

ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

УДК 621.9.02.001

К. Л. ПАНЧУК
И. В. БУТКО
В. Ю. ПОЛШКОВ

Омский государственный
технический университет

ПРОФИЛИРОВАНИЕ ОБКАТОЧНОГО ИНСТРУМЕНТА ДЛЯ ОБРАБОТКИ ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В теории профилирования режущих инструментов известен метод профильных нормалей, основанный на построении нормали к поверхности из точек на поверхности. В работе предлагается решение задачи профилирования обкаточного режущего инструмента, основанное на построении нормали к поверхности из внешней точки.

Ключевые слова: контактные нормали, ортогональное проецирование, характеристика, линия зацепления.

В теории профилирования режущих инструментов применяются следующие методы: метод огибающих [1, 2, 3], кинематический метод [4, 5], метод нормальных сечений [6], метод профильных нормалей [7]. Из перечисленных наибольшее применение получил метод профильных нормалей. Очевидно, это связано с тем, что в нем наиболее полно учтены взаимосвязанные составляющие, обуславливающие зацепление взаимоогibaемых поверхностей детали и инструмента. Первая составляющая – геометрическая, отражает известное в теории огибающих поверхностей условие, что в точках касания взаимоогibaющие поверхности имеют общие нормали – контактные нормали. Вторая составляющая – кинематическая,

отражает принадлежность контактных нормалей комплексу лучей мгновенного кинематического винта, обеспечивающего мгновенное относительное движение тел с взаимоогibaемыми поверхностями. Таким образом, в методе профильных нормалей учитывается как геометрия собственно взаимоогibaемых поверхностей, так и кинематика движения тел с этими поверхностями, при этом кинематика имеет достаточно ясное и полное геометрическое представление, поскольку может быть интерпретирована геометрическими образами и отношениями между ними.

В различных вариантах метода профильных нормалей решение задачи профилирования основано на построении нормали к поверхности из точки на ней.

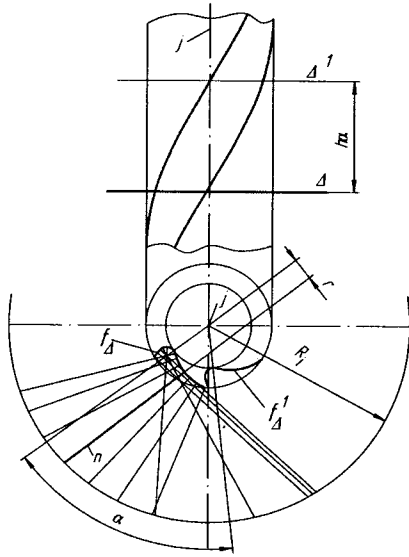


Рис. 1. Поле нормалей торцового профиля

В данной работе в направлении развития этого метода предлагается выполнять профилирование на основе построения нормали к поверхности из точки вне ее.

Рассмотрим сущность этого подхода и попутно отметим его положительные особенности на примере профилирования обкаточных инструментов: рейки и червячной фрезы.

Контактные нормали взаимоогibaемых поверхностей отличаются от обычных нормалей этих поверхностей тем, что они являются лучами мгновенного кинематического винта, т.е. винта мгновенного относительно движения тел с взаимоогibaемыми поверхностями [8]. В случае линейного касания взаимоогibaемых поверхностей контактные нормали образуют линейчатую поверхность, одной из направляющих линий которой является характеристика — линия касания этих поверхностей. Вид этой поверхности определяется геометрией любой из двух взаимоогibaемых поверхностей и законом движения огibaания этой поверхности.

Рассмотрим в качестве одной из взаимоогibaемых поверхностей цилиндрическую винтовую поверхность (ВП), заданную чертежом (рис. 1).

Линии f_{Δ} и f_{Δ}^1 — торцовые профили ВП в плоскостях уровня Δ и Δ^1 . Винтовой параметр h определяется шагом H этой поверхности: $h = H/(2\pi)$, а направление хода ВП — ее чертежом. Нормали к торцовому профилю f_{Δ} образуют поле нормалей в плоскости Δ , ограниченное самим профилем и окружностью произвольного радиуса R . Параметр положения r произвольной нормали n указанного поля позволяет на основании соотношения $r \cdot \operatorname{tg} \varphi = h$ определить угловое положение нормали к ВП относительно ее винтовой оси j [7]. Очевидно, нормаль n является ортогональной проекцией нормали к ВП в точке торцового профиля f_{Δ} . Знак угла φ зависит от направления хода ВП и от направления вектор-момента, образуемого проекцией n вектора нормали к ВП на торцовую плоскость Δ при ее вращении относительно центра j в плоскости Δ .

Пусть $n_{\Delta_1}^0$ и $n_{\Delta_2}^0$ — два разных положения одной нормали к торцовому профилю в его положениях $f_{\Delta_1}^0$ и $f_{\Delta_2}^0$ (рис. 2). Основания $N_{\Delta}^0(N_{\Delta_1}^0, N_{\Delta_2}^0)$ и $N_{\Delta}(N_{\Delta_1}, N_{\Delta_2})$ этой нормали принадлежат плоскостям уровня $\Delta^0(\Delta_2^0)$ и $\Delta(\Delta_2)$ торцового профиля в его положениях $f_{\Delta_1}^0$ и $f_{\Delta_2}^0$. Положение плоскости уровня Δ^0 относительно ис-

