На правах рукописи

Магазев Алексей Анатольевич

ИНТЕГРИРОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НА ГРУППАХ ЛИ И ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

01.04.02 – Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Томск – 2017

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Омский государственный технический университет» на кафедре «Комплексная защита информации».

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Широков Игорь Викторович

Официальные оппоненты:

Брежнев Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», кафедра квантовой теории поля, доцент

Варламов Вадим Валентинович, доктор физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный индустриальный университет», кафедра прикладной математики и информатики, профессор

Крыхтин Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный педагогический университет», кафедра теоретической физики, профессор

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Защита состоится 26 октября 2017 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.07, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36 (главный корпус СФТИ ТГУ, аудитория 211).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/MagazevAA26102017.html

Автореферат разослан «_____» сентября 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Киреева Ирина Васильевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Несмотря на то, что в настоящее время теоретическая физика использует почти весь имеющийся арсенал современной математики, для решения ее задач основными инструментами продолжают оставаться приближенные методы. Применение этих методов, однако, не всегда позволяет получать исчерпывающую информацию о свойствах изучаемой физической системы. В качестве иллюстрации отметим текущее состояние квантовой теории поля в искривленном пространстве – времени, где разрешение многих важных проблем упирается в отсутствие конструктивных способов построения точных решений квантово-полевых уравнений. Например, такие квантовые эффекты как поляризация вакуума и рождение частиц во внешних интенсивных полях не могут быть исчерпывающе описаны в рамках теории возмущений, поэтому знание точных решений квантово-полевых уравнений в этих случаях особенно необходимо. Не меньшую важность представляет и задача интегрирования уравнений движения классических частиц во внешних полях. Точные решения этих уравнений не только имеют самостоятельную ценность, но и полезны в квантовой теории, например, при интерпретации интегралов движения.

Известно, что интегрируемость дифференциального уравнения неразрывно связана с наличием у него симметрий. На математическом языке симметрия реализуется группой преобразований, оставляющих инвариантным множество решений уравнения. В связи с этим исследование групп симметрии дифференциальных уравнений и разработка с их помощью методов интегрирования представляет собой важное направление в математической и теоретической физике.

В рамках теоретико-группового подхода к проблеме интегрируемости интерес представляют две задачи. Первая связана с нахождением группы симметрии некоторого заданного уравнения, актуального в той или иной физической теории. К настоящему моменту в контексте данной задачи накоплено огромное количество результатов; в частности, группы симметрии большинства физически интересных дифференциальных уравнений известны. Вторая задача, являющаяся более сложной, а поэтому и более насущная, состоит в построении классов дифференциальных уравнений, допускающих в качестве группы симметрии данную конкретную группу, реализованную, как правило, некоторым набором инфинитезимальных генераторов (операторов симметрии). Решение этой, по сути, классификационной задачи несомненно представляется более актуальным, так как в конечном счете приводит к возможности выделения классов точно интегрируемых моделей физических теорий.

Наряду с отмеченными двумя задачами следует выделить еще одно важное направление исследований, существующее в рамках симметрийного подхода к проблеме интегрируемости. Речь идет о процедуре «включения» в рассматриваемые уравнения внешних полей, и о влиянии этой процедуры на симметрию уравнения. Подобная проблема актуальна, например, в квантовой теории поля, где наиболее интересные эффекты проявляются в случае взаимодействия квантованных полей с внешним электромагнитным полем. Очевидно, что в общем случае «включение» внешнего поля приведет к полной или частичной потере симметрии уравнения. Даже если дифференциальные уравнения, описывающие физическую систему, были интегрируемы тем или иным методом, для построения их решений во внешнем поле оставшихся симметрий может не хватить. В этой связи интерес представляет проблема выделения классов внешних полей, «включение» которых либо сохраняет структуру исходной алгебры симметрии, либо деформирует ее таким образом, чтобы задача об интегрируемости рассматриваемого уравнения оставалась бы содержательной.

Наиболее естественным образом симметрии дифференциальных уравнений физических теорий возникают как следствия имеющихся геометрических симметрий конфигурационных пространств используемых моделей. Отметим, что практически все использующиеся в настоящее время точно интегрируемые модели общей теории относительности связаны с (псевдо)римановыми многообразиями, допускающими действие различных групп преобразований. Например, в качестве популярных космологических моделей часто выступают однородные изотропные пространства Робертсона – Уокера. Метрика пространства Робертсона – Уокера является простейшим обобщением метрики пространства Минковского, что дает возможность использовать вычислительные методы квантовой теории поля, развитые для случая плоского пространства – времени. Не смотря на это, уже на примере этой простейшей модели было продемонстрировано существование некоторых нетривиальных квантовых эффектов, не имеющих места в пространстве – времени Минковского. Кроме пространств Робертсона – Уокера, особое внимание специалистов также привлекает пространство де Ситтера, которое является максимально симметрическим вакуумным решением уравнений Эйнштейна с положительной космологической постоянной. Так же как и пространство – время Минковского, пространство де Ситтера обладает 10-параметрической группой преобразований, что весьма облегчает аналитические расчеты, осуществляемые в рамках данной модели.

Вышеуказанные модельные примеры, а также ряд анизотропных космологических моделей, использующихся в квантовой теории поля и общей теории относительности, тем не менее носят довольно ограниченный характер. Подобные пространства обладают широкими группами симметрии, что дает возможность сравнительно легко осуществлять процедуру построения точных решений классических и квантовых уравнений. С другой стороны, наличие большого числа симметрий устанавливает довольно жесткие ограничения на возможность проявления различных квантовых эффектов в рамках подобных моделей. В связи с этим интерес представляет рассмотрение более общего класса псевдоримановых многообразий, обладающих группами симметрии с меньшим числом параметров, но в которых, тем не менее, возможно осуществление точного интегрирования соответствующих уравнений. В частности, актуальными представляются классы моделей, имеющих «скрытые» симметрии, то есть симметрии, не сводящиеся к группам движений псевдоримановых многообразий.

Степень разработанности темы исследования

Методам точного интегрирования уравнений теоретической и математической физики посвящена обширная литература. При этом подходы, применяемые к решению классических и квантовых дифференциальных уравнений, как правило, могут сильно отличаться друг от друга. Например, традиционные способы интегрирования конечномерных гамильтоновых систем уравнений базируются на хорошо известной теореме Лиувилля – Арнольда, либо на ее некоммутативном обобщении, предложенном А. Т. Фоменко и А. С. Мищенко[1]. В то же время стандратные подходы к интегрированию квантово-полевых уравнений, таких как уравнение Клейна – Гордона и Дирака, реализуются обычно в рамках схемы полного или частичного разделения переменных. Отметим, что метод разделения переменных, получивший первоначальное развитие в работах К. Якоби, П. Штеккеля и Т. Леви-Чивиты, до сих пор является одним из самых эффективных методов построения точных решений дифференциальных уравнений. Следует также заметить, что в настоящий момент теория разделения переменных является полностью завершенной для геодезического уравнения Гамильтона – Якоби, а также для линейного скалярного дифференциального уравнения второго порядка. Это оказалось возможным благодаря теореме о необходимых и достаточных условиях разделения переменных, доказанной В. Н. Шаповаловым[2], и сводящей задачу разделения переменных к задаче построения полных наборов операторов симметрии. Имея огромное теоретическое значение, данная теорема также позволила провести систематизацию практически всех известных точных решений уравнений квантовой механики с внешними полями, а также найти обширные классы новых полей и соответствующих им точных решений.

Проблема поиска новых классов псевдоримановых многообразий и внешних полей на них, допускающих разделение переменных в соответствующих квантово-полевых уравнениях, на фоне выполненных исследований представляется в значительной мере исчерпанной. В связи с этим приобретает интерес разработка новых методов и подходов точного интегрирования дифференциальных уравнений, отличающихся от методов теории разделения переменных.

В 90-ых годах прошлого века появилась серия совместных работ А. А. Шаповалова и И. В. Широкова, посвященных новому эффективному методу построения точных решений линейных дифференциальных уравнений, выходящему за рамки разделения переменных[3]. Являясь нетривиальным обобщением метода некоммутативного интегрирования гамильтоновых систем, указанный метод продемонстрировал широкие возможности применения к проблеме точного интегрирования уравнений квантовой механики. Несколько позже также была выяснена глубокая связь этого метода с методом орбит А. А. Кириллова, устанавливающим соответствие между неприводимыми унитарными представлениями групп Ли и их орбитами коприсоединенного представления. Это, в свою очередь, послужило толчком к появлению целой серии публикаций, посвященных применению метода орбит к различным задачам теоретической физики.

Также нельзя не отметить тот факт, что обладая бесспорной практической ценностью,

---

[1] Мищенко, А. С. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко // Функциональный анализ и его приложения. – 1978. – Т. 12, № 2. – С. 46-56.

[2] Шаповалов, В. Н. Пространства Штеккеля / В. Н. Шаповалов // Сибирский математический журнал. – 1979. – Т. 20, № 5. – С. 1117-1130.

[3] Шаповалов, А. В. Некоммутативное интегрирование линейных дифференциальных уравнений / А. В. Шаповалов, И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. – 1995. – Т. 104, №. 2. – С. 195-213.

