_i , поворота вокруг оси x_j , перспективного преобразования (в общем случае). Отсутствие матрицы D приводит к аксонометрическим моделям.

Однако следует учитывать то обстоятельство, что выбор алгоритма визуализации 0-мерного объекта в качестве основной структурной компоненты приводит к визуализации не k -мерного подпространства, $0 < k < n$, а к визуализации множества $k + 1$ независимых точек n -мерного пространства. К этому необходимо добавить проверку условия независимости точек этого множества и алгоритм построения любого числа точек определённого таким способом k -мерного подпространства [1, 2].

Рассматривая отображения $E_n \rightarrow V_2(W_3)$ и $E_n \rightarrow V_2(W_2)$ можно заметить иной подход к структуризации визуальных моделей. Сформулируем этот подход в виде теоремы.

Теорема. Основными структурными компонентами визуальных моделей пространства E_n , порожен-

ных отображениями $E_n \rightarrow V_2(W_3)$ или $E_n \rightarrow V_2(W_2)$, являются аффинные отображения $A_{3, (i, j)}: W_{3, i} \leftrightarrow W_{3, j}$ или $A_{2, (i, j)}: W_{2, i} \leftrightarrow W_{2, j}$.

Действительно, отображение $E_2 \rightarrow W_{2, i}$ есть проекция. Проецирующим многообразием является двумерное множество $(n - 2)$ -плоскостей. Центром проецирования является бесконечно удаленная $(n - 3)$ -плоскость. Одним из свойств такого отображения является инвариантность простого отношения. Кроме того, для $n > 3$ пересечение E_2 и $W_{2, i}$ или пусто, или 0-мерно. Следовательно, отображение $W_{2, i} \leftrightarrow W_{2, j}$ есть аффинитет общего вида. Поскольку E_1 можно заключить в E_2 , то отображение $W_{1, i} \leftrightarrow W_{1, j}$ тоже является аффинитетом. Подпространства E_k можно рассматривать как линейные многообразия подпространств E_2 . Следовательно, отображения $W_{k, i} \leftrightarrow W_{k, j}$ есть линейные множества аффинных соответствий, то есть тоже аффинитеты.

Аналогичные рассуждения справедливы и для $E_3 \rightarrow W_{3, i}$.

Следствие 1. Подпространства $E_0, E_1 (E_2)$ моделируются своими проекциями, связанными сужением отображения $A_2 (A_3)$.

Модель пространства E_0 , полученная по схеме $E_n \rightarrow V_2(W_3)$ или $E_n \rightarrow V_2(W_2)$, представляет собой множество $E_0 = \{E_{0, i, j, k} (x_i, x_j, x_k), i \neq j \neq k, 1 \leq i, j, k \leq n\}$ или множество $E_0 = \{E_{0, i, j} (x_i, x_j), i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$. Модель пространства E_1 представляет собой множество

$$E_1 = \{E_{1, i, j, k} (x_i, x_j, x_k), i \neq j \neq k, 1 \leq i, j, k \leq n \mid$$

$$x_j = f_j(x_i), x_k = f_k(x_i)\}$$

или

$$E_1 = \{E_{1, i, j} (x_i, x_j), i \neq j, 1 \leq i, j \leq n \mid x_j = f_j(x_i)\}.$$

Модель пространства E_2 , полученная по схеме $E_n \rightarrow V_2(W_3)$, представляет собой множество

$$E_2 = \{E_{2, i, j, k} (x_i, x_j, x_k), i \neq j \neq k, 1 \leq i, j, k \leq n \mid$$

$$x_k = f_k(x_i, x_j)\}.$$

Следствие 2. Подпространства $E_3 (E_4), \dots, E_{n-1}$ моделируются, соответственно, одномерными, двумерными, ..., $(n - 1)$ -мерными множествами отображений $A_2 (A_3)$.

В качестве примера приведем структуризацию $V_2(W_2)$ (табл. 1) и $V_2(W_3)$ (табл. 2) моделей виртуального четырехмерного пространства.