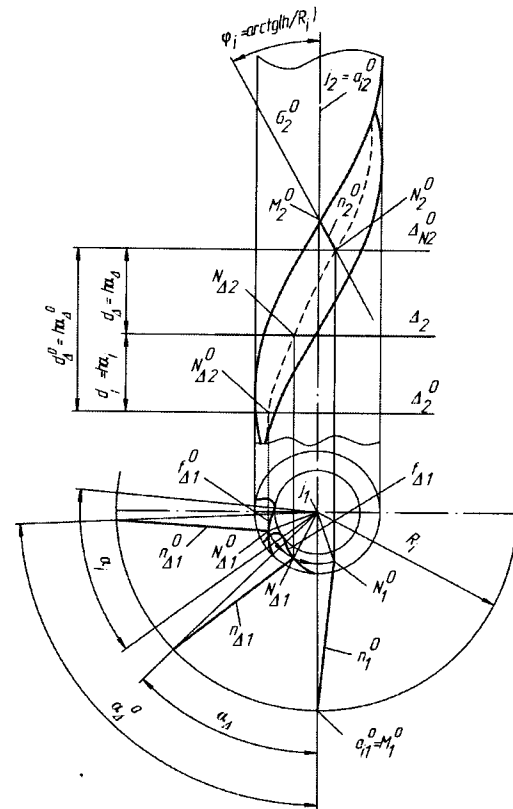


Рис. 2. Полярное положение $n^0(n_1^0, n_2^0)$ нормали к ВП

ходной плоскости Δ торцового профиля определяется расстоянием $d_{\Delta}^0 = h \cdot \alpha_1$, где α_1 — угол между торцовыми профилями f_{Δ} и $f_{\Delta_1}^0$. Повернем нормаль $n_{\Delta_1}^0$ вокруг центра j_1 на угол α_{Δ} в положение n_1^0 , когда она будет проходить через точку $a_{11}^0 = M_1^0$, которая с точкой j_1 определяет прямую (a_{11}^0, j_1) , задающую направление ортогонального проецирования на плоскость проекций Π_2 . Этому повороту будет соответствовать положение $N^0(N_{\Delta_1}^0, N_{\Delta_2}^0)$ основания нормали в плоскости уровня $\Delta_N^0(\Delta_{N_2}^0)$, удаленной от исходной плоскости $\Delta(\Delta_2)$ торцового профиля на расстояние $d_{\Delta}^0 = h \cdot \alpha_{\Delta}^0$. Так как нормаль к ВП является лучом винта [8], то для ее точки $M^0(M_1^0, M_2^0)$ можно однозначно определить положение полярной плоскости $G^0(G_2^0)$, для которой указанная точка является полюсом в нулевой системе, порождаемой этим винтом. Положение полярной плоскости G^0 относительно оси $j(j_1, j_2)$ винта заданного направления определяется углом $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(h/R_j)$. В силу особенности проекционного расположения полюса M^0 и оси j (рис. 2) следует, что G_2^0 есть фронтальный след полярной плоскости G^0 , проходящий через проекцию M_2^0 полюса M^0 . На основании известного определения полярной плоскости через полюс M^0 проходит пучок лучей винта, один из которых совпадает с нормалью $n^0(n_1^0, n_2^0)$ к ВП в точке $M^0 \in n^0$. Поэтому точка $M_2^0 = G_2^0 \cap j_2$ представляет собой фронтальную проекцию полюса M_0 полярной плоскости G^0 , а прямые n_2^0 и n_1^0 представляют собой проекции нормали n^0 к ВП, проходящей через внешнюю точку $M^0(M_1^0, M_2^0)$.

Нормали к ВП, пересекающие прямую $a_1^0(a_{11}^0, a_{12}^0)$, проходящую через полюс M^0 параллельно винтовой оси j , — эти нормали параллельны полярной плоскости G_0 с полюсом M^0 . Действительно, положения полярных плоскостей точек-полюсов прямой a_1^0 относительно оси j определяются одним и тем же соотношением $R_j \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = h$. Поэтому они образуют пучок

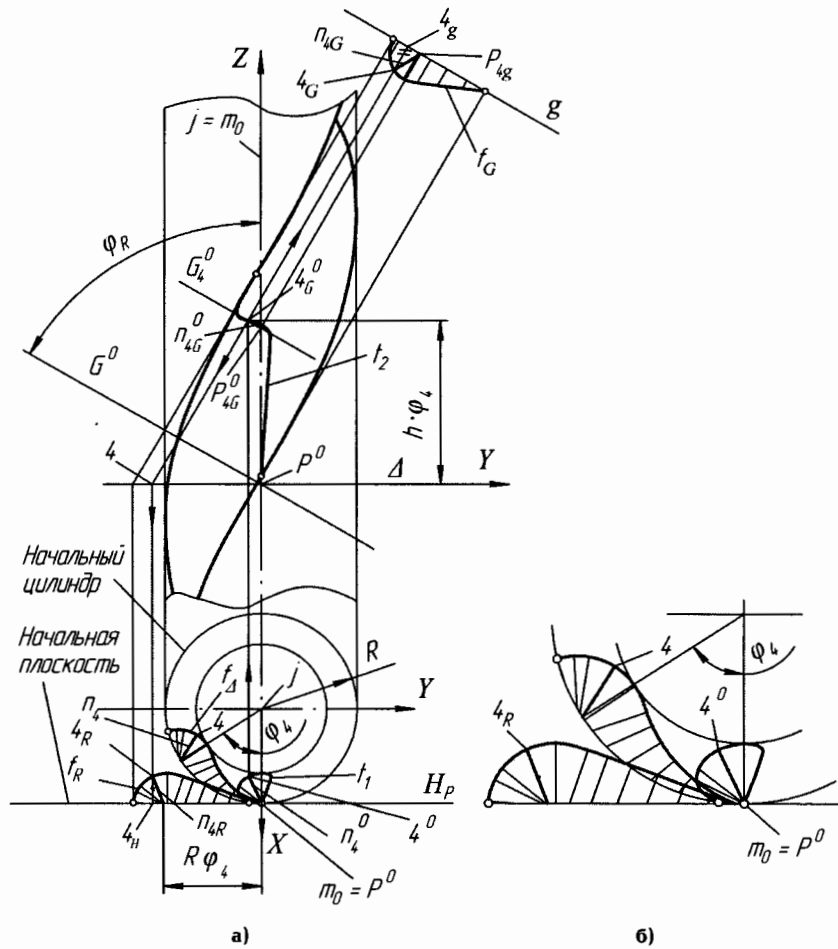


Рис. 3. Построение профиля реечного инструмента

параллельных плоскостей, расположенных под углом φ_i к оси j и каждой из них принадлежит в общем случае конечное число нормалей к ВП, проходящих через соответствующий полюс - точку пересечения полярной плоскости пучка плоскостей с прямой α_i^0 .

Основываясь на вышеизложенных теоретических предпосылках, рассмотрим геометрическую модель решения следующей задачи профилирования: задана чертёжом (рис. 3а) цилиндрическая ВП (j, R, h, f_Δ, HX) детали, где j – винтовая ось; R – радиус ограничивающей цилиндрической поверхности вращения (радиус начального цилиндра); h – винтовой параметр, определяемый из соотношения $h = H / (2\pi)$, в котором H – шаг ВП; f_Δ – торцовый профиль и его плоскость Δ ; HX – направление хода ВП, определяемое чертёжом. Требуется определить профиль f_R реечного инструмента (РИ), обрабатывающего заданную ВП, начальная плоскость H_p которого касается начального цилиндра детали с этой ВП.

