

ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

УДК 004.9:621.9.07:621.833

А. А. ЛЯШКОВ

Омский государственный
технический университет

ОТОБРАЖЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПРОЕКЦИРОВАНИЕМ ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

В работе приводится исследование отображения ортогональным проектированием поверхности, заданной параметрическими уравнениями, на координатную плоскость. Устанавливаются необходимые и достаточные условия существования контурной линии и ее очерка. Определены необходимые и достаточные условия существования условных экстремумов на кривых, получаемых в пересечении заданной поверхности плоскостями, параллельными координатным, содержащим ось ортогонального проектирования. Эти результаты используются для расчета точек контура и очерка поверхности численными методами, не требующими использования дифференциальных характеристик поверхности.

Ключевые слова: контурная линия поверхности, очерк поверхности, линия складки, точка сборки.

Введение

Вопросам исследования отображения ортогональным проектированием поверхности на плоскость посвящено значительное количество работ [1–6] и другие. Так, в работе [3] предлагается определять точки контурной линии по уравнениям поверхности, заданным в неявной форме, и уравнениям, содержащим дифференциальные характеристики этой по-

верхности. Для расчета предлагается использовать методы вычислительной математики и методы нелинейного программирования. Что является не простой задачей. Анализа контурной линии и ее проекции не приводится.

Исследованию особенностей отображения алгебраических поверхностей, в том числе и ортогональным проектированием, посвящены работы [1, 5, 6] и другие.

В работе [2] приведены некоторые дифференциальные характеристики контурной линии и очерка алгебраической поверхности, заданной уравнением в неявном виде. Анализа дифференциальных характеристик поверхности в точках контурной линии не приводится.

В настоящей работе приводится исследование отображения ортогональным проецированием поверхности, заданной параметрическими уравнениями, на координатную плоскость. Определяется кривизна поверхности в точках ее контурной линии.

Дифференциальные параметры контурной линии

Пусть исследуемая поверхность задана параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= f_1(u, v), \\ y &= f_2(u, v), \\ z &= f_3(u, v). \end{aligned} \quad (1)$$

Или в векторной форме

$$\mathbf{r}(u, v) = 0. \quad (2)$$

Будем рассматривать отображение такой поверхности ортогональным проецированием на координатную плоскость xu . Это отображение в начертательной геометрии принято называть очерком, а в работе [2] — дискриминантным множеством функции (1). Соответствующую ей линию на поверхности — контурной линией поверхности относительно рассматриваемой плоскости. В точках контурной линии касательные плоскости к поверхности параллельны координатной оси z , что записывается в виде

$$\begin{vmatrix} f_{1u} & f_{2u} \\ f_{1v} & f_{2v} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

или

$$F(u, v) = f_{1u} \cdot f_{2v} - f_{2u} \cdot f_{1v} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (3) или (4) устанавливает связь параметров u , v и совместно с уравнениями (1) определяют контурную линию поверхности. Эти уравнения можно рассматривать как уравнения в криволинейных координатах u и v некоторой кривой λ , принадлежащей параметрической области $F(u, v)$. Тогда контурная линия λ' получается отображением кривой λ на поверхность (1), т. е. $(\lambda \subset F) \subset R^2 \xrightarrow{F} \lambda' \subset \Phi \subset R^3$, где F задается уравнениями (1).

Исследованию подлежат контурная линия поверхности, ее очерк, а также сечения этой поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям xz и yz .

Если $F_u(u, v) \neq 0$, и в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) функция (3) имеет непрерывные частные производные первого порядка по x , y , z , то уравнение $F(u, v) = 0$ разрешимо в виде функции

$$u = f(v). \quad (5)$$

Подставив (5) в (3), получим тождество $F[f(v), v] = 0$. Из которого следует

$$F_v + F_u \cdot f_v = 0 \quad \text{или} \quad f_v = -\frac{F_v}{F_u}. \quad (6)$$

После подстановки (5) в (1) получим уравнение контурной линии поверхности относительно плоскости xu

$$\begin{aligned} x^k &= f_1^k[f(v), v], \\ y^k &= f_2^k[f(v), v], \\ z^k &= f_3^k[f(v), v]. \end{aligned} \quad (7)$$

Касательной к линии (7) в точке $K(x_0, y_0, z_0)$ будет прямая вида

$$\frac{X - x_0}{x_v^k} = \frac{Y - y_0}{y_v^k} = \frac{Z - z_0}{z_v^k}.$$

В этом уравнении координаты направляющего вектора касательной определяются из выражений

$$\begin{aligned} x_v^k &= \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ f_{1u} & f_{1v} \end{vmatrix}}{F_u}, \\ y_v^k &= \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ f_{2u} & f_{2v} \end{vmatrix}}{F_u}, \\ z_v^k &= \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ f_{3u} & f_{3v} \end{vmatrix}}{F_u}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из анализа координат (8) можно сделать следующие выводы:

1) касательная к контурной линии поверхности занимает общее положение и проецируется в касательную к очерку, если

$$f_{1u} \cdot f_{2v} - f_{2u} \cdot f_{1v} = 0, \quad \mathbf{r} \neq 0, \quad F_u \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ f_{1u} & f_{1v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ f_{2u} & f_{2v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Такие точки называются точками линии складки. Ими и исчерпывается очерк поверхности;

2) касательная к контурной линии перпендикулярна координатной плоскости xu («вертикальна»), если

$$f_{1u} \cdot f_{2v} - f_{2u} \cdot f_{1v} = 0, \quad \mathbf{r} \neq 0, \quad F_u \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ f_{1u} & f_{1v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ f_{2u} & f_{2v} \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

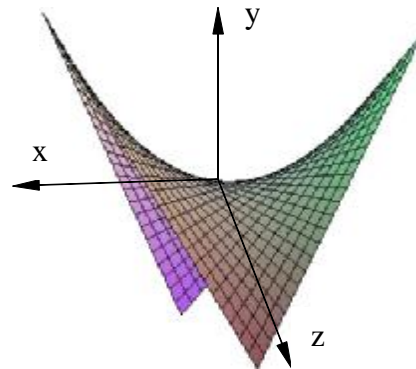


Рис. 1. Полигональная модель гиперболического параболоида

В этом случае обыкновенной точке на контурной линии поверхности соответствует точка возврата на очерке. Такая точка называется точкой сборки.