В табл. 1 символом (x_i, x_j) обозначается слой модели, символом $A_{i, j}^k$ обозначено аффинное соответствие слоев (x_k, x_j) и (x_i, x_k) , имеющими общую ось x_k , символом $S_{i, j}$ обозначена симметрия слоёв относительно биссектрисы координатных осей, символом $A_{1,2,3,4}$ обозначено аффинное соответствие слоев, не имеющими общих осей, например слоёв (x_1, x_2) и (x_3, x_4) . Рамочками выделены известные чертежи Монжа и Радищева. В табл. 2 приняты такие же обозначения. Рамочкой выделен известный чертеж Навумович.

Для шестимерного пространства имеем следующие отображения:

$$E_6 \rightarrow V_2(W_3) \text{ и } E_6 \rightarrow V_2(W_2):$$

$$V_2(W_2) = \{(x_1 \times x_2) \leftrightarrow (x_1 \times x_3) \leftrightarrow (x_1 \times x_4) \leftrightarrow (x_1 \times x_5) \leftrightarrow$$

$$(x_1 \times x_6) \cup (x_2 \times x_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (x_2 \times x_6) \cup \dots \cup (x_1 \times x_2)$$

$$\leftrightarrow (x_3 \times x_4) \leftrightarrow (x_5 \times x_6) \cup \dots\},$$

$$V_2(W_3) = \{(x_1 \times x_2 \times x_3) \leftrightarrow (x_4 \times x_5 \times x_6) \cup \dots\}.$$

Таблица 1

		(x_1, x_2)	$A_{2,3}^1$	(x_1, x_3)	$A_{3,4}^1$	(x_1, x_4)
	$S_{1,2}$		$A_{1,3}^2$	$A_{1,2}^3$	$A_{1,2,3,4}$	$A_{1,2}^4$
(x_2, x_1)		$S_{1,3}, A_{1,3}^2$		(x_2, x_3) $A_{1,2,3,4}$	$A_{3,4}^2$	(x_2, x_4)
$A_{2,3}^1$	$A_{1,3}^2$		$S_{2,3}, S_{1,4}$		$A_{2,4}^3$	$A_{2,3}^4$
(x_3, x_1)	$A_{1,2}^3$	(x_3, x_2) $A_{1,2,3,4}$		$S_{2,4}, A_{2,4}^3$		(x_3, x_4)
$A_{3,4}^1$	$A_{1,2,3,4}$	$A_{3,4}^2$	$A_{2,4}^3$		$S_{3,4}$	
(x_4, x_1)	$A_{1,2}^4$	(x_4, x_2)	$A_{2,3}^4$	(x_4, x_3)		

Таблица 2

		(x_1, x_2, x_3)	$A_{3,4}^{1,2}$	(x_1, x_2, x_4)
	$S_{2,3}$		$A_{2,4}^{1,3}$	$A_{2,3}^{1,4}$
(x_1, x_3, x_2)		$S_{2,4}$		(x_1, x_3, x_4)
$A_{4,3}^{1,2}$	$A_{4,2}^{1,3}$		$S_{3,4}$	
(x_1, x_4, x_2)	$A_{3,2}^{1,4}$	(x_1, x_4, x_3)		

Отображение $E_6 \rightarrow V_2(W_2)$ приводит к шести вариантам хорошо известной многомерной начертательной геометрии модели Радищева. Теоретическое обоснование отображения $E_6 \rightarrow V_2(W_3)$ встречалось только в специальной литературе. Промежуточные модели, отличающиеся от указанных только перестановкой переменных, ничего принципиально нового не вносят. Выбор конкретного варианта отображения зависит от многих критериев, является задачей построения оптимальной модели и в настоящей статье не обсуждается.

Рассмотрим один из вариантов отображения $E_6 \rightarrow V_2(W_2)$, например $(x_1 \times x_2) \leftrightarrow (x_1 \times x_3) \leftrightarrow (x_1 \times x_4) \leftrightarrow (x_1 \times x_5) \leftrightarrow (x_1 \times x_6)$. Тогда моделью 0-плоскости является множество $\{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_1, x_6)\}$, моделью 1-плоскости — множество $\{x_2 = f_2(x_1), x_3 = f_3(x_1), x_4 = f_4(x_1), x_5 = f_5(x_1), x_6 = f_6(x_1)\}$, где $f_i = a_{1,i}x_1 + a_{2,i}$. Моделью 2-плоскости, 3-плоскости и 4-плоскости являются:

$$x_i = a_{1,i}x_1 + a_{2,i}x_2 + a_{3,i}, \quad i = 3, \dots, 6,$$

$$x_i = a_{1,i}x_1 + a_{2,i}x_2 + a_{3,i}x_3 + a_{4,i}, \quad i = 4, \dots, 6,$$

$$x_i = a_{1,i}x_1 + a_{2,i}x_2 + a_{3,i}x_3 + a_{4,i}x_4 + a_{5,i}, \quad i = 5, \dots, 6.$$