метод некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений имеет и важное методологическое значение. В частности, так же как и в методе разделения переменных здесь прослеживается общность алгебраических конструкций, связанных с симметрийными свойствами интегрируемых квантовых уравнений и соответствующих им классических гамильтоновых систем. Отметим, что детальное понимание такой взаимосвязи позволяет использовать весь накопленный опыт интегрирования и качественного анализа уравнений классической механики к проблеме построения точных и приближенных решений квантовых уравнений.

Цели и задачи диссертационной работы

Цель настоящей диссертационной работы — развитие методов точного интегрирования классических и квантовых дифференциальных уравнений во внешних полях, заданных на многообразиях групп Ли и однородных пространствах. Основные решаемые при этом задачи могут быть сформулированы следующим образом.

1) Разработать эффективный алгоритм координатной реализации транзитивных действий произвольной группы Ли по ее алгебре Ли.

2) Построить специальное каноническое преобразование, сводящее задачу интегрирования инвариантных гамильтоновых потоков на группах Ли к задаче интегрирования гамильтоновых систем на орбитах коприсоединенного представления и, как следствие, получить соответствующий алгебраический критерий интегрируемости. Получить явную формулу для полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби на группах Ли.

3) Исследовать связь между специальным каноническим преобразованием и неприводимыми унитарными представлениями группы Ли. Распространить метод интегрирования инвариантных гамильтоновых систем на группах Ли на их квантовые аналоги.

4) Разработать конструктивный метод интегрирования в квадратурах гамильтоновых потоков на однородных пространствах групп Ли. Получить необходимые и достаточные условия интегрируемости геодезических потоков инвариантных метрик и метрик субмерсии на однородных пространствах.

5) Исследовать проблему интегрируемости гамильтоновых систем в вариациях. Получить критерии интегрируемости уравнения Якоби на однородных пространствах.

6) Предложить когомологический подход к описанию внешних электромагнитных полей на псевдоримановых многообразиях. Решить проблему интегрируемости в квадратурах магнитных геодезических потоков на группах Ли и однородных пространствах. Исследовать возможность некоммутативной интегрируемости уравнений Вонга.

7) Разработать общий алгоритм получения точных решений релятивистских волновых уравнений с некоммутативными алгебрами симметрии во внешних электромагнитных полях.

Научная новизна

В диссертационной работе впервые решен ряд важных научных задач и получен ряд новых результатов.

Предложен эффективный алгоритм восстановления транзитивных действий групп Ли, использующий только структурные константы соответствующих алгебр Ли. Впервые показано, что в локальных координатах транзитивное действие группы Ли всегда может быть построено в квадратурах.

Введено и исследовано специальное каноническое преобразование в пространстве кокасательного расслоения группы Ли, сводящее задачу интегрирования лево- или правоинвариантных гамильтоновых потоков к задаче интегрирования канонических гамильтоновых систем на коприсоединенных орбитах. Доказано, что производящая функция специального канонического преобразования строится в квадратурах. Впервые получена явная общая формула для полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби на группе Ли.

Установлена связь между специальным каноническим преобразованием и неприводимыми унитарными представлениями группы Ли, которая позволила распространить метод интегрирования инвариантных гамильтоновых систем на их квантовые аналоги. На основе этой связи предложен конструктивный алгоритм построения обобщенных матричных элементов неприводимых унитарных представлений.

Специальное каноническое преобразование обобщено на случай однородного пространства, что позволило предложить новый эффективный метод интегрирования геодезических потоков на псевдоримановых многообразиях с транзитивными группами преобразований. Как следствие, впервые получены необходимые и достаточные условия интегрируемости в квадратурах геодезических потоков для двух классов псевдоримановых метрик на однородных пространствах: инвариантных метрик и метрик субмерсии. Исчерпывающим образом исследована проблема интегрируемости геодезических потоков инвариантных метрик на трех- и четырехмерных псевдоримановых однородных пространствах.

Впервые поставлена и решена задача об интегрируемости уравнения Якоби на однородных пространствах. В частности, показано, что интегрируемость уравнения Якоби является следствием интегрируемости соответствующего уравнения геодезических.

Установлено биективное соответствие между когомологиями алгебр Ли и классами внешних электромагнитных полей, допускающих симметрию уравнений движения классических заряженных частиц. Но основе этого соответствия предложен оригинальный классификационный подход к описанию электромагнитных полей на произвольных псевдоримановых многообразиях. Полностью решена проблема интегрируемости в квадратурах инвариантных магнитных геодезических потоков на группах Ли и однородных пространствах. Впервые удалось доказать, что магнитный геодезический поток на произвольном четырехмерном псевдоримановом многообразии с нетривиальной группой изотропии всегда интегрируем в квадратурах. Описана общая структура алгебры линейных интегралов движения уравнений Вонга и исследована возможность ее применения к некоммутативному интегрированию этих уравнений.

Исследована структура киллинговой алгебры симметрии уравнений Клейна – Гордона и Дирака во внешнем электромагнитном поле на произвольном псевдоримановом многообразии. Развит метод интегрирования этих уравнений на группах Ли и получен соответствующий алгебраический критерий интегрируемости. Предложена общая схема построения точных решений релятивистских волновых уравнений во внешних электромагнитных полях.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес с точки зрения дальнейшего прогресса в квантовой теории поля в искривленном пространстве – времени. В частности, методы и подходы, развитые в настоящем исследовании, будут полезны при изучении квантовых эффектов, которые не могут быть последовательно описаны в рамках теории возмущений. Полученные в диссертации критерии интегрируемости также могут быть полезны при выборе математических моделей общей теории относительности и гравитации, в рамках которых возможно точное аналитическое исследование квантовых и классических уравнений. Кроме того, результаты настоящего диссертационного исследования имеют несомненную методологическую ценность, демонстрируя, в частности, возможность использования единого теоретико-группового подхода к решению проблем интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих динамику квантовых и соответствующих им классических систем. Часть результатов диссертации также может быть использована в учебном процессе, например, при обучении студентов современным методам математической физики.

Методология и методы исследования

Построение точных решений дифференциальных уравнений, описывающих динамику классических и квантовых систем, является нетривиальной задачей и требует привлечения аппарата теории групп и алгебр Ли, теории представлений и дифференциальной геометрии. В настоящей диссертационной работе при исследовании проблем интегрируемости классических и квантовых уравнений мы существенно используем два метода: метод орбит и метод некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Метод орбит, развитый в работах А. А. Кириллова, Б. Костанта, Л. Аусландера и Л. Пуканского, принадлежит к теориям, которые дают возможность изучать вопросы симметрии и интегрирования дифференциальных уравнений алгебраическими методами. В свою очередь, метод некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений, разработанный относительно недавно А. А. Шаповаловым и И. В. Широковым, представляет собой серьезную альтернативу методу разделения переменных и позволяет конструктивно строить точные решения релятивистских волновых уравнений с использованием их некоммутативных алгебр симметрии. При исследовании интегрируемых геодезических на однородных пространствах мы используем некоторые современные результаты дифференциальной геометрии, в особенности метод псевдоримановых субмерсий. Кроме того, симметрия классических и квантовых уравнений движения во внешних полях изучается нами с позиций теории когомологий групп и алгебр Ли.

Положения, выносимые на защиту

1. Представлен конструктивный алгоритм восстановления в локальных координатах транзитивных действий группы Ли по ее алгебре Ли.

2. Предложено специальное каноническое преобразование, сводящее задачу интегрирования инвариантных гамильтоновых потоков на кокасательных расслоениях групп Ли к

задаче интегрирования канонических гамильтоновых систем на орбитах коприсоединенного представления. Как следствие, получены алгебраические условия интегрируемости гамильтоновых потоков на группах Ли.

3. Получена явная общая формула для полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби на группах Ли.

4. Установлена связь между специальным каноническим преобразованием и неприводимыми унитарными представлениями групп Ли, которая позволяет распространить метод интегрирования классических гамильтоновых систем на группах Ли на их квантовые аналоги.

5. Специальное каноническое преобразование обобщено на случай интегрирования гамильтоновых потоков на однородных пространствах. Разработан конструктивный метод интегрирования геодезических потоков на однородных пространствах с инвариантными метриками и метриками субмерсии; получены необходимые и достаточные условия интегрируемости геодезических потоков указанных метрик.

6. Исследована проблема интегрируемости гамильтоновых систем в вариациях. Получены условия интегрируемости уравнения Якоби на однородных пространствах.

7. Установлено биективное соответствие между когомологиями алгебр Ли групп движений и классами электромагнитных полей, допускающих симметрию уравнений движения классической заряженной частицы.

8. Получены алгебраические условия интегрируемости магнитных геодезических потоков на группах Ли и однородных пространствах, и предложен конструктивный метод их интегрирования в квадратурах.

9. Исследована структура алгебры линейных интегралов движения уравнений Вонга. В терминах этой алгебры сформулированы условия некоммутативной интегрируемости уравнений Вонга.

10. Развит метод интегрирования уравнений Клейна – Гордона и Дирака во внешнем электромагнитном поле на группах Ли, и получен соответствующий алгебраический критерий их интегрируемости. Построен общий алгоритм получения точных решений релятивистских волновых уравнений с некоммутативными симметриями во внешних электромагнитных полях.

Степень достоверности

Все представленные в диссертационной работе результаты снабжены строгими математическими доказательствами. Достоверность результатов подтверждается рядом нетривиальных примеров, а также сравнением с частными результатами других авторов.