В качестве примера на рис. 1 приведена поверхность (1), заданная уравнением [2]

$$\begin{aligned} x &= u + v, \\ y &= u \cdot v, \\ z &= u - v. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (2) связи параметров будет

$$F(u, v) = u - v = 0.$$

Это значит, что контурная линия на этой поверхности получается отображением прямой, заданной в декартовых координатах u, v , на эту поверхность.

Теперь вычислим кривизну исследуемой поверхности в точках ее контурной линии.

Кривизна поверхности в точках контурной линии

Определим кривизну рассматриваемой поверхности в точках ее контурной линии. Как известно [7], формула для полной (гауссовой) кривизны поверхности (1) имеют вид:

$$K = \frac{L \cdot N - M^2}{E \cdot G - F^2}, \quad (10)$$

а коэффициенты квадратичных форм, входящих в формулы (10), определяются из зависимостей

$$\begin{aligned} E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \\ F &= x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v, \\ L &= \frac{\bar{r}_{uu} \cdot \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}, \quad M = \frac{\bar{r}_{uv} \cdot \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}, \\ N &= \frac{\bar{r}_{vv} \cdot \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что поверхность задана параметрическими уравнениями, а также то, что в точках контурной линии поверхности вдоль z -направления выполняется условие (2), получим

$$\begin{aligned} L &= \frac{a \cdot x_{uu} - b \cdot y_{uu}}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}, \quad N = \frac{a \cdot x_{vv} - b \cdot y_{vv}}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}, \\ M &= \frac{a \cdot x_{uv} - b \cdot y_{uv}}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}, \end{aligned}$$

где $a = y_u \cdot z_v - z_u \cdot y_v$, $b = x_u \cdot z_v - z_u \cdot x_v$.

Тогда, после подстановки полученных выражений в зависимость (10), получим

$$K = \frac{(a \cdot x_{uu} - b \cdot y_{uu})(a \cdot x_{vv} - b \cdot y_{vv}) - (a \cdot x_{uv} - b \cdot y_{uv})^2}{(E \cdot G - F^2)^2}.$$

Анализируя полученное выражение, можно установить следующее:

а) если $(a \cdot x_{uu} - b \cdot y_{uu})(a \cdot x_{vv} - b \cdot y_{vv}) = 0$, то гауссова кривизна в точках контурной линии поверхности отрицательна и точка на поверхности является гиперболической;

б) если $\mathbf{r}(u, v) \neq C^2$, то соответствующая точка поверхности — параболическая;

с) если $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_v = 0$, то точка особая как на исходной кривой, так и на поверхности, а также на ее очерке;

д) если $(a \cdot x_{uu} - b \cdot y_{uu})(a \cdot x_{vv} - b \cdot y_{vv}) - (a \cdot x_{uv} - b \cdot y_{uv})^2 > 0$, то соответствующая точка поверхности — эллиптическая.

Для рассматриваемой поверхности числитель в выражении полной кривизны поверхности равен -4 , а следовательно, точки контурной линии — гиперболические.

Некоторые плоские сечения поверхности

Касательное пространство к заданной поверхности в ее некоторой точке состоит из однопараметрического множества касательных к кривым этой поверхности. Выделим ту из них, которая параллельна оси z . Эта прямая t будет касаться плоских кривых, полученных в пересечении поверхности плоскостями, параллельными координатным, содержащим ось z . Но такое свойство отражает необходимое условие существования условного экстремума на рассматриваемых кривых. Если выделить на поверхности сечение плоскостью $y=a$ (a — некоторое вещественное число), то параллельность t оси z выражает необходимое условие существования условного экстремума функции

$$x = f_1(u, v)|_{y=a}, \quad (11)$$

а параметры u и v связаны зависимостью (4).

На рис. 2 показаны соответствующие кривые и касательная к ним в точке контурной линии при отображении поверхности вдоль оси z .

Для определения необходимых и достаточных условий существования условного экстремума функции (11) используем метод неопределенных коэффициентов Лагранжа. В этом случае функция Лагранжа будет иметь вид

$$L(x, y) = f_1(u, v) + \lambda \cdot [f_2(u, v) - a]. \quad (12)$$

Система уравнений, из решения которой следует искать точки условного экстремума, будет

$$\begin{aligned} L_u &= f_{1u}(u, v) + \lambda \cdot f_{2u}(u, v) = 0, \\ L_v &= f_{1v}(u, v) + \lambda \cdot f_{2v}(u, v) = 0, \\ f_2(u, v) - a &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

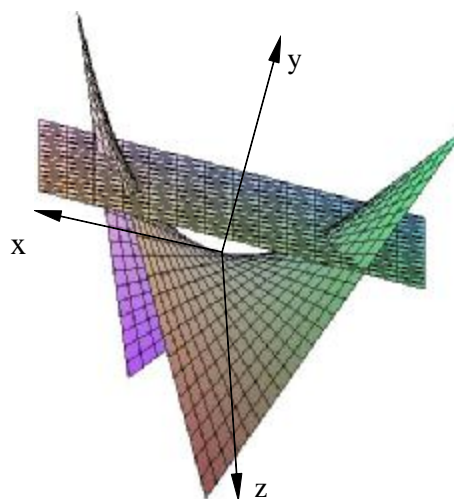


Рис. 2. Полигональная модель гиперболического параболоида и сечение ее плоскостью, перпендикулярной оси y

Выразив из первого уравнения системы (13) λ

$$\lambda = -\frac{f_{1u}(u, v)}{f_{2v}(u, v)} \quad (14)$$

и подставив его во второе уравнение, получим

$$f_{1v} \cdot f_{2u} - f_{1u} \cdot f_{2v} = 0.$$

Эта зависимость определяет необходимое условие существования условного экстремума функции (11), причем в *точках контурной линии* поверхности (1), так как соответствует зависимости, определяющей условие касания «вертикальной плоскости» с этой поверхностью.

Для определения достаточных условий существования условного экстремума вычислим второй дифференциал функции Лагранжа. Он имеет вид

$$d^2L = L_{uu}du^2 + 2L_{uv}dudv + L_{vv}dv^2, \quad (15)$$

где $L_{uu} = f_{1uu}(u, v) + \lambda \cdot f_{2uu}(u, v)$,

$$L_{vv} = f_{1vv}(u, v) + \lambda \cdot f_{2vv}(u, v),$$

$$L_{uv} = f_{1uv}(u, v) + \lambda \cdot f_{2uv}(u, v).$$

Подставив полученные зависимости с учетом (14) в уравнение (15), получим

$$d^2L = \frac{dv^2}{f_{2u}^2} \cdot A,$$

где

$$A = (f_{1uu}f_{2u} - f_{1u}f_{2uu})\frac{(f_{2v})^2}{f_{2u}} - 2(f_{1uv}f_{2v} - f_{2uv}f_{1u})f_{2v} + (f_{1uv}f_{2u} - f_{2uv}f_{1u}). \quad (16)$$

Тогда, если $A < 0$, то точка исследуемого сечения поверхности плоскостью является точкой условного максимума, если же $A > 0$, то соответствующая точка — точка условного минимума.