Моделью гиперплоскости является

$$x_6 = a_{1,i}x_1 + a_{2,i}x_2 + a_{3,i}x_3 + a_{4,i}x_4 + a_{5,i}x_5 + a_{6,i}.$$

Один из вариантов отображения $E_6 \rightarrow V_2(W_3)$, например $(x_1 \times x_2 \times x_3) \leftrightarrow (x_4 \times x_5 \times x_6)$, приводит к следующим результатам. Моделью 0-плоскости является множество $\{(x_1, x_2, x_3), (x_4, x_5, x_6)\}$, моделью 1-плоскости — множество $\{x_2 = f_2(x_1), x_3 = f_3(x_1), x_5 = f_5(x_4), x_6 = f_6(x_4)\}$ с условием $x_4 = f_4(x_1)$. Моделью 2-плоскости являются:

$$x_3 = a_{1,3}x_1 + a_{2,3}x_2 + a_{3,3}, \quad x_6 = a_{1,6}x_4 + a_{2,6}x_5 + a_{3,6},$$

с условиями

$$x_4 = a_{1,4}x_1 + a_{2,4}x_2 + a_{3,4}, \quad x_5 = a_{1,5}x_1 + a_{2,5}x_2 + a_{3,5}.$$

Моделью 3-плоскости являются:

$$x_i = a_{1,i}x_1 + a_{2,i}x_2 + a_{3,i}x_3 + a_{4,i}, \quad i = 4, \dots, 6.$$

Модель 4-плоскости:

$$x_i = a_{1,i}x_1 + a_{2,i}x_2 + a_{3,i}x_3 + a_{4,i}x_4 + a_{5,i}, \quad i = 5, \dots, 6.$$

Моделью гиперплоскости является

$$x_6 = a_{1,i}x_1 + a_{2,i}x_2 + a_{3,i}x_3 + a_{4,i}x_4 + a_{5,i}x_5 + a_{6,i}.$$

Отношения инцидентности шестимерного пространства соответствующим образом интерпретируются на моделях, что можно легко проверить.

Вычислительной основой, поддерживающей структуру визуальных моделей, являются алгоритмы решения систем линейных уравнений. Например, задача визуализации точки пересечения двух 3-плоскостей в модели $E_6 \rightarrow V_2(W_2)$ или в $E_6 \rightarrow V_2(W_3)$ решается следующим образом. Система уравнений

$$x_i = a_{1,i}x_1 + a_{2,i}x_2 + a_{3,i}x_3 + a_{4,i}, \quad i = 4, \dots, 6,$$

$$x_i = b_{1,i}x_1 + b_{2,i}x_2 + b_{3,i}x_3 + b_{4,i}, \quad i = 4, \dots, 6$$

имеет единственное решение (x_1, x_2, x_3) при условии, что данные 3-плоскости независимы. Затем определяются x_4, x_5, x_6 .

Задача визуализации точки пересечения 2-плоскости и 4-плоскости в модели $E_6 \rightarrow V_2(W_3)$ решается следующим образом. Имеем систему

$$x_3 = a_{1,3}x_1 + a_{2,3}x_2 + a_{3,3},$$

$$x_6 = a_{1,6}x_4 + a_{2,6}x_5 + a_{3,6},$$

$$x_i = a_{1,i}x_1 + a_{2,i}x_2 + a_{3,i}x_3 + a_{4,i}x_4 + a_{5,i}, \quad i = 5, \dots, 6$$

с условиями

$$x_4 = a_{1,4}x_1 + a_{2,4}x_2 + a_{3,4}, \quad x_5 = a_{1,5}x_1 + a_{2,5}x_2 + a_{3,5}.$$