Если каждую нормаль поля нормалей (рис. 1) повернуть относительно центра j в положение прохождения этой нормали через полюс зацепления R^0 , то геометрическое место оснований нормалей образует некоторую линию t_1 (рис. 3), соответствующую линии зацепления, известную в теории плоских зубчатых зацеплений [4]. Для каждой точки торцового профиля f_Δ ее угловому перемещению в положение на линии t_1 можно поставить в соответствие определенное смещение этой точки вдоль винтовой оси j , что позволяет для линии t_1 построить соответствующую ей линию t_2 на плоскости проекций Π_2 . Например, точка $4 \in f_\Delta$ преобразуется поворотом на

угол φ_4 в точку $4^0 \in t_1$ (рис. 3б), которая осевым смещением $h \cdot \varphi_4$ преобразуется в точку $4_G^0 \in t_2$. Исходя из геометрической схемы образования взаимно соответственных линий t_1 и t_2 , этим линиям можно дать следующие геометрические объяснения:

1. Линия $t(t_1, t_2)$ представляет собой ортогональную проекцию прямой $m_0 \subset P^0$, $m_0 \perp j$, принадлежащую исходной ВП.

2. Линия t представляет собой линию касания взаимноогibaемых поверхностей ВП и ЦПР (цилиндрическая поверхность реечного инструмента), т.е. является их характеристикой.

Таким образом, задание ВП (j, R, h, f_Δ, HX) и кинематической схемы движения детали с этой ВП, соответствующей обкатке ее начального цилиндра по начальной плоскости H_p инструмента, позволяет определить характеристику $t(t_1, t_2)$, от которой можно перейти к нормальному профилю $f_G = \text{ЦПР} \cap G^0$, либо к профилю $f_R = \text{ЦПР} \cap \Delta$ в плоскости торцового профиля f_Δ исходной ВП.

Геометрическая модель рассмотренной задачи профилирования позволяет выполнить аналитическое описание ее решения. В системе координат XYZ , связанной с исходной ВП, уравнения характеристики $t(t_1, t_2)$ могут быть представлены в следующей параметрической форме [9]:

$$x_i = \frac{\rho_i}{R} \cdot [\rho_i \cdot \cos^2 \delta + \sqrt{R^2 - \rho_i^2} \cdot \cos^2 \delta \cdot \sin \delta],$$

$$y_i = \frac{\rho_i}{R} \cdot [\sqrt{R^2 - \rho_i^2} \cdot \cos^2 \delta - \rho_i \cdot \sin \delta] \cdot \cos \delta, \quad (1)$$

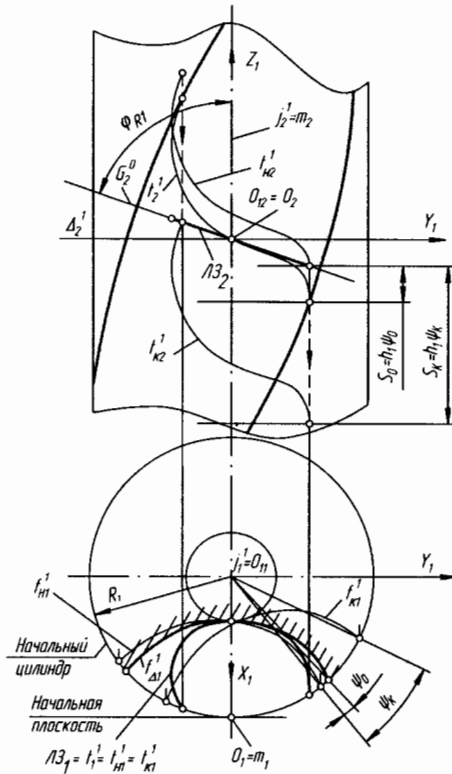


Рис. 4. Образование линии зацепления ВП с точечным касанием

$$z_t = h \cdot [\arccos(\frac{\rho_t}{R} \cdot \cos \delta) - \delta - \arctg \frac{y_t}{x_t}],$$

где $x_t = x_t(\lambda)$, $y_t = y_t(\lambda)$, $z_t = z_t(\lambda)$, $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_n$ – параметри-

ческие уравнения торцевого профиля f_{Δ} ; $\rho_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2}$; δ – угол между радиус-вектором точки торцевого профиля f_{Δ} и касательной к f_{Δ} в этой точке.

Рассмотренная геометрическая модель профилирования РИ, обрабатывающего заданную ВП детали, может быть положена в основу профилирования червячной фрезы для обработки этой же ВП. Обозначим ВП детали как ВП₁ и ВП червячной фрезы – как ВП₂. Профилирование ВП₂ фрезы для обработки ВП₁ детали на основе использования промежуточной поверхности ЦПР может быть выполнено по следующей схеме: ВП₁ → ЦПР, ЦПР → ВП₂. В соответствии с этой схемой взаимоогнбаемые ВП₁ и ВП₂ обладают точечным касанием, поскольку характеристики t^1 и t^2 в паре ВП₁ → ЦПР и ЦПР → ВП₂ соответственно, различны и принадлежат одной ЦПР, следовательно, пересекаются в точке, являющейся общей точкой касания ВП₁ и ВП₂. Таким образом два линейных касания в парах ВП₁ → ЦПР и ЦПР → ВП₂ приводят к точечному касанию в паре ВП₁ → ВП₂.

Точка пересечения характеристик t^1 и t^2 в процессе взаимного огнбания трех поверхностей ВП₁ → ЦПР и ВП₂ описывает в неподвижном пространстве линию зацепления (ЛЗ), которая представляет собой плоскую кривую, расположенную в плоскости нормального сечения общей для ВП₁ и ВП₂ производящей рейки, причем эта плоскость проходит через точку касания начальных цилиндров ВП₁ и ВП₂ [10].