Подставив в полученную зависимость выражения для производных с учетом, что поверхность задана уравнениями (8), получим

$$d^2L = \frac{dv^2}{f_{2u}^2}(2u).$$

Отсюда следует, что сечения поверхности (8) плоскостями $u=a_i$ имеют точки как условного минимума так и максимума, совпадающие с точками контурной линии при проецировании вдоль оси z . Это хорошо видно из рис. 2.

Если условие связи наложить на координату x и определить условный экстремум координаты y , т.е. $y = f_2(u, v)|_{x=a}$, то второй дифференциал будет

$$d^2L = \frac{dv^2}{f_{1u}^2} \cdot B,$$

где

$$B = (f_{2uu}f_{1u} - f_{2u}f_{1uu})\frac{(f_{1v})^2}{f_{1u}} - 2(f_{2uv}f_{1v} - f_{1uv}f_{2u})f_{1v} + (f_{2uv}f_{1u} - f_{1vv}f_{2u}).$$

После подстановки соответствующих зависимостей для производных получим

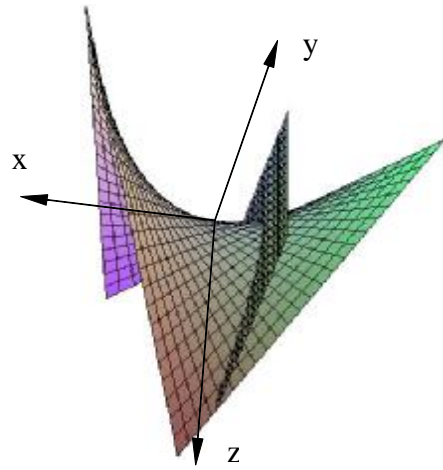


Рис. 3. Полигональная модель гиперболического параболоида и сечение ее плоскостью, перпендикулярной оси x

$$d^2L = \frac{dv^2}{f_{2u}^2}(-2).$$

Из полученного равенства следует, что сечения рассматриваемой поверхности плоскостями $x=a_i$ имеют только точки условного максимума, что следует и из рис. 3.

Таким образом, кривые, получаемые в пересечении рассматриваемой поверхности плоскостями, параллельными плоскостям xz или yz , являются гладкими, если выполнены условия $|r_u| + |r_v| \neq 0$. Такие кривые имеют экстремальные точки, совпадающие с точками контура поверхности, в случае выполнения равенства (3), но для $A \neq 0$ или $B \neq 0$. Точки таких кривых называют точками складки при проецировании по направлению оси z .

Точки поверхности, удовлетворяющие условиям (9), являются точками сборки проецирования по z -направлению. Точке складки соответствует регулярная точка на очерке поверхности, а точке сборки — особая точка. В то же время точка сборки на поверхности является ее регулярной точкой.

Все это должно быть учтено при выборе численного метода расчета огибающей семейства плоских кривых.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема. Точки дискриминанты поверхности (1) могут входить в состав множеств:

1) совокупность точек, для которых

$$f_{1u} \cdot f_{2v} - f_{2u} \cdot f_{1v} = 0, \quad r_u \neq 0, \quad F_u \neq 0, \\ \begin{vmatrix} F_u & Fv \\ f_{1u} & f_{1v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_u & Fv \\ f_{2u} & f_{2v} \end{vmatrix} \neq 0;$$

2) совокупность точек, для которых

$$f_{1u} \cdot f_{2v} - f_{2u} \cdot f_{1v} = 0, \quad r_u \neq 0, \quad F_u \neq 0, \\ \begin{vmatrix} F_u & Fv \\ f_{1u} & f_{1v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_u & Fv \\ f_{2u} & f_{2v} \end{vmatrix} = 0;$$

3) совокупность экстремальных точек на кривых, получаемых в пересечении поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям, содержащим ось, задающую направление проецирования.

Полученные результаты позволяют предложить методику расчета точек контурной линии поверхности, основанную на использовании численных методов определения условного экстремума, не требующей получения соответствующих дифференциальных уравнений. В этом случае выполняется расчет экстремума, например, координаты u при наложении связи на координату x , а независимой переменной является координата z .

Тогда контур L поверхности является объединением множества экстремальных точек, а именно

$$L = \bigcup_{i=1}^n (\min \hat{\max} f_1(u, v) \Big|_{f_2(u, v)=a}), z = f_3(u, v).$$

Выводы

Выполненные исследования отображения ортогональным проецированием поверхности, заданной параметрическими уравнениями, на координатную плоскость, позволяют получить более полное представление о строении дискриминантной кривой этой поверхности. На основе исследования сформулирована теорема, определяющая множества, в которых могут находиться точки очерка поверхности.

Полученные результаты о расположении точек контурной линии относительно координатных плоскостей, содержащих ось, вдоль которой выполняется проецирование, позволяют предложить методику расчета, основанную на численных методах, не требующих вывода соответствующих дифференциальных зависимостей.

Информация

Стипендии для обучения в магистратуре и аспирантуре в Германии

Фонд имени Генриха Бёлля (Heinrich-Böll-Stiftung) ежегодно предоставляет учебные гранты иностранным студентам, обучающимся в немецких вузах. Претендовать на стипендию фонда может любой иностранный студент, независимо от изучаемого предмета, допущенный к учебе в магистратуре или аспирантуре в одном из вузов Германии.

Будущий стипендиат фонда должен иметь законченное высшее образование, минимум — бакалаврское. Обратите внимание на то, что студенты магистерских программ, продолжительность которых составляет один год, к участию в конкурсе на стипендию не допускаются.

Одним из главных условий для подачи заявки в Фонд имени Генриха Бёлля является наличие документа, подтверждающего факт зачисления соискателя в государственный или имеющий государственную аккредитацию вуз Германии. При этом заявка на получение стипендии должна быть подана до начала обучения. И, наконец, будущие стипендиаты фонда должны отлично владеть немецким языком и быть в состоянии подтвердить это соответствующими сертификатами.