Личный вклад автора

Все основные результаты получены лично автором. При выполнении всех работ автор принимал определяющее участие как в постановке, так и в решении задач.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на Всероссийской конференции «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение», приуроченной к 85-летию академика Л. В. Овсянникова (Новосибирск, 2004), XVI Международной летней школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики «Волга'16-2004» (Казань, 2004), XIX Международной летней школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики «Волга'19-2007» (Казань, 2007), Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 2008), Международной конференции «Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation» (Казань, 2010), Третьей Международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (Самара, 2012), Международной конференции «Quantum Field Theory and Gravity (QFTG'14)» (Томск, 2014), XVI Международной концеренции «Symmetry Methods in Physics (SYMPHYS-2014)» (Дубна, 2014), Международной конференции «Quantum Field Theory and Gravity» (Томск, 2016).

Результаты были обсуждены на научном семинаре кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Национального исследовательского Томского государственного университета, объединенном научном семинаре физического факультета Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского, научном семинаре Омского филиала Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Публикации

По теме диссертации опубликованы 24 научные работы [1–24], в том числе 13 статей в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (из них 1 статья в ведущем международном научном журнале, индексируемом Web of Science, 8 статей в российских научных журналах, переводные версии которых индексируются Web of Science), 1 монография (в соавторстве), 1 статья в сборнике научных трудов, 3 статьи в научных журналах, 6 публикаций в сборниках материалов международных научных конференций и международных летних школ-семинаров. Общий объем публикаций – 31,6 п.л., авторский вклад – 17,9 п.л. В опубликованных работах достаточно полно изложены материалы диссертации.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, заключения, двух приложений и списка литературы, включающего 237 источников. Диссертация изложена на 296 страницах машинописного текста, содержит 4 таблицы, 2 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования и описана степень ее разработанности, сформулированы основные цели и задачи работы, отмечена новизна полученных результатов и их теоретическая значимость, выделены основные положения, выносимые на защиту.

В **главе 1** обсуждается проблема координатной реализации транзитивных действий групп и алгебр Ли. В частности, рассматривается задача реализации данной конечномерной алгебры Ли векторными полями или, более общо, неоднородными дифференциальными операторами первого порядка, а также задача восстановления транзитивного действия группы Ли по ее алгебре Ли. Отметим, что полученные в этой главе результаты существенно используются в последующих главах диссертационной работы.

В **§ 1.1** дан краткий обзор основных понятий теории групп и алгебр Ли. Приведены формулы для вычисления лево- и правоинвариантных векторных полей и дуальных им 1-форм, отмечена выделенная роль канонических координат на группе, дан краткий обзор существующих подходов к восстановлению закона группового умножения (функции композиции) по известному закону коммутации в соответствующей алгебре Ли. В заключение параграфа приведены основные сведения о действиях групп Ли на гладких многообразиях.

В **§ 1.2** описан эффективный алгоритм реализации данной конечномерной алгебры Ли векторными полями, являющимися инфинитезимальными генераторами транзитивного действия соответствующей группы Ли. Отметим, что проблема реализации алгебр Ли векторными полями представляется актуальной с точки зрения теоретико-группового подхода к классификации дифференциальных уравнений в частных производных, а также в вопросах классификации псевдоримановых метрик на многообразиях с группами движений. Кроме того, реализация алгебр Ли векторными полями представляет собой важный этап в решении задачи построения релятивистских волновых уравнений во внешних полях с заданной группой симметрии.

§ 1.3 посвящен проблеме восстановления транзитивных действий группы Ли по ее алгебре Ли. Доказаны утверждения, из которых следует, что локальный закон группового умножения (функция композиции) в любых канонических координатах на группе может быть восстановлен по структурным константам соответствующей алгебры Ли с помощью квадратур. На основе этого результата представлен конструктивный алгоритм восстановления транзитивных действий заданной группы Ли. В отличие от традиционного подхода, основанного на известных теоремах Ли, описанный алгоритм сводится не к интегрированию систем дифференциальных уравнений в частных производных, а к вычислению квадратур и нахождению матричных экспонент. В качестве иллюстрирующего примера построена функция композиции шестимерной неразрешимой группы $St(1,\mathbb{R})$, имеющей нетривиальный центр, а также найдена функция действия этой группы на ее четырехмерном однородном пространстве.

В **§ 1.4** рассматривается более общая задача о реализации конечномерных алгебр Ли неоднородными дифференциальными операторами первого порядка, то есть задача построения *деформаций* алгебр векторных полей. Эта задача естественным образом возникает в теории проективных представлений групп Ли, а также в проблеме построения λ-представлений алгебр Ли. Приводятся основные положения теории деформаций алгебр Ли векторных полей, отмечается их связь с когомологиями групп и алгебр Ли, а также доказывается ряд технических утверждений, которые будут существенно использованы далее в диссертационной работе.

В **главе 2** исследуется проблема интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем на многообразиях групп Ли. Наиболее известный пример подобной системы — уравнения движения свободного ассиметрического волчка, которые, как известно, могут быть интерпретированы как уравнения геодезического потока на группе $SO(3)$, снабженной односторонне инвариантной римановой метрикой.

Не смотря на то, что интегрируемые геодезические потоки на группах Ли представляют собой популярный объект исследования в дифференциальной геометрии и механике, большинство значимых результатов здесь получено лишь для риманова случая, то есть для случая положительно-определенных метрик. Напротив, с точки зрения возможных приложений в теоретической физике геодезические индефинитных метрик на группах Ли представляют больший интерес, например, в общей теории относительности и космологии. Кроме того, исследование проблемы интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем на группах Ли представляет также интерес и с квантовой точки зрения, так как ряд важных свойств таких систем в определенном смысле переносится и на их соответствующие квантовые аналоги.

В **§ 2.1** рассматривается класс гамильтоновых систем на кокасательных расслоениях групп Ли,

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i},$$

функции Гамильтона $H(x,p)$ которых инвариантны относительно правого действия группы. Показано, что подобная гамильтонова система может быть сведена к гамильтоновой системе на орбите коприсоединенного представления группы, и к некоторой дополнительной неавтономной системе дифференциальных уравнений первого порядка. В заключение параграфа обсуждаются существующие подходы к интегрированию правоинвариантных гамильтоновых потоков на группах Ли.

В **§ 2.2** излагается алгебраический метод построения канонических координат на орбитах коприсоединенного представления групп Ли. Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ — дуальное пространство к алгебре $\mathfrak{g}$. На коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_\lambda \subset \mathfrak{g}^*$, проходящей через элемент $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, стандартным образом определяется замкнутая невырожденная G-инвариантная 2-форма ω_λ, называемая *формой Кириллова – Костанта*. В силу известной теоремы Дарбу, на орбите существуют локальные координаты (u, v), в которых форма Кириллова – Костанта принимает канонический вид: $\omega_\lambda = du \wedge dv$. В **§ 2.2** описан метод построения канонических координат на орбитах, определяемых u-линейными функциями вложения $\mathcal{O}_\lambda \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$:

$$f_i(u, v; \lambda) = \zeta_i^a(v) u_a + \chi_i(v; \lambda), \quad f_i(0, 0; \lambda) = \lambda_i.$$

Подобные координаты на орбите существуют тогда и только тогда, когда существует *поляризация* ковектора λ, то есть подалгебра $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ такая, что

$$\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{g} - \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_\lambda, \quad \langle \lambda, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \rangle = 0.$$

Заметим, что с классической (не квантовой) точки зрения канонические координаты (u, v) выглядят не совсем естественно; в ряде случаев введение данных координат сопряжено с «выходом» в комплексную область. Тем не менее, указанные координаты оказываются исключительно удобными при построении специального канонического преобразования, составляющего основу метода интегрирования гамильтоновых систем на группах Ли.

§ 2.3 посвящен центральной конструкции второй главы — специальному каноническому преобразованию в кокасательном расслоении группы Ли. Данное преобразование сводится к переходу от обычных фазовых координат (x, p) на T^*G к каноническим координатам (u, v) и (u', v') на многообразии $\mathcal{O}_\lambda \times \mathcal{O}_\lambda$ и к дополнительным координатам (J, τ), где J — локальные координаты в пространстве регулярных орбит коприсоединенного представления, τ — канонически сопряженные им величины. Показано, что производящая функция этого преобразования, выраженная в координатах u', v и J, вычисляется согласно формуле

$$S_{\lambda(J)}(u', v, x) = u'_a \Psi^a(v, x) + \int \chi_i(\Psi(v, x); \lambda(J)) \omega^i(x). \tag{1}$$

Здесь $\lambda(J)$ — некоторое локальное сечение расслоения $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*/G$, $\Psi : V \times G \to V$ — отображение, задающее действие группы G на однородном пространстве $V = \exp(\mathfrak{n}) \setminus G$, $\omega^i(x)$ — левоинвариантные 1-формы на группе G. Приводятся примеры построения специального канонического преобразования на трехмерных вещественных группах $E(2)$, $SO(3)$ и $SL(2, \mathbb{R})$. В заключение параграфа излагается метод интегрирования правоинвариантных гамильтоновых потоков на произвольных группах Ли, основанный на применении специального канонического преобразования. В качестве критерия интегрируемости произвольного правоинвариантного гамильтонова потока на группе Ли G получено следующее условие

$$\frac{1}{2} (\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind} \mathfrak{g}) < 2. \tag{2}$$