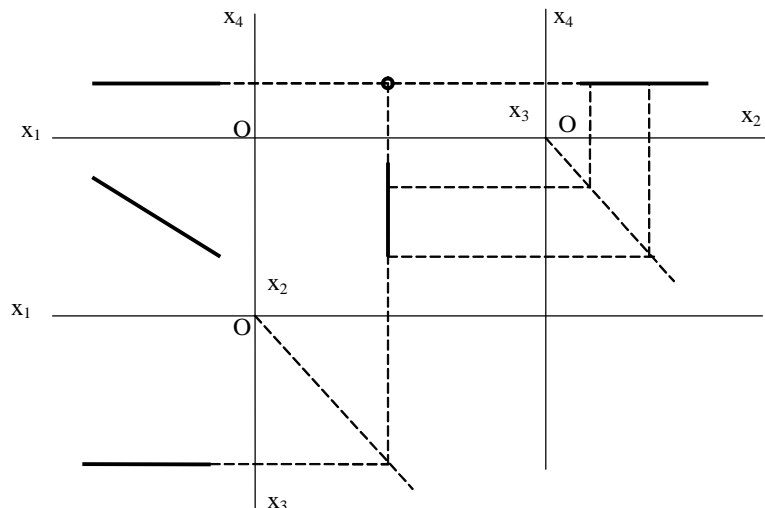


Рис. 1. Визуальная модель $V_2(W_2)$ прямой, параллельной плоскости Ox_1x_2 пространства E_4

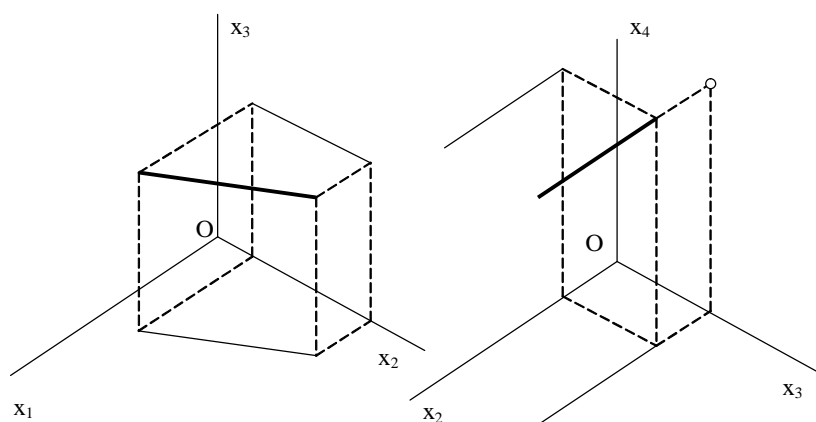


Рис. 2. Визуальная модель $V_2(W_3)$ прямой, параллельной плоскости Ox_1x_2 пространства E_4

Если уравнения независимы, то получается единственное решение (x_1, x_2) , а затем вычисляются значения остальных четырех переменных. Аналогично решаются задачи визуализации остальных линейных подпространств. Например, полная визуальная модель $V_2(W_2)$ прямой, параллельной плоскости Ox_1x_2 пространства E_4 , содержит шесть слоев и выглядит следующим образом (рис. 1). При этом упорядочение слоев может быть иным, удобным пользователю. Неполная визуальная модель может содержать только два слоя и быть при этом обратной. Неполная визуальная модель $V_2(W_3)$ такой же прямой выглядит следующим образом (рис. 2). Переход от слоя к слою выполняется по команде пользователя.

Таким образом, можно сделать следующие **выводы**:

— предложенный метод позволяет автоматически решать задачи визуализации линейных подпространств многомерного пространства;

— линейные позиционные задачи многомерного пространства решаются автоматически с последующей визуализацией результата;

— имеется возможность выбора оптимальной (наиболее удобной) структуры визуальной модели многомерного пространства.

Библиографический список

1. Иванов, Г. С. О перспективах начертательной геометрии как учебной дисциплины / Г. С. Иванов // Геометрия и графика. — 2011. — Вып. 1. — С. 36–39.
2. Курс начертательной геометрии на основе геометрического моделирования : учебник / В. Я. Волков [и др.]. — Омск : Изд-во СибАДИ, 2010. — 253 с.

ЮРКОВ Виктор Юрьевич, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной информатики и математики.

Адрес для переписки: viktor_yurkov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 20.01.2014 г.

© В. Ю. Юрков