Студенты магистратуры могут подавать заявку на стипендию два раза в год: **до 1 марта и до 1 сентября**. При подаче заявки к 1 марта выплата стипендии начинается с октября текущего года, к 1 сентября — с апреля следующего года.

Для аспирантов действует лишь один срок подачи документов — **до 1 сентября**; выплата стипендии начинается, соответственно, с апреля следующего года.

Максимальная сумма выдаваемой фондом стипендии составляет 585 евро в месяц. Сверх этого каждому студенту ежемесячно выплачивается фиксированная сумма в размере 80 евро на покупку книг и другой учебной литературы. Помимо финансовой помощи фонд организует для стипендиатов многочисленные семинары по научным и общественно-политическим темам, а также тренинги, направленные на укрепление их лидерских и управленческих качеств.

Подробная информация о процедуре подачи заявки опубликована на сайте фонда: <http://www.boell.de/scholarships/scholarships.html>

Библиографический список

1. Арнольд, В. И. Особенности гладких отображений / В. И. Арнольд. — Успехи мат. наук. — 1968. — Т. XXIII, вып. 1(139) — С. 4–44.
2. Брус, Дж. Кривые и особенности / Дж., Брус, П. Джиблин. — М.: Мир, 1988. — 262 с.
3. Быков, В. И. Определение контурной линии на поверхности, заданной уравнением в неявной форме / В. И. Быков, В. В. Найханов // Применение систем автоматизированного проектирования конструкций в машиностроении: Тезисы Всесоюзного науч.-метод. симпозиума. — Ростов-на-Дону, 1983 — С. 40–41.
4. Ляшков, А. А. Особенности отображений проецирования некоторых поверхностей / А. А. Ляшков // Современные проблемы геометрического моделирования: сб. тр. 7-й Межд. науч.-пр. конф. — Мелитополь: ТГАТА, 2003. — С. 61–65.
5. Платонова, О. А. Проекция гладких поверхностей / О. А. Платонова // Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 1984. — Т. 10. — С. 135–149.
6. Платонова, О. А. Особенности проекций гладких поверхностей / О. А. Платонова // Успехи мат. наук. — Т. 39, вып. 1. — С. 149–150.
7. Погорелов, А. В. Геометрия / А. В. Погорелов. — М.: Наука, 1984. — 268 с.

ЛЯШКОВ Алексей Ануфриевич, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графики.

Адрес для переписки: 3dogibmod@mail.ru

Статья поступила в редакцию 02.12.2011 г.

© А. А. Ляшков

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ НИТЕРАСКЛАДЧИКА В ПРОЦЕССЕ НАМОТКИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Данная статья посвящена развитию математической модели одного из важнейших методов получения изделий из композиционных материалов — намотки непрерывными волокнами в направлении действия силы. В статье рассматривается вопрос нахождения оптимальной траектории и закона движения раскладывающего механизма станка с числовым программным управлением при изготовлении конструкций из волокнистых композитов методом намотки с учетом ограничений на допустимые положения раскладчика, натяжения нитей ленты и скорости протяжки ленты.

Ключевые слова: намотка, волокнистый композиционный материал, динамическое программирование, функция Беллмана, раскладывающий механизм намоточного станка.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы по теме «Развитие теории геометрического моделирования технологических процессов намотки и выкладки конструкций из волокнистых композиционных материалов», Госконтракт № 14.740.11.0279 от 17 сентября 2010 года.

1. Введение

Последние десятилетия являются свидетелями все возрастающего применения композиционных материалов в авиастроении и ракетно-космической отрасли. Это объясняется простотой достижения аэродинамических свойств и заданного теоретического контура внешнего обвода летательных аппаратов при изготовлении конструкций из композиционных материалов, небольшим весом, а также возможностью получать монолитные конструкции без швов и скреплений. Одним из недостатков композиционных материалов является до сих пор их высокая стоимость. Поэтому при моделировании процесса изготовления конструкций из композитов методом намотки лентой, составленной из однонаправленных армирующих волокон, пропитанных связующим, которая укладывается с натяжением на поверхность технологической оправки, необходимо иметь высокую точность соответствующих моделей не только для достижения требуемых параметров конструкций, но и для экономии материалов за счет виртуальной компьютерной отладки процесса изготовления конструкций.

Основным технологическим фактором, регулирующим прилегание ленты к поверхности оправки, является заданное натяжение на раскладчике ленты намоточного станка. Натяжение может быть как по-

стоянным, так и переменным, в зависимости от сложности поверхности технологической оправки, схемы армирования, возможности намоточного оборудования. При разработке управляющей программы важно знать необходимое натяжение ленты на каждом этапе укладки ленты для формирования правильного закона движения раскладчика ленты.

Важное значение имеет учет скорости протяжки ленты через лентоформирующий тракт намоточного станка. Известно, что скорость протяжки ленты оказывает сильное возмущающее воздействие на интенсивность пропитки ленты, а значит, и на качество изделия.

Работы многих авторов посвящены нахождению оптимальной траектории и закона движения раскладывающего механизма намоточного станка [1, 2], но эти законы строятся без учета реальной структуры ленты и рассматриваются только для класса поверхностей вращения. В статье [3] была построена геометрическая модель укладки ленты в процессе намотки, в которой учитывалась реальная структура ленты и предпринята попытка построения траектории движения раскладывающего механизма с учетом реальной структуры ленты, но эта траектория строилась без учета ограничений на возможные положения механизма, натяжения нитей ленты и скорость протяжки ленты. В данной статье впервые предпринята попытка обобщения существующих результатов по

нахождению траектории и закона движения раскладывающего механизма станка с учетом структуры ленты и описанных ограничений.

Пусть в пространстве фиксирована декартова система координат $Oxuz$. Поверхность технологической оправки Σ , принадлежащая классу C^2 поверхностей зависимых сечений с криволинейной образующей [4], задана параметрическим представлением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$. Схема укладки ленты задается с помощью гладкой кривой γ , имеющей параметрическое представление $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$, $t \in [\theta_0 - D; \theta_1 - D]$, $D > 0$ и называемой кривой армирования. Требуется переместить нитераскладчик из начального положения в конечное за минимальное время, не нарушая ограничений на натяжения нитей ленты, допустимые положения нитераскладчика и скорость протяжки ленты через лентоформирующий тракт.