Если известна ЛЗ и характеристика t^1 , можно определить траекторию движения (рабочую линию [10]) контактной точки на ВП₂, если некоторому перемещению по ЛЗ общей точки ЛЗ и t^1 поставить в соответствие угловое перемещение фрезы с ВП₂ отно-

сительно ее оси j^2 в соответствующей подвижной системе координат. Приведенные рассуждения положены в основу геометрической модели профилирования ВП₂ червячной фрезы по заданной ВП₁ детали и закону движения последней. Рассмотрим эту модель. Пусть задана (рис. 4) цилиндрическая ВП₁ [$j^1(j_1^1, j_2^1)$, $R_1, h_1, f_{\Delta}^1(f_{\Delta 1}^1)$, НХ₁]. Требуется определить ВП₂ червячной фрезы.

Основываясь на выше рассмотренной геометрической модели профилирования ВП₁ → ЦПР, определим характеристику $t^1(t_1^1, t_2^1)$ в этой паре поверхностей. Отметим, что плоскость $G^0(G_2^0)$ нормального сечения ЦПР образует угол $\varphi_{R1} = \arctg(h_1/R_1)$ с винтовой осью j^1 . Наличие характеристики t^1 и положения плоскости G^0 относительно j^1 позволяет перейти к ЛЗ (ЛЗ₁, ЛЗ₂) взаимоогнбаемых ВП₁ и ВП₂ с точечным касанием. При этом ЛЗ₁ = t_1^1 , ЛЗ₂ – отрезок прямой линии на следе G_2^0 плоскости G^0 .

Если сместить характеристику t^1 вдоль оси j^1 на величину s_1 в некоторое положение t_1^1 , то этому смещению будет соответствовать поворот детали с ВП₁ относительно оси j^1 на некоторый угол $\psi_1 = s_1/h_1$. Знак угла ψ_1 зависит при данном НХ₁ от направления смещения s_1 . Сместим теперь характеристику t^1 вдоль оси j^1 на величину s_0 из ее начального положения $t^1(t_1^1, t_2^1)$ в положение $t_{H1}^1(t_{H1}^1, t_{H2}^1)$, при котором одна из ее конечных точек будет принадлежать ЛЗ. Очевидно, положению t_{H1}^1 характеристике будет соответствовать начальное положение ВП, характеризующее начало процесса пересечения характеристики t^1 и ЛЗ и, следовательно, начало процесса последовательного точечного касания ВП₁ и ВП₂. Смещению s_0 будет соответствовать поворот детали с ВП₁ вокруг ее оси j^1 на угол $\psi_0 = s_0/h_1$. На плоскости проекций П₁ этому повороту будет соответствовать начальное положение f_{H1}^1 исходного профиля $f_{\Delta 1}^1$, определяемое тем же углом ψ_0 .

Если теперь смещать характеристику t^1 вдоль оси j^1 из ее начального положения t_{H1}^1 в направлении непрерывного пересечения с ЛЗ в плоскости G^0 , то для фиксированного момента времени можно указать положение общей точки характеристики t^1 и ЛЗ и соответствующее этому положение угловое перемещение детали с ВП₁ вокруг оси j^1 от начального ее положения, соответствующего положению f_{H1}^1 характеристики. Возможная совокупность общих точек характеристики t^1 и ЛЗ исчерпывается конечным положением $t_{k1}^1(t_{k2}^1)$ характеристики, когда она образует последнюю общую точку с ЛЗ. При этом деталь с ВП₁ совершит от своего начального положения угловое перемещение $\psi_k = s_k/h_1$, характеризующее положением f_{k1}^1 торцевого профиля $f_{\Delta 1}^1$.

Рассмотрим аналитическое описание геометрической модели профилирования ВП₂ червячной фрезы. Параметрические уравнения (1) характеристики t^1 можно представить в следующем виде:

$$x_t = x_t(\lambda); y_t = y_t(\lambda); z_t = z_t(\lambda), \quad (2)$$

где $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_n$, λ – параметр формы заданного торцевого профиля t^1 . Однопараметрическое множество конгруэнтных характеристик $\{t^1\}$, полученное в результате описанного смещения вдоль оси j^1 , может быть представлено уравнениями:

$$\begin{aligned} x_{1t} &= x_{1t}(\lambda) = x_t(\lambda), \\ y_{1t} &= y_{1t}(\lambda) = y_t(\lambda), \\ z_{1t} &= z_{1t}(\lambda) = z_t(\lambda) + s, \end{aligned} \quad (3)$$

где s — параметр множества $\{t^1\}$. Уравнение полярной плоскости G^0 имеет вид:

$$y_1 + z_1 \cdot tg\varphi_{R1} = 0 \quad (4)$$

и позволяет на основании (2) записать уравнение ЛЗ

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\lambda), \\ y_1 &= y_1(\lambda), \\ z_1 &= z_1(\lambda) = -\frac{y_1(\lambda)}{tg\varphi_{R1}}, \end{aligned} \quad (5)$$

а также определить значение s_0 параметра s , соответствующее началу процесса движения контактной точки по ЛЗ и характеризующее положение t_{H^1} характеристики относительно самой характеристики t^1

$$s_0 = -\frac{y_1(\lambda_k) + z_1(\lambda_k) \cdot tg\varphi_{R1}}{tg\varphi_{R1}}, \quad (6)$$

где λ_k — одно из двух граничных значений λ_0 или λ_{H^1} параметра λ , при выборе которого учитывается направление смещения характеристики t^1 в ее начальное положение t_{H^1} . Выбор начального положения t_{H^1} зависит от НХ. Для значения параметра $\lambda = \lambda_i$ можно указать i -ую точку на ЛЗ:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\lambda_i), \\ y_1 &= y_1(\lambda_i), \\ z_1 &= z_1(\lambda_i) = -\frac{y_1(\lambda_i)}{tg\varphi_{R1}}, \end{aligned} \quad (7)$$

через которую проходит линия t_i^1 множества $\{t^1\}$, при этом положение t_i^1 относительно t^1 определяется значением s_i параметра s :

$$s_i = -\frac{y_1(\lambda_i) + z_1(\lambda_i) \cdot tg\varphi_{R1}}{tg\varphi_{R1}}. \quad (8)$$

В таком случае смещение s_i^0 линии t_i^1 от начального положения t_{H^1} характеристики определяется следующим образом:

$$s_i^0 = |s_0 - s_i|, \quad (9)$$

а угол поворота φ_1 детали с ВП₁ от ее начального положения, соответствующего t_{H^1} , будет следующим

$$\varphi_1 = \frac{s_i^0}{h_1} = \frac{|s_0 - s_i|}{h_1}. \quad (10)$$

Полученные координаты (7) контактной точки на ЛЗ и соответствующий угол поворота (10) исходной ВП₁ позволяют при помощи формул преобразования систем координат определить координаты контактной точки на самой ВП₁. Координаты контактной точки на искомой ВП₂ определяют уравнениями (7), (10) и соответствующими формулами преобразования систем координат [10].