Здесь $\operatorname{ind} \mathfrak{g}$ — *индекс* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, который может быть вычислен через структурные константы C^k_{ij} алгебры согласно формуле

$$\operatorname{ind} \mathfrak{g} \equiv \inf_{\lambda \in \mathfrak{g}^*} \operatorname{corank} \| C^k_{ij} \lambda_k \|.$$

Классу правоинвариантных гамильтоновых систем принадлежат, в частности, геодезические потоки правоинвариантных псевдоримановых метрик на группах Ли. Имея в виду важные приложения геодезических потоков в дифференциальной геометрии, а также в теоретической и математической физике, данный случай рассмотрен более подробно в **§ 2.4**. Наряду с некоторыми общими результатами, в параграфе также приведен пример интегрирования геодезического потока метрики Мак-Леннана – Тарига – Таппера, являющейся решением системы уравнений Эйнштейна – Максвелла с тензором электромагнитного поля, не обладающего симметриями пространства – времени[4]:

$$ds^2 = dx_0^2 - 4x_2 dx_0 dx_3 - a^2 dx_1^2 - a^2 e^{-2x_1} dx_2^2 - \left(e^{2x_1} - 4x_2^2\right) dx_3^2, \quad a > 0. \tag{3}$$

---

[4] McLenaghan, R. G. A new solution of the Einstein–Maxwell equations / R. G. McLenaghan, N. Tariq // Journal of Mathematical Physics. – 1975. – Т. 16. – № 11. – С. 2306-2312.

Данная метрика имеет тип I по Петрову и является нештеккелевой, то есть не допускающей разделение переменных в соответствующем геодезическом уравнении Гамильтона – Якоби.

В **§ 2.5** решается задача построения полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби на группах Ли с произвольными правоинвариантными функциями Гамильтона. Общеизвестно, что традиционный способ решения этой задачи состоит в использовании метода разделения переменных, который не применим в случае псевдоримановых многообразий нештеккелева типа. В этой связи особо актуальны альтернативные подходы, позволяющие получать полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби вне рамок разделения переменных. В **§ 2.5** показано, что задача интегрирования уравнения Гамильтона – Якоби с произвольной правоинвариантной функцией Гамильтона редуцируется к аналогичной задаче на многообразии V, размерность которого равна $\dim V = (\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind} \mathfrak{g})/2$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\operatorname{ind} \mathfrak{g}$ — индекс алгебры $\mathfrak{g}$. Кроме того, получена явная формула, позволяющая восстанавливать полный интеграл исходного уравнения Гамильтона – Якоби по известному полному интегралу редуцированного уравнения Гамильтона – Якоби. В качестве иллюстрации построен полный интеграл геодезического уравнения Гамильтона – Якоби метрики МакЛеннона – Тарига – Таппера (3).

В **главе 3** вводится класс линейных дифференциальных уравнений на группах Ли, являющихся естественными квантовыми аналогами конечномерных гамильтоновых систем, рассмотренных в предыдущей главе. Описывается метод построения точных решений этих уравнений, основанный на теории гармонического анализа на группах Ли, и представляющий собой альтернативу методу разделения переменных. Исследуется связь некоторых конструкций этого метода со специальным каноническим преобразованием, предложенным в **§ 2.3**.

В **§ 3.1** рассматриваются классы лево- и правоинвариантных дифференциальных операторов на группе Ли G. Дается их описание в терминах инвариантных векторных полей, а также в терминах пуассоновой полиномиальной алгебры на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Формулируется следующее определение квантового уравнения на группе Ли.

Определение 1. Пусть G — связная группа Ли с правоинвариантной (левоинвариантной) мерой $d\mu(x)$. Линейное дифференциальное уравнение

$$H(x, \partial_x)\varphi(x) = 0, \quad \varphi \in L^2(G, d\mu(x)), \tag{4}$$

будем называть *квантовым уравнением* на группе Ли G, если $H(x, \partial_x)$ является правоинвариантным (левоинвариантным) дифференциальным оператором на группе.

§ 3.2 посвящен ключевой конструкции метода интегрирования квантовых уравнений на группах Ли — *λ-представлению алгебр Ли*. Впервые введенное в рамках метода некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений, λ-представление оказалось чрезвычайно эффективным инструментом построения точных решений релятивистских волновых уравнений. Согласно определению, λ-представление — это операторно неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, реализованное неоднородными дифференциальными операторами первого порядка, действующими в пространстве функций от $(\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind} \mathfrak{g})/2$ переменных:

$$\ell_i(v, \partial_v; \lambda) = \zeta_i^a(v)\partial_{v^a} + \frac{i}{\hbar}\,\chi_i(v; \lambda), \quad [\ell_i, \ell_j] = C_{ij}^k\,\ell_k.$$

Здесь $\hbar$ — некоторый положительный вещественный параметр. Описывается метод построения λ-представлений, основанный на известной процедуре индуцирования представлений с подалгебр. Отмечается связь λ-представлений с каноническими координатами на поляризованных орбитах коприсоединенного представления, а также рассматриваются примеры λ-представлений алгебр $\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{so}(3)$ и $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Использование λ-представлений алгебр Ли позволяет проводить эффективную процедуру гармонического анализа на многообразиях соответствующих групп Ли. Эта процедура подробно описана в **§ 3.3**. Важную роль здесь играют обобщенные матричные элементы $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)$ представления $T^\lambda(x)$ группы G, являющегося поднятием λ-представления соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\frac{d}{dt}T^\lambda(e^{te_i})\varphi(v)\Big|_{t=0} = \ell_i(v, \partial_v; \lambda)\varphi(v), \quad T^\lambda(x)\varphi(v) = \int\limits_V \mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)\varphi(v')d\mu(v'), \quad \varphi \in C^\infty(V).$$

Обобщенные матричные элементы $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)$ образуют полное и ортогональное семейство функций, что дает возможность построить прямое и обратное преобразования Фурье

$$\psi_\lambda(v, \bar{v}') = \int\limits_G \varphi(x)\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)d\mu(x),$$

$$\varphi(x) = \int\limits_{V\times V\times\Lambda} \overline{\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)}\psi_\lambda(v, v')d\mu(v)d\mu(v')d\mu(\lambda).$$

Данные преобразования решают задачи гармонического анализа и синтеза на группе G. Отметим, что обычно матричные элементы неприводимых бесконечномерных унитарных представлений группы Ли G определяются как собственные функции $\dim G$-мерного коммутативного набора операторов из обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}_R(G)) \times U(\mathfrak{g}_L(G))$, где посредством $\mathfrak{g}_R(G)$ и $\mathfrak{g}_L(G)$ обозначены право- и левоинвариантные обертывающие алгебры соответственно. С точки зрения приложений к проблеме интегрирования дифференциальных уравнений, изложенный в **§ 3.3** подход предпочтителен по следующим причинам. Во-первых, задача на собственные значения для совокупности коммутирующих между собой дифференциальных операторов не всегда может быть явно решена, в то время как обобщенные функции $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)$ всегда могут быть найдены в квадратурах. Во-вторых, после преобразования Фурье, определяемого обобщенными матричными элементами $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)$, образы лево- и правоинвариантных дифференциальных операторов на группе G снова будут являться дифференциальными операторами того же порядка, но с меньшим числом независимых переменных.

Между неприводимыми унитарными представлениями группы Ли G и специальным каноническим преобразованием в T^*G, описанным в **§ 2.3**, имеется тесная связь. Эта связь обсуждается в **§ 3.4**, и выражается формулой, связывающей обобщенные матричные элементы $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)$ унитарных представлений с производящей функцией $S_\lambda(u', v, x)$ специального канонического преобразования. В случае унимодулярной группы G эта формула имеет вид

$$\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x) = \int \overline{K_\lambda(u', v')} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_\lambda(u', v, x)\right] d\mu(u'), \tag{5}$$

где ядро $K_\lambda(u, v)$ интегрального преобразования и мера $d\mu(u)$ определяются из соотношения

$$\int \overline{K_\lambda(u', v')} \exp\left(\frac{i}{\hbar} u'_a v^a\right) d\mu(u') = \delta(v, \bar{v}').$$

Здесь $\delta(v, \bar{v}')$ — дельта-функция на многообразии $V = \exp(\mathfrak{n}) \setminus G$, определенная относительно меры $d\mu(v)$. Формула (5) не только представляет собой удобный рецепт явного вычисления обобщенных матричных элементов, но также является еще одним подтверждением глубокой фундаментальной концепции о связи между коприсоединенными орбитами и неприводимыми представлениями групп Ли. Напомним, что последовательное продвижение данной идеи легло в основу серии работ А. А. Кириллова, результатом которых явился известный метод орбит, хорошо зарекомендовавший себя в теории представлений групп и алгебр Ли, а также в теории геометрического квантования. В своем исследовании, однако, мы нацелены скорее на чисто конструктивный аспект, в связи с чем полученный результат интересует нас в первую очередь как основа *единого подхода* к интегрированию классических и квантовых дифференциальных уравнений на группах Ли. В заключение **§ 3.4** мы иллюстрируем описанную связь на примерах групп $SO(3)$, $E(2)$ и $SL(2, \mathbb{R})$.