2. Модель объекта управления

Положение раскладывающего механизма намоточного станка можно задать, указав радиус-векторы $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ крайних точек А и В механизма (рис. 1). Точки А и В, очевидно, должны принадлежать торсовым поверхностям Σ_A и Σ_B , направляющие которых представляют собой кривые на поверхности, по которым укладываются крайние нити ленты (рис. 1).

В статье [1] была построена геометрическая модель укладки ленты для любого метода намотки. Как известно, по исходному состоянию укладываемой ленты различают «сухую» и «мокрую» намотки. Для «сухой» намотки используется заранее изготовленная (сформированная из определенного числа нитей, определенной ширины и толщины, подсушенная и смотанная в барабаны) лента. При «мокрой» намотке лента формируется из нитей, пропитывающихся связующим в процессе намотки. В статье [1] любой из видов намотки моделируется единым образом: с помощью явно заданного гладкого отображения прямоугольника в трехмерное Евклидово пространство $\mathbf{w}: [\theta_0; \theta_1] \times [-d/2; d/2] \rightarrow \mathbf{R}^3$, где d — максимальная ширина ленты при «мокрой» намотке и неизменная ширина ленты при «сухой» намотке. Как и в статье [1], будем предполагать, что выполнены следующие допущения: лента состоит из n идеальных

растяжимых однородных нитей; укладка крайних нитей ленты осуществляется по кривым с параметрическим представлением $\mathbf{w}(t, d/2)$, $t \in [\theta_0; \theta_1]$ и $\mathbf{w}(t, -d/2)$, $t \in [\theta_0; \theta_1]$; укладка произвольной нити, лежащей между крайними, осуществляется по одной из кривых $\mathbf{w}(t, s)$, $t \in [\theta_0; \theta_1]$, где $s \in (-d/2; d/2)$ и фиксированно.

Используя вектор-функцию \mathbf{w} , легко написать параметрические представления торсовых поверхностей, которым должны принадлежать крайние точки нитераскладчика. Итак, параметрические представления поверхностей Σ_A и Σ_B имеют вид: $\Sigma_A: \mathbf{r}_A(t, \lambda) = \mathbf{w}(t, -d/2) + \lambda \cdot \mathbf{w}'_t(t, -d/2)$, $t \in [\theta_0; \theta_1]$, $\lambda \geq 0$; $\Sigma_B: \mathbf{r}_B(t, \lambda) = \mathbf{w}(t, d/2) + \lambda \cdot \mathbf{w}'_t(t, d/2)$, $t \in [\theta_0; \theta_1]$, $\lambda \geq 0$. Следовательно, задать положения точек А и В можно, указав значения параметров t, λ . Обозначим t_1 — значение параметра t , определяющее образующую торсовой поверхности Σ_A , которой принадлежит точка А, λ_1 — расстояние от точки А до точки касания нити и поверхности. Аналогично обозначим t_n, λ_n — значения параметров, определяющие точку В. Выбор таких параметров, конечно, произволен и должен удовлетворять определенным ограничениям.

Во-первых, расстояние ρ между точками А и В не может изменяться, поэтому точка В должна принадлежать линии пересечения торсовой поверхности Σ_B и сферы S_A с центром в точке А и радиусом ρ (рис. 1). Таким образом, должно выполняться равенство $|\mathbf{r}_A(t_1, \lambda_1) - \mathbf{r}_B(t_n, \lambda_n)| = \rho$. Введем следующие обозначения: $\mathbf{a}_1(t) = \mathbf{w}'_t(t, -d/2) / |\mathbf{w}'_t(t, -d/2)|$, $\mathbf{a}_2(t) = \mathbf{w}'_t(t, d/2) / |\mathbf{w}'_t(t, d/2)|$, $\mathbf{b}_1(t) = \mathbf{w}(t, -d/2)$, $\mathbf{b}_2(t) = \mathbf{w}(t, d/2)$. Найдем возможные значения λ_1 по заданному значению λ_n и значениям t_1, t_n . Для этого рассмотрим образующие торсовых поверхностей, соответствующие выбранным значениям t_1, t_n и точку на образующей поверхности Σ_B , соответствующую значению λ_n . Опустим перпендикуляр из этой точки на вторую образующую. Пусть основанием перпендикуляра соответствует значение λ^* . Это значение определяется из условия $(\mathbf{a}_1(t_1), \mathbf{b}_1(t_1) - \mathbf{b}_n(t_n) + \mathbf{a}_1(t_1) \cdot \lambda^* - \mathbf{a}_n(t_n) \cdot \lambda_n) = 0$. Отсюда получаем

$$\lambda^*(t_1, t_n, \lambda_n) = (\mathbf{a}_1(t_1), \mathbf{a}_n(t_n)) \cdot \lambda_n - \mathbf{a}_1(t_1) \cdot (\mathbf{b}_1(t_1) - \mathbf{b}_n(t_n)).$$

Следовательно, если выполняется неравенство $|\mathbf{r}_A(t_1, \lambda^*) - \mathbf{r}_B(t_n, \lambda_n)| \leq \rho$, то возможные значения λ_1 определяются равенством:

$$\lambda_1 = \lambda^* \pm \sqrt{\rho^2 - |\mathbf{r}_A(t_1, \lambda^*) - \mathbf{r}_B(t_n, \lambda_n)|^2}.$$

Во-вторых, нитераскладчик должен находиться в области $D \subset \mathbf{R}^3$ его допустимых положений. Эта область определяется возможностями намоточного станка, и в рассматриваемой модели будет задаваться двумя поверхностями Σ_1 и Σ_2 (рис. 1) с параметрическими представлениями $\mathbf{r}_1(u, v)$, $\mathbf{r}_2(u, v)$, $(u, v) \in F \subset \mathbf{R}^2$. Следовательно, должно выполняться условие $M(\theta) \in D$, где $\mathbf{OM}(\theta) = \mathbf{r}_A(t_1, \lambda_1) + m \cdot (\mathbf{r}_B(t_n, \lambda_n) - \mathbf{r}_A(t_1, \lambda_1))$, $m \in [0; 1]$.

Рассмотрим теперь ограничения на скорость протяжки ленты. Обозначим через $L_j(t, \lambda_j)$, $j = 1, n$, длины протянутых крайних нитей ленты, а $D^{(\alpha, \beta)} L_j = \partial^{\alpha+\beta} L_j / \partial t^\alpha \partial \lambda_j^\beta$. Пусть τ обозначает время. Тогда t_j, λ_j являются функциями от времени τ . Обозначим через t'_j, λ'_j первые производные этих функций по времени. Тогда скорость протяжки нити может быть найдена по формуле $L'_j = D^{(1,0)} L_j \cdot t'_j + D^{(0,1)} L_j \cdot \lambda'_j$. Таким образом, должны выполняться неравенства $0 \leq L'_j \leq c_1$, где c_1 — заданная константа.