В заключение работы отметим, что идея рассмотренной геометрической модели профилирования

червячной фрезы была предложена одним из соавторов достаточно давно [10] и, несмотря на простоту ее вычислительного алгоритма (алгоритм работает в режиме прямого счета) и выполненные практические реализации, не нашла должного применения в практике проектирования режущих инструментов. Заметим также, что червячные фрезы, работающие по схеме точечного взаимоогибания, обеспечивают высокопроизводительную обработку поверхностей деталей и, несмотря на недостаток формообразования этих поверхностей такими инструментами (в силу точечного формообразования появляется огранка на обрабатываемой поверхности), — эти инструменты нашли достаточно широкое практическое применение [7].

Библиографический список

1. Фрайфельд, И. А. Инструменты, работающие методом обкатки / И. А. Фрайфельд. — М.; Л.: Машгиз, 1948. — 251 с.
2. Панкратов, Ю. М. Профилирование обкатных инструментов / Ю. М. Панкратов. — СПб.: Политехника сервис, 2010. — 158 с.
3. Залгаллер, В. А. Теория огибающих / В. А. Залгаллер. — М.: Изд-во «Наука», 1975. — 104 с.
4. Литвин, Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений / Ф. Л. Литвин. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1968. — 584 с.
5. Люкшин, В. С. Основания кинематического метода в теории зацеплений / В. С. Люкшин, Р. М. Пеньков // Известия вузов. Машиностроение. — 1974. — № 11. — С. 45–48.
6. Лашнев, С. И. Расчеты конструирования металлорежущих инструментов с применением ЭВМ / С. И. Лашнев, М. И. Юликов. — М.: Машиностроение, 1975. — 391 с.
7. Справочник конструктора-инструментальщика / В. И. Баранчиков [и др.]. — М.: Машиностроение, 1994. — 560 с.
8. Панчук, К. Л. Кинематический метод профилирования дисковых инструментов / К. Л. Панчук // Известия вузов. Машиностроение. — 1979. — № 11. — С. 125–129.
9. Панчук, К. Л. Профилирование цилиндрической поверхности реечного инструмента по заданной винтовой поверхности изделия / К. Л. Панчук // Автоматизация технологических процессов с многоканальной обратной связью: межвуз. сб. / Новосибирский инж.-строит. ин-т. — Новосибирск, 1976. — С. 54–58.
10. Панчук, К. Л. Профилирование червячных фрез для обработки зубчатых деталей на основе геометрии и кинематики контакта / К. Л. Панчук // Автоматизация проектирования и математическое моделирование криволинейных поверхностей на базе ЭВМ: межвуз. сб. / Новосибирский инж.-строит. ин-т. — Новосибирск, 1977. — С. 54–60.

ПАНЧУК Константин Леонидович, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графики.

ПОЛШКОВ Владислав Юрьевич, студент группы МС-516.

БУДКО Иван Валерьевич, студент группы МС-516.

Адрес для переписки: e-mail: panchuk_KL@mail.ru

Статья поступила в редакцию 16.02.2011 г.

© К. Л. Панчук, В. Ю. Полшков, И. В. Будко

ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ВИНТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ РЕЕЧНЫМ ИНСТРУМЕНТОМ

Предложена методика формообразования обкаточного инструмента, основанная на переходе от плоской задачи к пространственной. Такой подход предполагает введение вспомогательной поверхности, исследование геометрических характеристик которой позволяет устанавливать влияние параметров рейки на форму профиля винтовой поверхности. Полученные результаты обогащают картину формообразования поверхностей, позволяют решить поставленную задачу средствами компьютерной графики, наглядно моделирующими процесс формообразования.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, формообразование, квазвинтовая поверхность.

Постановка задачи формообразования винтовых поверхностей

Процесс проектирования режущего инструмента включает несколько этапов. Одним из важных элементов этого процесса является конструирование его формообразующей поверхности. Решению этой задачи посвящено большое количество работ, в том числе [1 – 4]. Во многих из них для выполнения расчета требуется вывод соответствующих зависимостей применительно к различным исходным данным. Часто такие зависимости имеют форму трансцендентных уравнений. Для их решения используют численные методы. Все это усложняет процесс профилирования инструмента.

Кроме того, во многих случаях профиль детали состоит не только из участков, полученных огибанием соответствующих участков инструмента, но и переходных кривых, линий подрезов. В этих случаях процесс профилирования носит итеративный характер. При этом на отдельных этапах проектирования осуществляется проверка полученных результатов графическими или аналитическими методами [1]. Часто теоретический профиль из технологических соображений заменяют отрезками и дугами окружностей. В этом случае важной задачей является сравнение исходного профиля изделия с реальным, который будет получен после корректировки профиля инструмента. Это также затрудняет процесс профилирования.

Эффективное решение задач формообразования поверхностей может быть выполнено с применением методов моделирования средствами компьютерной графики [5, 6], позволяющих исследовать влияния различных параметров инструмента на форму профиля детали и наоборот, а также решить некоторые другие вопросы. Для поставленной задачи решение предусмотрено провести в два этапа:

- 1) разработать математические и конструктивные модели поверхностей и их отображения, используемые при моделировании обкаточного инструмента;
- 2) создать поверхностные и твердотельные модели, наглядно реализующие алгоритм моделирования процесса формообразования.

Геометрическое моделирование формообразования винтовых поверхностей

Пусть профиль цилиндрической поверхности (ЦП) рейки задан параметрическими уравнениями вида

$$\begin{aligned}x_r &= x(t), \\ y_r &= y(t)\end{aligned}\quad (1)$$

в подвижной системе координат $0, X_r, Y_r, Z_r$, а винтовая поверхность (ВП) детали в системе координат $0, X_{vp}, Y_{vp}, Z_{vp}$ (рис. 1). Тогда уравнения перехода из системы координат рейки в систему координат ВП имеют вид

$$\begin{aligned}z_{vp}^r &= z_r \cdot \cos \alpha - x_r \cdot \sin \alpha, \\ x_{vp}^r &= z_r \cdot \sin \alpha + x_r \cdot \cos \alpha, \\ y_{vp}^r &= y_r - R,\end{aligned}\quad (2)$$

где R – радиус начального цилиндра ВП детали.