В **§ 3.5** в качестве иллюстрации применения описанных выше конструкций изложен метод интегрирования квантовых уравнений на группах Ли. Показано, что задача построения базиса пространства решений квантового уравнения (4) сводится к аналогичной задаче для некоторого приведенного дифференциального уравнения с $(\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind} \mathfrak{g})/2$ независимыми переменными. Как следствие, получено алгебраическое условие интегрируемости квантового уравнения на произвольной группе Ли G, совпадающее с условием интегрируемости (2) соответствующей классической гамильтоновой системы. Данный результат является логическим следствием общности разработанных в диссертации подходов к интегрированию классических и квантовых дифференциальных уравнений на группах Ли. В заключение параграфа приведен пример интегрирования уравнения Клейна – Гордона для нештеккелевой метрики МакЛеннона – Тарига – Таппера (3).

Глава 4 посвящена задаче интегрирования в квадратурах геодезических потоков на однородных пространствах. Отметим, что проблема интегрируемости геодезических потоков является, пожалуй, одной из наиболее значимых проблем в дифференциальной геометрии. Огромный интерес решение данной задачи представляет также и в теоретической физике, в частности, в общей теории относительности и космологии.

К настоящему моменту проблема описания псевдоримановых многообразий, допускающих интегрируемые геодезические потоки, довольно далека до своего окончательного решения. Известны лишь сравнительно небольшие классы многообразий, на которых удается явным образом сконструировать интегрируемые геодезические потоки: компактные группы Ли, симметрические, или более общо, n-симметрические пространства, а также компактные однородные пространства с биинвариантными метриками. Отметим, что все перечисленные серии многообразий относятся к классу однородных пространств групп Ли.

В **§ 4.1** излагается классификационный подход к описанию орбит коприсоединенного представления групп Ли. Основным результатом данной классификации является декомпозиция дуального пространства $\mathfrak{g}^*$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на непересекающиеся инвариантные алгебраические поверхности $M_{(s)}$, каждая из которых является объединением коприсоединенных орбит размерности $\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g} - 2s$. Здесь s — целое неотрицательное число, называемое *степенью сингулярности* орбиты.

Далее мы детально разбираем специфическую ситуацию, когда функции Казимира алгебры Ли являются многозначными функциями своих аргументов и представляют собой лишь локальные инварианты коприсоединенного действия. Показано, что пространство коприсоединенных орбит в этом случае не является полуотделимым (относительно фактор-топологии, индуцируемой обычной топологией в $\mathfrak{g}^*$), следовательно группы Ли с подобными функциями Казимира относятся к классу так называемых *диких* групп. Отметим, что дикие группы представляют значительный интерес, в первую очередь в теории представлений. Например, для диких групп может иметься неоднозначность разложения унитарных представлений, а также может отсутствовать характер представления. Имея в виду специфику таких ситуаций, мы провели исследование с целью выявить подобные случаи среди алгебр Ли малых размерностей. Для этого были явно построены инварианты коприсоединенного представления всех вещественных алгебр Ли размерности меньше шести, и на основе полученных результатов найдены две пятимерные алгебры с не полуотделимым пространством орбит: алгебры $\mathfrak{g}_{5,17}$ и $\mathfrak{g}_{5,18}$[5].

В заключение **§ 4.1** показано, что метод орбит может быть эффективно применен к исследованию однородных пространств групп Ли. Каждому однородному пространству $M = H \setminus G$ поставлены в соответствие три целых неотрицательных числа — *индекс* i_M, *степень сингулярности* s_M и *дефект* d_M. Индекс i_M — это число функционально независимых тождеств, то есть функциональных соотношений между гамильтонианами действия однопараметрических подгрупп группы G на T^*M. Степень сингулярности s_M определяет размерность орбит коприсоединенного представления s_M-типа, являющихся образами G-орбит в T^*M при соответствующем отображении момента. Наконец, дефект d_M однородного пространства тесно связан с пуассоновой алгеброй функций из $C^\infty(T^*M)$, инвариантных относительно действия группы G; в определенном смысле дефект — это «степень некоммутативности» этой алгебры. Например, для симметрических или, более общо, коммутативных однородных пространств дефект равен нулю. Отметим, что числа i_M, s_M и d_M могут быть вычислены в терминах алгебр Ли групп G и H:

$$i_M = \dim\mathfrak{h}^\lambda, \quad s_M = \frac{1}{2}\left(\dim\mathfrak{g}^\lambda - \operatorname{ind}\mathfrak{g}\right), \quad d_M = \frac{1}{2}\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^\lambda - \dim\mathfrak{h}/\mathfrak{h}^\lambda.$$

Здесь $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп G и H соответственно, λ — элемент общего положения подпространства $\mathfrak{h}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}^\lambda \subset \mathfrak{g}$ — аннулятор ковектора λ, $\mathfrak{h}^\lambda \equiv \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^\lambda$.

В **§ 4.2** описываются два естественных класса псевдоримановых метрик на однородных пространствах — инвариантные метрики и метрики субмерсии. Инвариантные метрики на

---

[5] Мы используем классификацию пятимерных вещественных алгебр Ли, приведенную в работе Мубаракзянов, Г. М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка / Г. М. Мубаракзянов // Известия вузов. Математика. – 1963. – № 3. – С. 99-106.

однородных пространствах являются класическим объектом исследования дифференциальной геометрии, а также теории групп и алгебр Ли. На сегодняшний день геометрия таких метрик хорошо изучена и, кроме того, получены достаточно обширные классификационные результаты. Напротив, понятие псевдоримановой субмерсии сформировалось относительно недавно и в настоящее время представляет собой довольно популярный объект исследования в математической и теоретической физике. Так, например, теория (псевдо)римановых субмерсий довольно интенсивно применяется к изучению эйнштейновых многообразий; в рамках этого подхода уже получены обширные классификационные результаты. Римановы субмерсии также представляют немалый интерес в теоретической физике и имеют приложения в теории Янга – Миллса, теории Калуцы – Клейна, а также в супергравитации и теории струн.

§ 4.3 посвящен построению специального канонического преобразования в пространстве кокасательного расслоения T^*M однородного пространства $M = H \setminus G$. Указанное преобразование сводится к переходу от обычных фазовых переменных (x, p) на T^*M к новому набору переменных, в состав которого входят:

- переменные (u, v), которые являются каноническими координатами на орбитах коприсоединенного представления s_M-типа группы G;
- переменные (u', v'), которые представляют собой канонические координаты на симплектических листах пуассоновой алгебры инвариантных функций на T^*M;
- переменные (J, τ), где J представляют собой локальные координаты в пространстве коприсоединенных орбит s_M-типа, а τ — канонически сопряженные с ними величины.

Указанное преобразование является обобщением специального канонического преобразования, рассмотренного в **§ 2.3**, и служит основой для описываемого далее оригинального метода интегрирования геодезических потоков на однородных пространствах. Отметим, что в случае коммутативной группы G специальное каноническое преобразование в T^*M совпадает с хорошо известным каноническим преобразованием к переменным «действие – угол».

В **§ 4.4** специальное каноническое преобразование в T^*M применяется к решению задачи интегрирования геодезических потоков на однородных пространствах с инвариантными метриками и метриками субмерсии. Как следствие, сформулированы необходимые и достаточные условия интегрируемости указанных геодезических потоков в квадратурах.

В первом пункте **§ 4.4** показано, что после применения специального канонического преобразования, гамильтонова система геодезического потока инвариантной метрики преобразуется к канонической гамильтоновой системе, для которой координаты u, v и J являются интегралами движения. Тем самым интегрируемость исходной гамильтоновой системы определяется только числом канонических переменных (u', v'), равным удвоенному дефекту d_M однородного пространства. Данный результат выражается следующей теоремой.

Теорема 1. *Произвольная G-инвариантная гамильтонова система на кокасательном расслоении T^*M однородного пространства $M = H \setminus G$ редуцируется к автоном-*

ной $2d_M$–мерной гамильтоновой системе и, в частности, интегрируема в квадратурах тогда и только тогда, когда

$$d_M < 2.$$

В качестве примера, иллюстрирующего полученный результат, в квадратурах проинтегрирован геодезический поток инвариантной нештеккелевой метрики на четырехмерном однородном пространстве пятимерной неразрешимой группы преобразований $G = \mathbb{R}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{R})$. Также подробно исследуется проблема интегрируемости геодезических потоков инвариантных метрик на трех- и четырехмерных однородных пространствах с нетривиальными подгруппами изотропии; в частности, показано, что все такие геодезические потоки интегрируемы в квадратурах.

Во втором пункте **§ 4.4** показано, что в случае метрик субмерсии преобразованная гамильтонова система геодезического потока включает переменные u', v' и J как интегралы движения. Следовательно, интегрируемость в этой ситуации определяется только числом канонических переменных (u, v), то есть размерностью коприсоединенных орбит s_M-типа.

Теорема 2. *Геодезический поток на однородном пространстве $M = H \setminus G$ с произвольной метрикой субмерсии редуцируется к автономной $\dim \mathcal{O}_\lambda$–мерной гамильтоновой системе и в общем случае интегрируем в квадратурах тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind} \mathfrak{g}) - s_M < 2.$$

В качестве примера рассмотрена задача интегрирования в квадратурах геодезического потока метрики субмерсии на четырехмерном однородном пространстве с пятимерной дикой группой преобразований (группой Маутнера). Отметим, что использование специального канонического преобразования в этом случае является единственной альтернативой, так как имеющийся в задаче коммутативный набор интегралов движения содержит многозначную функцию, и поэтому стандартная техника ограничения гамильтоновой системы на совместную поверхность уровня этих интегралов не применима. В конце **§ 4.4** обсуждается проблема классификации однородных пространств с интегрируемыми геодезическими потоками метрик субмерсии, а также приводятся некоторые замечания об интегрируемости геодезических потоков биинвариантных метрик.