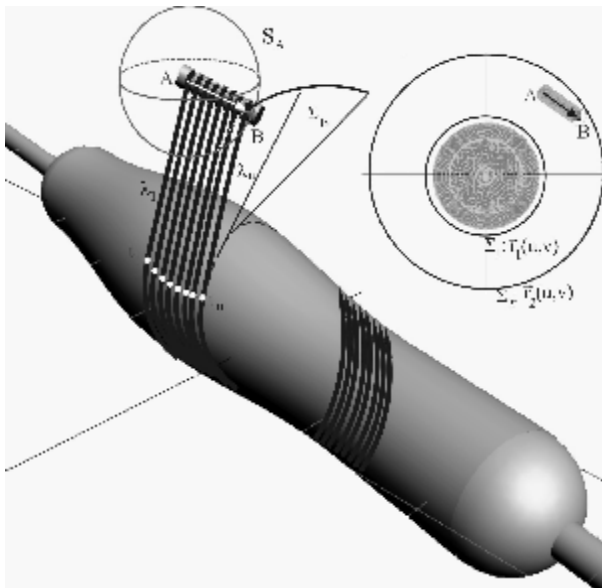


Рис. 1. Укладка нитей ленты на технологическую оправку

Натяжения нитей ленты, должны обеспечивать плотное прилегание их к поверхности технологической оправки. Для нахождения следующего ограничения рассмотрим задачу определения натяжения нитей ленты.

Рассмотрим произвольную нить, укладываемую по кривой $\gamma_s: \mathbf{w}(t, s), t \in [\theta_0; \theta_1]$. В каждой ее точке имеется натяжение. При равновесии нити на оправке, натяжение будет функцией параметра t . Таким образом, натяжение нити, укладываемой по кривой γ_s , описывается функцией $T(t, s)$ (s — фиксированно). Мы будем рассматривать упругие деформации нитей. Тогда натяжение связано с относительным удлинением нити законом Гука и, как видно из [3], его можно найти по следующей формуле:

$$T(t, s) = \frac{|D^{(1,0)}\mathbf{w}(t, s)|}{|D^{(1,0)}\mathbf{w}(t, s_0)|} (T(t, s_0) + E) - E,$$

где $s_0 \in [-d/2; d/2]$ произвольное фиксированное значение, а E — модуль упругости материала нити. Итак, натяжение $T(t, s)$ произвольной нити ленты выражается через натяжение $T(t, s_0)$ одной из ее нитей.

Пусть лента состоит из n нитей, укладываемых по кривым $\gamma_i: \mathbf{w}(t, s_i), t \in [\theta_0; \theta_1], i = 1, 2, \dots, n$. Так же как и крайние точки A, B нитераскладчика, точка схода A_i i -ой нити ($A_1 = A, A_n = B$) принадлежит торсовой поверхности $\Sigma_i: \mathbf{r}_i(t, \lambda) = \mathbf{w}(t, s_i) + \lambda \cdot \mathbf{w}'_i(t, s_i), t \in [\theta_0; \theta_1], \lambda \geq 0$. Пусть t_i — значение параметра t , определяющее образующую торсовой поверхности Σ_i , которой принадлежит точка A_i . Очевидно, что при выбранных t_1, t_n , значения $t_i, i = 2, 3, \dots, n-1$ не могут быть выбраны произвольно. Так как нити должны быть в натянутом состоянии, то значения $t_i = t_i(t_1, t_n)$ должны быть выбраны из условия пересечения торсовой поверхности Σ_i и отрезка AB . Таким образом, значение t_i находится из уравнения $\mathbf{w}(t, s_i) + \lambda \cdot \mathbf{w}'_i(t, s_i) = \mathbf{r}_B(t_n, \lambda_n) + \mu \cdot (\mathbf{r}_A(t_1, \lambda_1) - \mathbf{r}_B(t_n, \lambda_n))$, где $\lambda \geq 0, \mu \in [0; 1], a t \in [\min(t_1, t_n) - \delta; \min(t_1, t_n) + \delta], \delta > 0$.

Ленту обычно наматывают с некоторым технологическим натяжением $T_0 < T_p$ (здесь T_p — разрывная нагрузка арматуры ленты), установленным на раскладчике ленты намоточного станка. Тогда натяжение $T(t, s_0)$ является некоторой функцией технологического натяжения. Следовательно, условие плотного прилегания нитей ленты к поверхности выражается следующими неравенствами:

$$\begin{cases} \frac{|D^{(1,0)}\mathbf{w}(t_i, s_i)|}{|D^{(1,0)}\mathbf{w}(t_i, s_0)|} (T(t_i, s_0) + E) - E > 0, i = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n \frac{|D^{(1,0)}\mathbf{w}(t_i, s_i)|}{|D^{(1,0)}\mathbf{w}(t_i, s_0)|} (T(t_i, s_0) + E) - nE < T_p. \end{cases}$$

Для упрощения дальнейших уравнений будем считать, что $T(t_1, s_0) = T(t_2, s_0) = \dots = T(t_n, s_0)$.

Объектом управления является нитераскладывающий механизм. Обозначим $t_{ij} = t_i(\tau_j), \lambda_{ij} = \lambda_i(\tau_j), t'_{ij} = t'_i(\tau_j), \lambda'_{ij} = \lambda'_i(\tau_j)$. Тогда, если τ_{j+1} — время перехода нитераскладчика из состояния, в котором он находился в момент времени τ_j , в состояние, в котором он оказывается в момент времени τ_{j+1} , то справедливы приближенные равенства $t_{i,j+1} = t_{ij} + t'_{ij} \cdot \tau_{j+1} - \tau_j, \lambda_{i,j+1} = \lambda_{ij} + \lambda'_{ij} \cdot \tau_{j+1} - \tau_j$. Следовательно, $t_{i,j+1} = t_{ij} + t'_{ij} \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) / t'_{n,j}, \lambda_{i,j+1} = \lambda_{ij} + \lambda'_{n,i} \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) / t'_{n,j}$.