Уравнения (1) и (2) определяют цилиндрическую поверхность Ω в системе координат детали. ВП детали является огибающей ЦП в ее винтовом движении с параметром p . Уравнения семейства цилиндрических поверхностей будут

$$\begin{aligned}x_{vp}^{sem} &= x_{vp}^r \cdot \cos \varphi - y_{vp}^r \cdot \sin \varphi, \\ y_{vp}^{sem} &= x_{vp}^r \cdot \sin \varphi + y_{vp}^r \cdot \cos \varphi, \\ z_{vp}^{sem} &= z_{vp}^r + p \cdot \varphi,\end{aligned}\quad (3)$$

где φ – угол поворота поверхности рейки вокруг оси винтовой поверхности.

Для определения винтовой поверхности детали найдем ее торцовый профиль, являющийся огибающей семейства кривых, полученных в пересечении семейства цилиндрических поверхностей плоскостью $z_{vp} = 0$, а значит, $z_{vp}^{sem} = 0$. Тогда из последнего уравнения системы (3) получим, $z_{vp}^r = -p \cdot \varphi$. Подставив выражение для переменной z_{vp}^r в первое уравнение системы (2), имеем

$$z_r(t) = x_r \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{p \cdot \varphi}{\cos \alpha}.\quad (4)$$

После подстановки (4) в первое уравнение системы (2) и преобразований получим

$$x_{vp}^r = \frac{x_r}{\cos \alpha} - R \cdot \varphi,\quad (5)$$

где $R = p \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

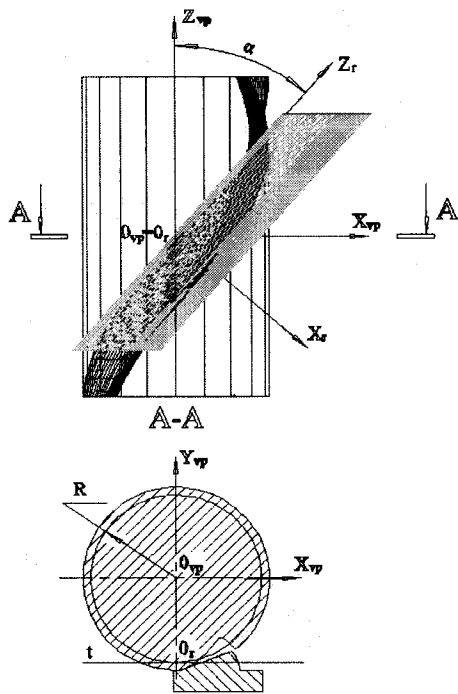


Рис. 1. Системы координат, связанные с деталью $O_{vp} X_{vp} Y_{vp}$ и рейкой $O_r X_r Y_r$; t – центрида рейки; R – радиус начального цилиндра ВП детали; α – угол между осью ВП и образующей ЦП рейки

Подставив в первые два уравнения системы (3) выражения для y_{vp}^c и x_{vp}^c из уравнений (2) и (5), соответственно получим

$$\begin{aligned} x_{vp}^{sem} &= \frac{x_r}{\cos \alpha} \cdot \cos \varphi - y_r \cdot \sin \varphi - R \cdot (\varphi \cdot \cos \varphi - \sin \varphi), \\ y_{vp}^{sem} &= \frac{x_r}{\cos \alpha} \cdot \sin \varphi + y_r \cdot \cos \varphi - R \cdot (\varphi \cdot \sin \varphi + \cos \varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Проанализировав полученные уравнения, можно сделать выводы:

1) кривые семейства (6) конгруэнтны кривой, полученной косоугольным проецированием поверхности Ω на координатную плоскость $O_{vp} X_{vp} Y_{vp}$ (направление проецирования параллельно оси $O_{vp} Z_{vp}$);

2) рассматриваемое семейство может быть получено, если одну из кривых этого семейства связать с подвижной прямой t (рис. 2), катящейся по окружности радиуса R .

Следовательно, рассматриваемая пространственная задача сводится к плоской задаче по определению огибающей семейства кривых, связанных с центридой рейки, катящейся по центриде колеса. Эта задача решается как способами, использующими дифференциальные параметры кривой семейства, так и с применением средств компьютерной графики [5], моделирующих процесс формообразования и не требующих этих параметров.

С другой стороны, уравнения (6) можно рассматривать как график отображения кривых в пространстве на координатную плоскость $O_{vp} X_{vp} Y_{vp}$. Уравнения этого семейства описывают некоторую поверхность Φ (рис. 2) и имеют вид

$$x_{vp}^\Phi = x_{vp}^{sem}, y_{vp}^\Phi = y_{vp}^{sem}, z_{vp}^\Phi = p_1 \cdot \varphi, \quad (7)$$

где p_1 – константа большая нуля.

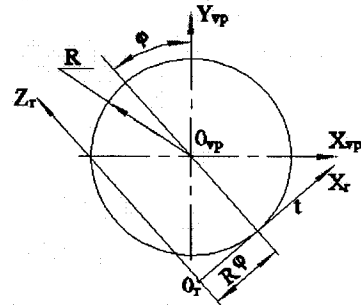


Рис. 2. Системы координат, связанные с профилями детали $O_{vp} X_{vp} Y_{vp}$ и рейки $O_r X_r Y_r$; t – центрида рейки, φ – угол поворота центриды рейки

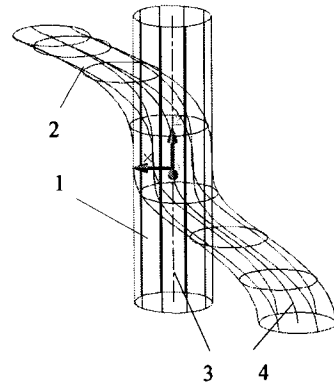


Рис. 3. Отображение цилиндрической поверхности в трубчатую: 1 – цилиндрическая поверхность, 2 – трубчатая поверхность, 3 – ось цилиндрической поверхности, 4 – линия центров трубчатой поверхности