Глава 5 настоящей диссертационной работы посвящена исследованию интегрируемости гамильтоновых систем в вариациях, то есть систем дифференциальных уравнений, являющихся результатом линеаризации гамильтоновых систем на пуассоновых многообразиях. В частности, подробно изучается вариация геодезических потоков на псевдоримановых многообразиях, приводящая к известному уравнению Якоби — дифференциальному уравнению второго порядка, описывающему отклонения ξ^a геодезических при малых возмущениях начальных условий:

$$\nabla_{\dot{x}}^2 \xi^a + R^a_{bcd}\, \dot{x}^b \dot{x}^c \xi^d = 0. \qquad (6)$$

Здесь $\nabla_{\dot{x}}$ — оператор ковариантного дифференцирования вдоль касательного поля $\dot{x}$ к геодезической, R^a_{bcd} — компоненты тензора кривизны псевдориманова многообразия. Данное уравнение играет важную роль в вопросах устойчивости геодезических на римановых и псведоримановых многообразиях и, как следствие, представляет большой интерес в общей теории относительности.

В **§ 5.1** показано, что на касательном расслоении TN произвольного пуассонова многообразия $(N, \{\cdot,\cdot\})$ имеется пуассонова структура $\{\cdot,\cdot\}_T$, с помощью которой всякая гамильтонова система вместе со своей системой в вариациях может быть снова представлена в гамильтоновой форме. Описаны простейшие свойства данной пуассоновой структуры и рассмотрены некоторые простейшие примеры.

§ 5.2 содержит исследование системы в вариациях геодезического потока на произвольном псевдоримановом многообразии (M, g). Показано, что уравнение Якоби (6) можно представить в виде гамильтоновой системы некоторого геодезического потока на многообразии $T^*(TM)$. Доказано утверждение, согласно которому интегрируемость по Лиувиллю этого геодезического потока является следствием интегрируемости по Лиувиллю исходного геодезического потока на T^*M.

В **§ 5.3** доказано, что касательное расслоение TM всякого однородного пространства $M = H \setminus G$ снабжается естественной структурой однородного пространства с группой преобразований, являющейся прямым произведением группы G на абелеву группу $\mathbb{R}^n$, где $n = \dim G$. В качестве следствия этого результата показано, что гамильтонова система в вариациях геодезического потока инвариантной метрики (метрики субмерсии) на M является геодезическим потоком относительно некоторой инвариантной метрики (метрики субмерсии) на однородном пространстве TM. Эти факты позволили обобщить предложенный в главе 4 метод интегрирования геодезических потоков на однородных пространствах на случай интегрирования соответствующих уравнений Якоби.

Применение изложенного в предыдущем параграфе метода проиллюстрировано в **§ 5.4** на примере интегрирования уравнения Якоби на двумерной плоскости Лобачевского, являющейся простейшим симметрическим пространством отрицательной кривизны.

Построение точных решений уравнений движения заряженных частиц во внешних полях представляет собой следующий, более сложный этап в решении общей проблемы интегрирования классических уравнений теоретической физики. В то время как теория интегрирования геодезических потоков на настоящий день хорошо развита, аналогичная ей теория для конечномерных гамильтоновых систем, определяющих динамику заряженных частиц во внешних полях, находится еще в стадии развития. Отметим, что в настоящее время наибольшая исследовательская активность наблюдается по отношению к *магнитным геодезическим потокам*, то есть гамильтоновым потокам, описывающим движение заряженных частиц во внешних электромагнитных полях:

$$\dot{x}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial x^a} + \epsilon\, F_{ab}\,\frac{\partial H}{\partial p_b}, \tag{7}$$

Здесь (x^a, p_a) — фазовые координаты частицы, F_{ab} — компоненты замкнутой 2-формы, задающей внешнее поле, $H(x,p) = \frac{1}{2} g^{ab} p_a p_b$ — гамильтониан геодезического движения частицы, ϵ — вещественный параметр (заряд). Помимо исследования проблемы интегрируемости динамических систем вида (7), внимание специалистов также привлекает целый круг вопросов, связанных с различными топологическими особенностями таких систем.

Глава 6 посвящена проблеме интегрирования магнитных геодезических потоков на группах Ли и однородных пространствах. В этой главе также обсуждается проблема некоммутативной интегрируемости системы уравнений Вонга, описывающих движение классической заряженной частицы с изоспином во внешнем калибровочном поле.

В **§ 6.1** рассматриваются магнитные геодезические потоки на произвольных псевдоримановых многообразиях. Система дифференциальных уравнений (7), задающая магнитный геодезический поток, может быть представлена в гамильтоновой форме

$$\dot{x}^a = \{H, x^a\}_\epsilon, \quad \dot{p}_a = \{H, p_a\}_\epsilon, \tag{8}$$

где скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_\epsilon$, называемая *магнитной*, отличается от обычной канонической скобки на слагаемое, отвечающее внешнему полю:

$$\{\varphi, \psi\}_\epsilon = \frac{\partial \varphi}{\partial p_a}\frac{\partial \psi}{\partial x^a} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^a}\frac{\partial \psi}{\partial p_a} - \epsilon\, F_{ab}\frac{\partial \varphi}{\partial p_a}\frac{\partial \psi}{\partial p_b}.$$

В **§ 6.1** доказана теорема, описывающая структуру алгебры интегралов движения гамильтоновой системы (8), линейных по импульсным переменным.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* (M, g) *— псевдориманово многообразие, на котором задана замкнутая 2-форма* F*, и пусть* $\mathfrak{g} = \{\zeta_i = \zeta_i^a(x)\partial_{x^a}\}$ *— алгебра векторов Киллинга, сохраняющих внешнее поле:* $\mathscr{L}_{\zeta_i} F = 0$*. Тогда функции*

$$X_0^{(\epsilon)} = \epsilon, \quad X_i^{(\epsilon)} = \zeta_i^a(x) p_a - \epsilon \int F(\zeta_i, \cdot), \quad i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g};$$

являются интегралами магнитного геодезического потока (8) *и относительно магнитной скобки Пуассона образуют* $(\dim \mathfrak{g} + 1)$*-мерную алгебру Ли* $\tilde{\mathfrak{g}}$*, представляющую собой одномерное центральное расширение алгебры* $\mathfrak{g}$*:*

$$\{X_i^{(\epsilon)}, X_j^{(\epsilon)}\}_\epsilon = C_{ij}^k\, X_k^{(\epsilon)} + \epsilon\, \mathbf{F}_{ij}.$$

Здесь C_{ij}^k *— структурные константы алгебры Ли* $\mathfrak{g}$*, а постоянные величины* $\mathbf{F}_{ij}$ *определяются формулой*

$$\mathbf{F}_{ij} = F(\zeta_i, \zeta_j) - C_{ij}^k \int F(\zeta_k, \cdot).$$

Как известно, множество неэквивалентных центральных расширений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ находится во взаимо однозначном соответствии с элементами группы 2-когомологий $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. Это обстоятельство позволило предложить оригинальный подход к классификации внешних электромагнитных полей на заданном псевдоримановом многообразии (M, g), сопоставляя каждому классу полей отвечающую ему 2-когомологию из $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. В заключении **§ 6.1** приводится пример такой классификации в случае трехмерного евклидового пространства $\mathbb{R}^3$.

В **§ 6.2** описывается метод интегрирования в квадратурах правоинвариантных магнитных геодезических потоков на группах Ли. Несмотря на то что группы Ли представляют собой частный случай однородных пространств, класс интегрируемых магнитных геодезических потоков на них оказывается весьма широким. В указанном параграфе рассматриваются произвольные замкнутые правоинвариантные 2-формы на группах Ли, ассоциированные с 2-коциклами соответствующих алгебр Ли. Частным случаем предлагаемой нами теории являются магнитные геодезические потоки, связанные с тривиальными

2-коциклами (2-кограницами). До настоящего времени в большинстве работ по данной тематике рассматривались именно такие случаи[6], хотя нетривиальные 2-коциклы представляют с точки зрения интегрирования гораздо больший интерес. В **§ 6.2** показано, что для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и некоторого ее 2-коцикла $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ можно ввести так называемый *когомологический индекс* $\operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}$, обобщающий понятие обычного индекса алгебры Ли

$$\operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} \equiv \inf_{\lambda \in \mathfrak{g}^*} \operatorname{corank} \|C_{ij}^k \, \lambda_k + \mathbf{F}_{ij}\|,$$

и позволяющий сформулировать удобный алгебраический критерий интегрируемости магнитных геодезических потоков на группах Ли.

Теорема 4. *Пусть F — замкнутая правоинвариантная 2-форма на группе Ли G, соответствующая 2-коциклу $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. Магнитный геодезический поток, задаваемый 2-формой F, является интегрируемым в квадратурах для произвольной правоинвариантной псевдоримановой метрики на G, если и только если*

$$\frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}\right) < 2. \tag{9}$$

С помощью данного критерия показано, что правоинвариантные магнитные геодезические потоки интегрируемы в квадратурах на любой трехмерной группе Ли. В четырехмерном случае возможны как интегрируемые, так и неинтегрируемые случаи; на основе классификации 2-коциклов четырехмерных алгебр Ли, приведенной в Приложении B, явно перечислены все интегрируемые случаи.