Итак, вектор состояния нитераскладчика имеет вид $\mathbf{x}_j = (x_{0,j}; x_{1,j}; x_{2,j}; x_{3,j}; x_{4,j})^T = (t_{n,j}; t_{1,j}; \lambda_{n,j}; T_j; \lambda_{1,j})^T$, где $T_j = T(t_{1,j}, s_0)$. Поведение объекта управления можно

описать разностным уравнением $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j), j = 0, 1, \dots, N-1$, где $\mathbf{u}_j = (u_{0,j}; u_{1,j}; u_{2,j}; u_{3,j}; u_{4,j}; u_{5,j})^T = (t'_{n,j}; t'_{1,j}; \lambda'_{n,j}; \Delta t_{n,j}; \Delta T_j; u_{5,j})^T, u_{5,j} = \pm 1$ вектор управления, а

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j) = \begin{pmatrix} x_{0,j} + u_{3,j} \\ x_{2,j} + u_{1,j} \cdot u_{3,j} / u_{0,j} \\ x_{3,j} + u_{2,j} \cdot u_{3,j} / u_{0,j} \\ x_{4,j} + u_{4,j} \\ \lambda' (x_{0,j}, x_{1,j}, x_{2,j}) + \\ + u_{5,j} \times \\ \left(\times \sqrt{\rho^2 - |\mathbf{r}_A(x_{1,j}, \lambda' (x_{0,j}, x_{1,j}, x_{2,j})) - \mathbf{r}_B(x_{0,j}, x_{2,j})|^2} \right) \end{pmatrix}.$$

Множеством допустимых состояний нитераскладчика является пересечение множеств

$$\begin{aligned} X_1 = \{ \mathbf{x} = (x_0; \dots; x_4) \in \mathbf{R}^5 : \\ | \mathbf{r}_A(x_1, \lambda' (x_0, x_1, x_2)) - \mathbf{r}_B(x_0, x_2) | \leq \rho; \\ x_4 = \lambda' (x_0, x_1, x_2) \pm \\ \pm \sqrt{\rho^2 - |\mathbf{r}_A(x_1, \lambda' (x_0, x_1, x_2)) - \mathbf{r}_B(x_0, x_2)|^2}; \\ M(\mu) \in D, \end{aligned}$$

$$OM(\mu) = \mathbf{r}_B(x_0, x_2) + \mu \cdot (\mathbf{r}_A(x_1, x_4) - \mathbf{r}_B(x_0, x_2)), \mu \in [0; 1];$$

$$\begin{aligned} X_2 = \{ \mathbf{x} = (x_0; \dots; x_4) \in \mathbf{R}^5 : \\ -E \leq x_3 \leq \frac{T_p + nE}{\sum_{i=1}^n \frac{|D^{(1,0)}\mathbf{w}(t_i(x_1, x_0), s_i)|}{|D^{(1,0)}\mathbf{w}(t_i(x_1, x_0), s_0)|}} - E \}. \end{aligned}$$

Множеством допустимых управлений служит следующее множество:

$$\begin{aligned} U_j(\mathbf{x}_j) = \{ \mathbf{u}(j) \in \mathbf{R}^6 : 0 \leq D^{(1,0)}L_1(x_{1,j}, x_{4,j}) \cdot u_1 + \\ + D^{(0,1)}L_1(x_{1,j}, x_{4,j}) \cdot \lambda'_{1,j} \leq c_{1,j}; \\ 0 \leq D^{(1,0)}L_n(x_{0,j}, x_{2,j}) \cdot u_0 + D^{(0,1)}L_n(x_{0,j}, x_{2,j}) \cdot u_2 \leq c_{2,j}; \\ u_5 = \pm 1 \}. \end{aligned}$$

Время перехода τ_{j+1} из состояния \mathbf{x}_j в состояние \mathbf{x}_{j+1} может быть найдено следующим образом: $\tau_{j+1} = u_{3,j} / u_{0,j}$. Эффективность всего процесса в целом будем характеризовать функцией вида

$$J(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \sum_{k=0}^{N-1} J_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad J_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \frac{u_{3,k}}{u_{0,k}},$$

где $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ — набор состояний (фазовая траектория процесса), а $\mathbf{u}^* = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1})$ — набор векторов управления. Итак, оптимальный закон движения нитераскладчика (оптимальный в смысле увеличения производительности процесса за счет сокращения времени изготовления конструкции) может быть найден в результате решения следующей задачи многошаговой оптимизации, которая может легко быть решена методом дискретного динамического программирования:

$$J(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \rightarrow \min,$$

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j), j = 0, 1, \dots, N-1, \mathbf{x}_j \in X_1 \cap X_2, \mathbf{u}_j \in U_j(\mathbf{x}_j).$$

Для решения полученной задачи мы применим метод дискретного динамического программирования.

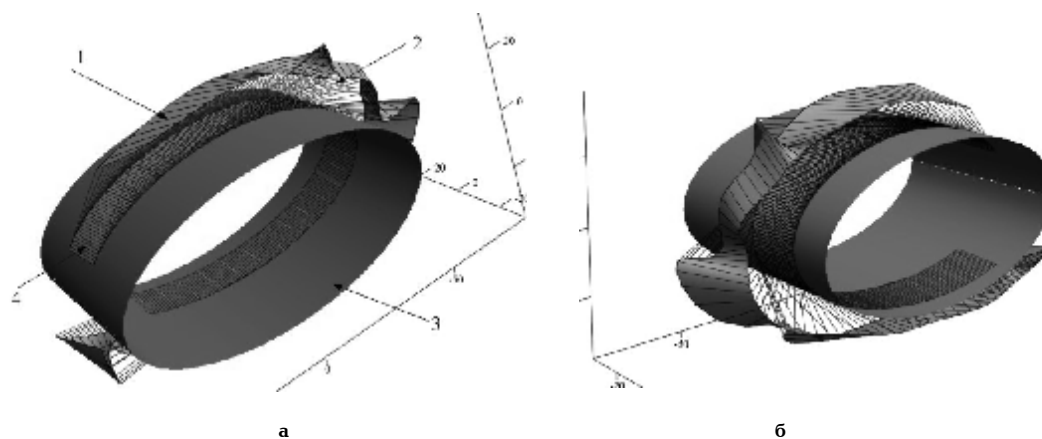


Рис. 2. Оптимальная траектория движения нитераскладчика
1 — положение нитераскладчика; 2 — крайние нити ленты;
3 — поверхность оправки; 4 — лента на оправке