Свяжем с неподвижной системой координат $O_{vp} X_{vp} Y_{vp} Z_{vp}$ вспомогательную правую цилиндрическую винтовую поверхность (ЦВП) Ω (рис. 2), образованную винтовым движением кривой, полученной косоугольным проецированием ЦП на координатную плоскость $O_{vp} X_{vp} Y_{vp}$. Ее уравнение в параметрическом виде будет

$$\begin{aligned} x_{vp}^{cvp} &= \frac{x_r}{\cos \alpha} \cdot \cos \varphi - y_r \cdot \sin \varphi, \\ y_{vp}^{cvp} &= \frac{x_r}{\cos \alpha} \cdot \sin \varphi + y_r \cdot \cos \varphi, \\ z_{vp}^{cvp} &= p_1 \cdot \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Сравнивая системы уравнений (7) и (8) с учетом уравнений (6) и принимая $p=p_1$, запишем зависимости для получения координат точек поверхности Φ от координат точек вспомогательной ЦВП

$$\begin{aligned} x_{vp}^{sem-k} &= x_{vp}^{cvp} - R \cdot (\varphi \cdot \cos \varphi - \sin \varphi), \\ y_{vp}^{sem-k} &= y_{vp}^{cvp} - R \cdot (\varphi \cdot \sin \varphi + \cos \varphi), \\ z_{vp}^{sem-k} &= z_{vp}^{cvp}. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассматривая переход от ЦВП (ψ) к поверхности Φ как результат геометрического преобразования нетрудно заметить, что система (9) описывает нелинейное преобразование. Эта система задает отображение ψ в новую вспомогательную поверхность Φ , которую назовем *квазивиновой поверхностью* (КВП) (рис. 3). В рассматриваемом преобразовании ось ЦВП отображается в пространственную кривую,

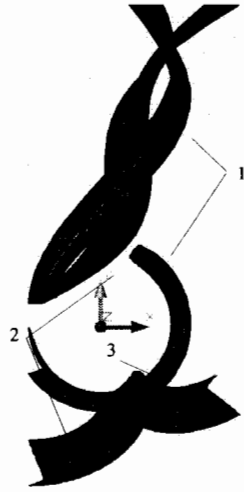


Рис. 4. Проекция моделей поверхностей: 1 – винтовая поверхность; 2 – квазिवинтовая поверхность; 3 – горизонтальный очерк КВП

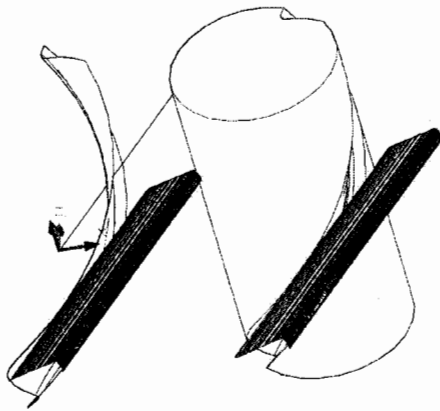


Рис. 6. Модели цилиндрической и винтовой сопряженных поверхностей

которая на координатную плоскость $O_{vp} X_{vp} Y_{vp}$ проецируется в эвольвенту. Цилиндрическая поверхность вращения с осью, совпадающей с осью ЦВП, отображается в трубчатую поверхность, у которой линией центров является упомянутая выше прямая, а плоскостью параллелизма – координатная плоскость $O X_{vp} Y_{vp}$. Полученная КВП используется далее при компьютерном формообразовании винтовой поверхности.

Как известно, касательная плоскость в точке (x_0, y_0, z_0) поверхности, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x(t, \varphi), \\ y &= y(t, \varphi), \\ z &= z(t, \varphi), \end{aligned} \quad (10)$$

записывается в виде

$$A \cdot (X - x_0) + B \cdot (Y - y_0) + C \cdot (Z - z_0) = 0,$$

где коэффициенты A, B и C определяются из зависимостей

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial t} \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \quad (11)$$

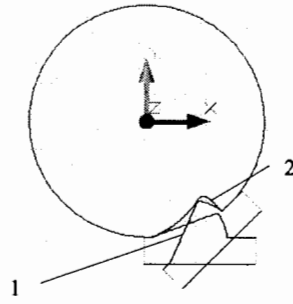


Рис. 5. Моделирование профиля ЦВП детали по очерку КВП: 1 – профиль КВП в процессе моделирования; 2 – профиль ЦВП после формообразования

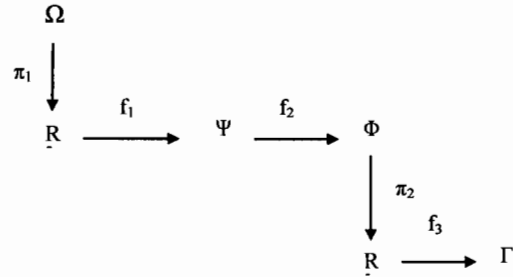


Рис. 7. Диаграмма отображений: π_1 – косоугольное проектирование поверхности Ω ; π_2 – ортогональное проектирование поверхности Φ

Для плоскости, параллельной оси OZ_{vp} , коэффициент C равен нулю и для рассматриваемой КВП, заданной уравнениями (9), после вычисления частных производных и подстановки в зависимость для переменной C , получим

$$\begin{aligned} f(t, \varphi) &= x(t) \cdot \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t} \right) / (\cos \alpha)^2 + \\ &+ y(t) \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial t} - R \cdot \varphi \cdot \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t} \right) / \cos \alpha = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

где $\frac{\partial x(t)}{\partial t}, \frac{\partial y(t)}{\partial t}$ – частные производные по параметру t

переменных из уравнений (1).

Уравнение (12) устанавливает связь криволинейных координат t и φ , а совместно с уравнением (9) выделяют контурную линию на КВП. При этом ортогональная проекция контурной линии на плоскость $O_{vp} X_{vp} Y_{vp}$ является очерком этой поверхности. Этот очерк можно рассматривать как особенность отображения ортогональным проектированием КВП на плоскость $Z_{vp} = 0$ и, соответственно, огибающей рассматриваемого семейства кривых. Полученная огибающая является торцовым профилем искомого ЦВП.