Описанный в **§ 6.2** метод интегрирования магнитных геодезических потоков на группах Ли может быть обобщен на случай произвольного однородного пространства $M = H \setminus G$; соответствующие результаты изложены в **§ 6.3**. Отдельно исследована проблема *магнитных тождеств*, то есть функциональных соотношений между интегралами движения $X_i^{(\epsilon)}(x,p)$ магнитных геодезических потоков. В частности, доказано, что число функционально независимых магнитных тождеств совпадает с числом обычных (не магнитных) тождеств, то есть равно индексу i_M однородного пространства. Кроме того, введено понятие *магнитного дефекта* $d_{M,\mathbf{F}}^{(\epsilon)}$, обобщающее определение обычного дефекта d_M однородного пространства и позволяющее сформулировать критерий интегрируемости инвариантных магнитных геодезических потоков на однородных пространствах. В качестве иллюстрации рассмотрен пример интегрирования в квадратурах магнитного геодезического потока на четырехмерном однородном пространстве с нештеккелевой метрикой, допускающей пятимерную неразрешимую группу движений $G = \mathbb{R}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{R})$. В заключение параграфа сформулировано важное следствие полученных результатов: на любом четырехмерном однородном пространстве с нетривиальной подгруппой изотропии, снабженном инвариантной метрикой и инвариантной замкнутой 2-формой, магнитный геодезический поток интегрируем в квадратурах.

---

[6] См., например, Ефимов, Д. И. Магнитный геодезический поток на однородном симплектическом многообразии / Д. И. Ефимов // Сибирский математический журнал. – 2005. – Т. 46. – № 1. – С. 106–118; Bolsinov, A. V. Magnetic geodesic flows on coadjoint orbits / A. V. Bolsinov, B. Jovanovic // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2006. – Т. 39. – № 16. – С. L247

В **§ 6.4** рассматриваются уравнения Вонга, описывающие движение классической заряженной частицы с изоспином во внешнем калибровочном поле A_i^a:

$$\dot{x}^i = g^{ij}p_j, \quad \dot{p}_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i}\,p_jp_k + F_{ij}^a\,g^{jk}p_k\tau_a, \tag{10}$$

$$\dot{\tau}_a = -C_{ab}^c\,\tau_c A_i^b g^{ij} p_j. \tag{11}$$

С точки зрения физических приложений задача точного интегрирования этих уравнений представляет несомненный интерес. Действительно, не смотря на то, что движение изоспиновой частицы как правило ограничено малыми масштабами (порядка размера нуклонов), в ряде квантовых эффектов приходится использовать точные решения классических уравнений движения. Например, хорошо известно, что в рамках квазиклассического метода описания квантовых систем используется понятие классической траектории. Отметим, что в настоящее время точные решения уравнений Вонга найдены лишь для сравнительно небольшого класса калибровочных полей (в основном, это поля с калибровочной группой $SU(2)$). В частности, известны примеры решений уравнений Вонга в простейших случаях однородных полей, в постоянном хромоэлектромагнитном поле, а также в сферически-симметричных монопольных решениях уравнений Янга – Миллса.

В первом пункте **§ 6.4** коротко приводится известный результат Стернберга и Вейнстейна, позволяющий рассматривать уравнения Вонга как гамильтонову систему относительно некоторой пуассоновой структуры. Во втором пункте показано, что алгебра линейных интегралов движения уравнений Вонга является расширением некоторой подалгебры алгебры векторов Киллинга пространства – времени. При этом ядром данного расширения выступает некоторая подалгебра алгебры Ли калибровочной группы. Отметим, что определяющие уравнения для полиномиальных по импульсам интегралов движения уравнений Вонга были получены рядом авторов, однако структура возникающей при этом пуассоновой алгебры не исследовалась. В третьем пункте изучается возможность использования алгебры линейных интегралов движения для интегрирования уравнений Вонга путем некоммутативной редукции. Для этого мы применяем известную теорему некоммутативной редукции гамильтоновых систем, и с ее помощью получаем алгебраическое условие интегрируемости уравнений Вонга. В заключение параграфа рассмотрено несколько примеров, представляющих физический интерес.

В **главе 7** настоящей диссертационной работы рассматривается проблема построения точных решений релятивистских волновых уравнений Клейна – Гордона и Дирака во внешнем электромагнитном поле:

$$\left[g^{ab}(\nabla_a - i\epsilon A_a)(\nabla_b - i\epsilon A_b) + m^2 + \varsigma R\right]\varphi = 0, \tag{12}$$

$$\left[i\gamma^a\left(\nabla_a - \frac{1}{4}\gamma^b{}_{;a}\gamma_b - i\epsilon A_a\right) - m\right]\hat{\varphi} = 0. \tag{13}$$

Здесь g^{ab} — контравариантные компоненты метрики псевдориманова многообразия (M, g), ∇_a — ковариантная производная, R — скалярная кривизна, A_a — векторный потенциал электромагнитного поля, m и ϵ — масса и заряд частиц скалярного и спинорного полей φ и $\hat{\varphi}$. Матрицы Дирака γ^a представляют собой некоторое фиксированное решение матричной системы уравнений $\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2g^{ab}$.

§ 7.1 затрагивает вопрос о киллинговых алгебрах симметрии уравнений (12) и (13). Доказаны теоремы о том, что эти алгебры изоморфны и являются одномерными центральными расширениями подалгебры векторов Киллинга, сохраняющей 2-форму внешнего поля. Обсуждаются некоторые частные случаи. В качестве примеров найдены киллинговы алгебры симметрии уравнений Клейна – Гордона и Дирака на фоне решения Бертотти – Робинсона, а также для плоско-симметрической конфигурации гравитационного и электромагнитного полей.

В **§ 7.2** излагается метод построения точных решений уравнений Клейна – Гордона и Дирака во внешнем электромагнитном поле на псевдоримановых многообразиях с просто-транзитивными группами изометрий. Как известно, подобные многообразия находятся во взаимо однозначном соответствии с элементами группы преобразований, поэтому фактически мы рассматриваем задачу интегрирования релятивистских волновых уравнений на группах Ли. Для решения этой задачи используется техника, представляющая собой обобщение гармонического анализа на группах Ли, изложенного в **§ 3.3**. В заключение параграфа рассматривается пример интегрирования уравнений Клейна – Гордона и Дирака на четырехмерной группе Ли $G = E(2) \times \mathbb{R}$. Интересная качественная особенность этого примера состоит в возможности разделения переменных в свободном уравнении Клейна – Гордона, и невозможности сделать это при включении внешнего электромагнитного поля ввиду нарушения необходимых и достаточных условия разделения переменных.

§ 7.3 содержит описание общей схемы построения точных решений релятивистских волновых уравнений во внешних электромагнитных полях. Данная схема основана на использовании некоммутативной алгебры симметрии уравнения для осуществления процедуры его редукции к дифференциальному уравнению с минимально возможным числом независимых переменных. Описанный подход обобщает развитый в работах И. В. Широкова и А. В. Шаповалова метод интегрирования релятивитских волновых уравнений на случай включения в эти уравнения внешнего электромагнитного поля. В конце параграфа рассматривается пример интегрирования уравнений Клейна – Гордона и Дирака на нештеккелевом псевдоримановом многообразии с пятимерной неразрешимой группой движений, оставляющей инвариантной 2-форму электромагнитного поля.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы, излагаются рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

В **Приложении А** приводятся функции Казимира для всех некоммутативных вещественных алгебр Ли размерности меньше шести.

В **Приложении Б** содержится классификация канонических форм 2-коциклов всех вещественных четырехмерных алгебр Ли. Кроме того, в данном приложении выделены случаи, допускающие интегрируемость правоинвариантных геодезических потоков на соответствующих группах Ли.

Основные результаты диссертации

1. Разработан эффективный алгоритм координатной реализации транзитивных действий произвольной группы Ли по ее алгебре Ли.

2. Построено специальное каноническое преобразование, сводящее задачу интегрирова-

ния инвариантных гамильтоновых потоков на группах Ли к задаче интегрирования гамильтоновых систем на соответствующих орбитах коприсоединенного представления и, как следствие, получен алгебраический критерий их интегрируемости. Получена явная формула для полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби на группах Ли.

3. Исследована связь между специальным каноническим преобразованием и неприводимыми унитарными представлениями группы Ли. Метод интегрирования инвариантных гамильтоновых систем на группах Ли распространен на их квантовые аналоги.

4. Разработан конструктивный метод интегрирования в квадратурах гамильтоновых потоков на однородных пространствах групп Ли. Получены необходимые и достаточные условия интегрируемости геодезических потоков инвариантных метрик и метрик субмерсии на однородных пространствах.

5. Исследована проблема интегрируемости гамильтоновых систем в вариациях. Получены критерии интегрируемости уравнения Якоби на однородных пространствах.

6. Предложен когомологический подход к описанию внешних электромагнитных полей на псевдоримановых многообразиях. Решена проблема интегрируемости в квадратурах магнитных геодезических потоков на группах Ли и однородных пространствах. Исследована возможность некоммутативной интегрируемости уравнений Вонга.