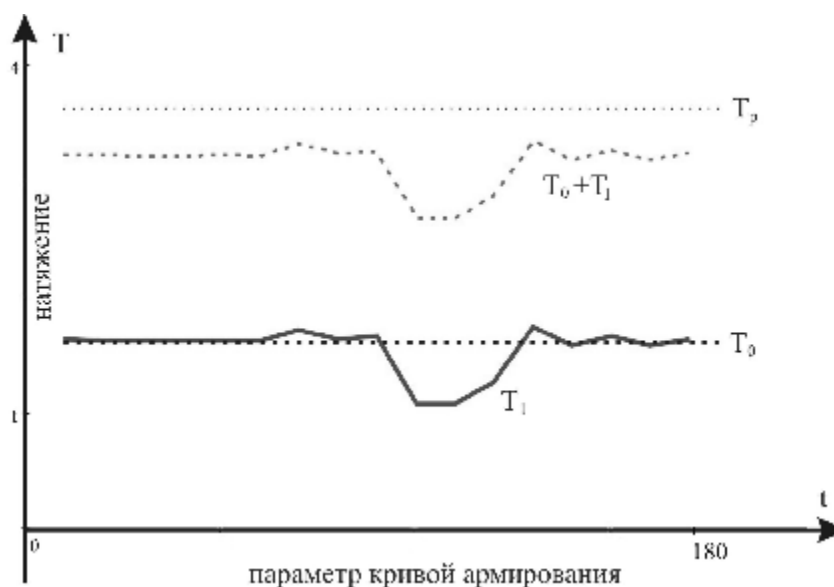


Рис. 3. Натяжения на крайних нитях ленты

ния. Функции Белмана для данной задачи многошаговой оптимизации находятся из следующих соотношений

$$B_N(\mathbf{x}_{N-1}) = \min_{\mathbf{u}_{N-1} \in U_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1})} J_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1});$$

$$B_k(\mathbf{x}_{k-1}) = \min_{\mathbf{u}_{k-1} \in U_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1})} \{J_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + B_{k+1}(\mathbf{x}_k)\},$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1.$$

В качестве примера найдена оптимальная траектория движения нитераскладчика при укладке одного витка ленты на эллиптический цилиндр (рис. 2) и зависимость натяжения на крайних нитях ленты от параметра t кривой армирования γ (рис. 3).

Итак, в данной статье впервые с учетом реальной структуры ленты найдена траектория и закон движения раскладывающего механизма намоточного станка при изготовлении конструкций из волокнистых композиционных материалов. Такая траектория и закон движения находятся с учетом допустимых положений раскладчика, скорости протяжки ленты через лентоформирующий тракт и обеспечения заданного технологического натяжения волокон

ленты. Это важнейшие параметры, влияющие на ход процесса намотки и, следовательно, на точность изготовления проектируемого изделия.

Библиографический список

1. Князев, Д. Н. Математические модели и алгоритмы программирования процессов формообразования изделий методом намотки [Текст] : дис.... канд. техн. наук : 05.13.18, 05.13.06 / Князев Дмитрий Николаевич. — Новочеркасск, 2002. — 170 с. — Библиогр.: с. 133-141.
2. Задача оптимизации законов движения исполнительных органов многокоординатных станков с программным управлением / В. В. Алексейчик [и др.] // Системы управления технологическими процессами. — Новочеркасск, 1976. — С. 51–54.
3. Битюков, Ю. И. Численный анализ схемы укладки ленты переменной ширины на технологическую оправку в процессе намотки конструкций из композиционных материалов [Текст] / Ю. И. Битюков, В. А. Калинин // Механика композиционных материалов и конструкций. — М., 2010. — Т. 16., № 2. — С. 276–290.
4. Иванов, Г. С. Начертательная геометрия [Текст]: учебник для вузов / Г. С. Иванов. — М. : Машиностроение, 1995. — 223 с. — ISBN 5-217-02058-X.

БИТЮКОВ Юрий Иванович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Теория вероятностей».

Адрес для переписки: yib72@mail.ru

КАЛИНИН Виктор Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование».

Адрес для переписки: kalinin@valentapharm.com

ДЕНИСКИН Юрий Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры «Инженерная графика».

Адрес для переписки: qi@mai.ru

МИРОШНИЧЕНКО Павел Владимирович, аспирант кафедры «Инженерная графика».

Адрес для переписки: ouk@mai.ru

Статья поступила в редакцию 01.12.2011 г.

© Ю. И. Битюков, В. А. Калинин, Ю. И. Денискин,
П. В. Мирошниченко

Информация

Гранты для стимулирования закрепления молодежи в сфере науки, образования и высоких технологий

Объявлена I очередь конкурса на выделение грантов для стимулирования закрепления молодежи в сфере науки, образования и высоких технологий в рамках реализации федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

Одним из наиболее значимых мероприятий федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы является финансирование научных исследований коллективами научно-образовательных центров (мероприятие 1.1).

В Программе под научно-образовательным центром понимается структурное подразделение (часть структурного подразделения или совокупность структурных подразделений) научной, научно-производственной организации или высшего учебного заведения, осуществляющее проведение исследований по общему научному направлению, подготовку кадров высшей научной квалификации на основе положения о научно-образовательном центре, утвержденного руководителем организации. Важнейшими квалификационными характеристиками научно-образовательного центра являются, в том числе, высокий научный уровень выполняемых исследований, не уступающий мировому уровню, высокая результативность подготовки научных кадров высшей квалификации, участие в подготовке студентов по научному профилю научно-образовательного центра, использование результатов научных исследований в образовательном процессе.

Целью мероприятия является достижение научных результатов мирового уровня по широкому спектру научных исследований, закрепление в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров, формирование эффективных и жизнеспособных научных коллективов, в которых молодые ученые, аспиранты и студенты работают с наиболее результативными исследователями старших поколений.

На это мероприятие будет в 2012 – 2013 годах направлено 2,4 млрд рублей. Будет отобрано около 300 проектов продолжительностью 2 года и стоимостью до 8,5 млн рублей каждый.

Объявление о проведении конкурсного отбора на предоставление грантов в форме субсидий для юридических лиц на поддержку научных исследований в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (I очередь — мероприятие 1.1, гуманитарные науки).

Конкурсная документация на проведение конкурсного отбора на предоставление грантов в форме субсидий для юридических лиц из федерального бюджета в рамках реализации федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (I очередь — мероприятие 1.1, гуманитарные науки).

Информация о грантах для поддержки научных исследований (I очередь — мероприятие 1.1, гуманитарные науки).

Источник: http://www.rsci.ru/grants/grant_news/297/231814.php (дата обращения: 10.04.2012)