Для установления возможных особых точек на очерке КВП (торцовом профиле ЦВП) запишем уравнение касательной к контурной линии этой поверхности. Так как контурная линия задается уравнениями (9) и (12), то уравнение касательной в точке (x_0, y_0, z_0) будет иметь вид

$$\frac{X - x_0}{k} = \frac{Y - y_0}{l} = \frac{Z - z_0}{m} \quad (13)$$

где $k = \frac{\alpha_{vp}^{sem}}{\alpha} \cdot \frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\alpha_{vp}^{sem}}{\alpha} \cdot \frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial \varphi}$, $l = \frac{\partial_{vp}^{sem}}{\alpha} \cdot \frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial_{vp}^{sem}}{\alpha} \cdot \frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial \varphi}$,

$$m = \frac{\partial z_{вр}^{зем}}{\partial t} \cdot \frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial z_{вр}^{зем}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial t}, \text{ причем } \frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial \varphi} \neq 0.$$

После вычисления частных производных и подстановки в выражения для k , l и m , получим

$$m = -p \cdot f_i(t, \varphi),$$

$$k = \frac{m}{p} \cdot \left(-\frac{x(t) \cdot \sin \varphi}{\cos \alpha} - y(t) \cdot \cos \varphi + R \cdot \varphi \cdot \sin \varphi \right) -$$

$$- R \cdot \frac{\partial x(t)}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t} \cdot \cos \varphi / \cos \alpha \right) - y(t) \cdot \sin \varphi,$$

$$l = \frac{m}{p} \cdot \left(-\frac{x(t) \cdot \cos \varphi}{\cos \alpha} - y(t) \cdot \sin \varphi - R \cdot \varphi \cdot \cos \varphi \right) +$$

$$+ R \cdot \frac{\partial x(t)}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t} \cdot \sin \varphi / \cos \alpha \right) + y(t) \cdot \cos \varphi.$$

Эти равенства используются для установления особых точек на очерке КВП и, соответственно, на профиле искомой ЦВП. Так особые точки на очерке КВП будут, если $|k| = |l| = 0$ или $m=0$.

Таким образом, полученные зависимости могут быть использованы при аналитическом профилировании как винтовой, так и цилиндрической поверхности детали, сопряженной как с цилиндрической поверхностью рейки.

Компьютерное моделирование формообразования

Описанные выше поверхности и их отображения реализованы средствами компьютерной графики. Для этого на первом этапе формируется модель тела инструментальной рейки и ее наклонное сечение (рис. 2). Кривая этого сечения является образующей винтовой поверхности ψ , которая нелинейным преобразованием отображается в КВП Φ (рис. 4).

Для получения очерка КВП выполняется ее отображение на координатную плоскость $O_{вр} X_{вр} Y_{вр}$ (рис. 4). Этот очерк является торцовым профилем искомой ЦВП, касающейся заданной цилиндрической поверхности рейки. Однако для получения модели ЦВП возникают определенные трудности в достижении необходимой точности ее профиля по полученной проекции. В связи с этим модели винтовых поверхностей целесообразно использовать для установления возможных особенностей на очерке КВП в зависимости от формы профиля, угла, а также радиуса R .

Для получения модели торцового профиля винтовой поверхности с необходимой точностью целесообразно воспользоваться программой, моделирующей процесс формообразования профиля колеса по заданному профилю рейки [5] (рис. 5). Полученный профиль используется для формирования цилиндрической и (или) винтовой поверхности, сопряженной с цилиндрической поверхностью рейки. Эти поверхности могут быть использованы и для моделирования других винтовых поверхностей [6]. Конечный результат моделирования представлен на рис. 6.

Последовательность моделирования, описанная выше, может быть представлена в виде диаграммы,

показанной на рис. 7. На ней отображение f_1 задается уравнениями (3) и переводит косоугольную проекцию исходной цилиндрической поверхности рейки во вспомогательную ЦВП. Нелинейное преобразование f_2 отображает вспомогательную ЦВП в КВП и задается уравнениями (7). Отображение f_3 переводит очерк КВП в искомую винтовую поверхность детали.

Практическая реализация этапов создания рассмотренных моделей выполнена в виде подпрограмм, написанных на языке программирования AutoLISP в среде САПР AutoCAD. Организация диалога по вводу исходных данных осуществлена на языке DCL (Dialog Control Language).

Выводы

На основании изложенного выше предлагаемая методика позволяет решать следующие задачи:

- формообразование винтовой или цилиндрической поверхности детали по заданной поверхности инструментальной рейки и параметрам их взаимного расположения как аналитически, так и средствами компьютерной графики на основе введения вспомогательной квазिवинтовой поверхности;

- целенаправленно, с использованием визуализации процесса формообразования, вносить изменения в форму профиля, как инструмента, так и изделия, а также корректировать параметры установки изделия относительно инструмента.

Так как рассматриваемая кинематическая схема является не только самостоятельной, но и промежуточной, то данные результаты применимы для различных типов обкаточного инструмента.

Библиографический список

1. Лашнев, С. И. Расчет и конструирование металлорежущих инструментов с применением ЭВМ / С. И. Лашнев, М. И. Юликов. — М.: Машиностроение, 1975. — 392 с.
2. Люкшин, В. С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов / В. С. Люкшин. — М.: Машиностроение, 1967. — 372 с.
3. Чемборисов, Н. А. Обзор методов профилирования червячной фрезы для зубчатых венцов / Н. А. Чемборисов, Т. Г. Девяева // Металлообработка. — 2010. — № 4. — С. 2–6.
4. Моделирование формообразования сложных поверхностей деталей / А. А. Ляшков [и др.] // Металлообработка. — 2010. — № 4. — С. 36–42.
5. Ляшков, А. А. Программа компьютерного моделирования процесса формообразования зубчатых колес методом обкатки инструментальной рейкой и долбяком / А. А. Ляшков. — М.: ВНИИЦ, 2008. — № 50200802071.
6. Ляшков, А. А. Программа компьютерного моделирования процесса формообразования винтовой поверхности детали инструментальной рейкой и червячной фрезой / А. А. Ляшков. — М.: ВНИИЦ, 2010. — № 50201001024.

ЛЯШКОВ Алексей Ануфриевич, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры инженерной геометрии и компьютерной графики.
Адрес для переписки: e-mail: 3dogibmod@mail.ru

Статья поступила в редакцию 16.02.2011 г.

© А. А. Ляшков