7. Построен общий алгоритм получения точных решений релятивистских волновых уравнений с некоммутативными алгебрами симметрии во внешних электромагнитных полях.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, в том числе индексируемых Web of Science:

[1] Магазев А. А. Гамильтоновы системы в вариациях и интегрирование уравнения Якоби на однородных пространствах / А. А. Магазев, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2006. – № 8 (531). – С. 42–53. – 1,3/0,7 п.л.
в переводной версии журнала:
Magazev A. A. Variational Hamiltonian Systems and Integration of the Jacobi equation on Homogeneous Spaces / A. A. Magazev, I. V. Shirokov // Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika). – 2006. – Vol. 50, is. 8. – P. 38–49.

[2] Магазев А. А. Интегрируемые магнитные геодезические потоки на группах Ли / А. А. Магазев, И. В. Широков, Ю. А. Юревич // Теоретическая и математическая физика. – 2008. – Т. 156, № 2. – С. 189-206. – DOI: 10.4213/tmf6240. – 1,9/0,7 п.л.
в переводной версии журнала:
Magazev A. A. Integrable magnetic geodesic flows on Lie groups / A. A. Magazev, I. V. Shirokov, Yu. A. Yurevich // Theoretical and Mathematical Physics. – 2008. – Vol. 156, is. 2. – P. 1127–1141. – DOI: 10.1007/s11232-008-0083-y

[3] Бреев А. И. Поляризация вакуума скалярного поля на группах Ли и однородных пространствах / А. И. Бреев, И. В. Широков, А. А. Магазев // Теоретическая и математическая физика. – 2011. – Т. 167, № 1. – С. 78–95. – DOI: 10.4213/tmf6626. – 2,0/0,6 п.л.

в переводной версии журнала:

Breev A. I. Vacuum polarization of a scalar field on Lie groups and homogeneous spaces / A. I. Breev, I. V. Shirokov, A. A. Magazev // Theoretical and Mathematical Physics. – 2011. – Vol. 167, is. 1. – P. 468–483. – DOI: 10.1007/s11232-011-0035-9

[4] Магазев А. А. Интегрирование уравнения Клейна–Гордона–Фока во внешнем электромагнитном поле на группах Ли / А. А. Магазев // Теоретическая и математическая физика. – 2012. – Т. 173, № 3. – С. 375–391. – DOI: 10.4213/tmf8319. – 1,8 п.л.

в переводной версии журнала:

Magazev A. A. Integrating Klein–Gordon–Fock equations in an external electromagnetic field on Lie groups / A. A. Magazev // Theoretical and Mathematical Physics. – 2012. – Vol. 173, is. 3. – P. 1654–1667. – DOI: 10.1007/s11232-012-0139-x

[5] Магазев А. А. Симметрии уравнения Клейна–Фока во внешнем электромагнитном поле / А. А. Магазев // Омский научный вестник. – 2012. – № 2 (110). – С. 29–33. – 0,5 п.л.

[6] Магазев А. А. Метод некоммутативного интегрирования в задачах теоретической физики / А. А. Магазев, В. В. Михеев, И. В. Широков // Омский научный вестник. – 2013. – № 1 (117). – С. 35–38. – 0,3/0,1 п.л.

[7] Магазев А. А. Магнитные геодезические потоки на однородных многообразиях / А. А. Магазев // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2014. – Т. 57, № 3. – С. 26–32. – 0,7 п.л.

в переводной версии журнала:

Magazev A. A. Magnetic geodesic flows on homogeneous manifolds / A. A. Magazev // Russian Physics Journal. – 2014. – Vol. 57, is. 3. – P. 312–320. – DOI: 10.1007/s11182-014-0241-7

[8] Магазев А. А. Алгебра операторов симметрии и интегрирование уравнения Клейна–Гордона во внешнем электромагнитном поле / А. А. Магазев // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2014. – Т. 57, № 6. – С. 93–101. – 0,9 п.л.

в переводной версии журнала:

Magazev A. A. Algebra of symmetry operators and integration of the Klein–Gordon equation in an external electromagnetic field / A. A. Magazev // Russian Physics Journal. – 2014. – Vol. 57, is. 6. – P. 809–818. – DOI: 10.1007/s11182-014-0309-4

[9] Magazev A. A. A method of integration for classical and quantum equations based on the connection between canonical transformations and irreducible representations of lie groups / A. A. Magazev, I. V. Shirokov // Вестник Томского государственного педагогического университета. – 2014. – № 12 (153). – С. 152–157. – 0,6/0,3 п.л.

[10] Магазев А. А. Об интегрируемости уравнений Вонга в классе линейных интегралов движения / А. А. Магазев // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015.

– Т. 58, № 12. – С. 133–140. – 0,8 п.л.
в переводной версии журнала:
Magazev A. A. Integrability of the Wong equations in the class of linear integrals of motion / A. A. Magazev // Russian Physics Journal. – 2016. – Vol. 58, is. 12. – P. 1816–1825. – DOI: 10.1007/s11182-016-0722-y

[11] Magazev A. A. Computation of Composition Functions and Invariant Vector Fields in Terms of Structure Constants of Associated Lie Algebras / A. A. Magazev, V. V. Mikheyev, I. V. Shirokov // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2015. – Vol. 11. – 066. – 17 p. – DOI: 10.3842/SIGMA.2015.066. – 2,0/0,7 п.л.

[12] Болдырева М. Н. Об алгебрах Ли симметрии стационарных уравнений Шредингера и Паули / М. Н. Болдырева, А. А. Магазев // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2016. – Т. 59, № 10. – С. 132–139. – 0,8/0,4 п.л.
в переводной версии журнала:
Boldyreva M. N. On the Lie Symmetry Algebras of the Stationary Schrodinger and Pauli Equations / M. N. Boldyreva, A. A. Magazev // Russian Physics Journal. – 2017. – Vol. 59, is. 10. – P. 1671–1680. – DOI: 10.1007/s11182-017-0959-0

[13] Бреев А. И. Интегрирование уравнения Дирака на группах Ли во внешнем электромагнитном поле, допускающем некоммутативную алгебру симметрии / А. И. Бреев, А. А. Магазев // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2016. – Т. 59, № 12. – С. 63–70. – 0,8/0,4 п.л.

Монография:

[14] Магазев А. А. Интегрирование конечномерных гамильтоновых систем на группах Ли / А. А. Магазев, И. В. Широков. – Омск : ОмГТУ, 2015. – 124 с. – 14/7 п.л.

Публикации в прочих научных изданиях:

[15] Магазев А. А. Гамильтоновы системы в вариациях и интегрируемость уравнения Якоби на римановых многообразиях / А. А. Магазев, И. В. Широков // Математические структуры и моделирование. – 2004. – Вып. 14. – С. 78–83. – 0,6/0,3 п.л.

[16] Магазев А. А. Интегрирование геодезических потоков и релятивистских волновых уравнений на однородных пространствах с инвариантными метриками / А. А. Магазев, И. В. Широков // Известия Челябинского научного центра. – 2005. – № 2 (28). – С. 4–9. – 0,6/0,3 п.л.

[17] Магазев А. А. Построение правоинвариантных полей Эйнштейна – Максвелла на группах Ли / А. А. Магазев // Петровские чтения : материалы XIX Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики. Казань, 22 июня – 03 июля 2007 г. – Казань, 2007. – С. 32. – 0,1/0,05 п.л.

[18] Магазев А. А. Интегрирование магнитных геодезических потоков на группах Ли / А. А. Магазев, И. В. Широков, Ю. А. Юревич // Петровские чтения : материалы XIX Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики. Казань, 22 июня – 03 июля 2007 г. – Казань, 2007. –

С. 33. – 0,1/0,05 п.л.

[19] Магазев А. А. Уравнение Эйнштейна на однородных пространствах с инвариантным тензором энергии-импульса / А. А. Магазев // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений : тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева. Новосибирск, 05–12 октября 2008 г. – Новосибирск, 2008. – С. 331. – 0,1 п.л.

[20] Магазев А. А. Производящая функция на группах Ли / А. А. Магазев // Сборник научных трудов ОИВТ. – 2010. – Вып. 8. – С. 235–244. – 1 п.л.

[21] Магазев А. А. Производящая функция канонического преобразования на группах Ли / А. А. Магазев // Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation : материалы международной конференции. Казань, 01–06 ноября 2010 г. – Казань, 2010. – С. 90. – 0,1 п.л.

[22] Магазев А. А. Об алгебре симметрии уравнения Клейна–Фока во внешнем калибровочном поле / А. А. Магазев // Математическая физика и ее приложения : материалы третьей международной конференции. Самара, 27 августа – 01 сентября 2012 г. – Самара, 2012. – С. 196–197. – 0,1 п.л.

[23] Магазев А. А. Интегрируемые магнитные геодезические потоки на многообразиях с симметриями / А. А. Магазев, И. В. Широков // Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе IT+SE'2013 : материалы XLI Международной конференции. Ялта – Гурзуф, 25 мая – 04 июня 2013 г. – Запорожье, 2013. – С. 233–235. – 0,2/0,1 п.л.

[24] Болдырева М. Н. Об алгебре инвариантности стационарного уравнения Шредингера для частицы в электромагнитном поле / М. Н. Болдырева, А. А. Магазев // Вестник Омского университета. – 2016. – № 2 (80). – С. 24–27. – 0,3/0,15 п.л.

Тираж 100 экз. Заказ 229.
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. (3822) 533018.