Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения n-го порядка. Системы уравнений

Методические указания

Омск – 2005

Составители: Бояркин Геннадий Николаевич, к.ф.-м.н;
Зобнин Александр Иванович, к.ф.-м.н.;
Рассказова Марина Николаевна, к.ф.-м.н.

Печатается по решению редакционно–издательского совета
Омского государственного технического университета

Содержание

1. Общие сведения о линейных дифференциальных уравнениях n-го порядка

Мы переходим к рассмотрению очень важного и наиболее теоретически разработанного раздела теории обыкновенных дифференциальных уравнений – **теории линейных дифференциальных уравнений.**

В разделах первой части этот вопрос уже освещался. В частности, были затронуты линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Рассмотрим общую ситуацию.

Линейным дифференциальным уравнением n**-го порядка** называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x), \qquad (38)$$

где функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\ldots$, $a_n(x)$, называемые **коэффициентами,** непрерывны на некотором интервале $I = (a,\ b)$, причем $a_0(x) \neq 0 \quad \forall x \in I.$ Функцию $F(x)$ принято называть **правой частью уравнения,** или **свободным членом линейного уравнения.** Иногда её тоже относят к коэффициентам, подразумевая при этом, что $F(x)$ есть коэффициент при $y^0 = 1.$ Разумеется, запись линейного уравнения (38) в форме, когда $F(x)$ присутствует в левой части со знаком минус, также правомерна и тоже достаточно распространена в литературе.

Другими словами, уравнение $G\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}\right) = 0$ называется линейным, если функция G линейно зависит от переменных $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}$. Зависимость от x может быть, как видим из определения, нелинейной.

Так как по определению $a_0(x) \neq 0,$ то линейное уравнение (38) после деления его на коэффициент при высшей производной $a_0(x)$ превращается в **линейное дифференциальное уравнение** n**-го порядка в канонической форме:**

$$y^{(n)} + h_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + h_{n-1}(x)y' + h_n(x)y = f(x), \qquad (39)$$

где $h_i = \dfrac{a_i(x)}{a_0(x)} \quad (i = 1,\ \ldots,\ n), \quad f(x) = \dfrac{F(x)}{a_0(x)}$.

Если $f(x) \not\equiv 0$ при $x \in I,$ то уравнение (39) называется **линейным неоднородным уравнением.** Если $f(x) \equiv 0$ при $x \in I,$ то уравнение (39) называется **линейным однородным.** При этом уравнение

$$y^{(n)} + h_1(x)\ y^{(n-1)} + \ldots + h_{n-1}(x)\ y' + h_n(x)\ y = 0 \qquad (40)$$

называется **линейным однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению** (39). Линейное однородное уравнение всегда имеет своим решением $y(x) \equiv 0,$ которое называется **тривиальным решением.**

Краткая запись линейного неоднородного уравнения (39) имеет вид $L(y)=f(x)$, где L – так называемый **линейный дифференциальный оператор n-го порядка** $L(y)\equiv y^{(n)}+h_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+h_{n-1}(x)y'+h_n(x)y$, определенный на множестве n раз непрерывно дифференцируемых на I функций.

Переписав уравнение (39) в виде

$$y^{(n)}=-\sum_{i=1}^{n}h_i(x)y^{(n-i)}+f(x)\equiv\Phi\left(x,\, y,\, y',\ldots,\, y^{n-1}\right) \tag{41}$$

и заметив, что функция $\Phi\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\right)$ непрерывна вместе с частными производными $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y^{(n-i)}}=-h_i(x)$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$ при $x\in[\alpha,\beta]\subset I$ и любых $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}$, можно сделать вывод, что правая часть уравнения (39) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности. Более того, доказано, что для произвольной точки $x_0\in I$ и произвольно выбранных начальных значений $y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ решение задачи Коши для уравнения (39) существует на всем интервале $I=(a,\, b)$ и оно единственно.

Для общей математической эрудиции читателя отметим, что в последнем предложении речь идет о так называемой **теореме существования и единственности в целом** (на интервале), а в предшествующем ему предложении – о теореме **существования и единственности в малом** (в малой окрестности). Теорема «в целом» – более сильный результат, чем теорема «в малом», то есть доказать первую (в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и задач для них) удается гораздо реже, чем вторую. Над доказательством теорем существования и единственности для различных уравнений и задач для них работает большое количество математиков в разных странах мира. В прикладном отношении эти теоремы важны для обоснования тех или иных числовых расчетов на ЭВМ, порой очень сложных и заменяющих собой дорогостоящие эксперименты (в различных областях научных и технических исследований).

Полностью обоснованными (с математической точки зрения) принято считать только такие числовые модели, для которых доказаны теоремы существования и единственности («в малом» или «в целом»), а также доказано (или дана некоторая оценка), что численное решение мало (в каком-то смысле) отличается от точного решения задачи, которое чаще всего для реальных задач найти не удается.

Теория линейных дифференциальных уравнений, как уже говорилось, довольно-таки хорошо разработана. Помимо доказательств теоремы существования и единственности («в малом» или «в целом») созданы методы и алгоритмы построения точных решений уравнений и задач, обработка которых на ЭВМ уже не представляет принципиальных трудностей.

Отметим два важных свойства линейных дифференциальных уравнений. Оба свойства касаются **линейных преобразований** искомой функции и независимого переменного, позволяющих не выходить за рамки класса линейных уравнений, методы решения которых, напомним, достаточно полно разработаны (о соответствующих пакетах программ для ЭВМ смотрите «Приложение» в конце пособия). По сути приводимые ниже линейные преобразования можно отнести к методам решения, ибо при этом результат, уже полученный для одного уравнения, может быть распространен на некоторые другие.

Если говорить не только об обыкновенных дифференциальных уравнениях, но и об уравнениях с частными производными (а также задачах для них), то следует отметить, что преобразование зависимых и независимых переменных представляют собой очень эффективный метод решения (и исследования свойств) дифференциальных уравнений (и задач для них). Это целое направление в современной математике.

Первое свойство заключается в том, что при замене независимой переменной $x=\varphi(\xi)$ уравнение остается линейным. При этом предполагается, что φ есть произвольная n раз непрерывно дифференцируемая функция, имеющая обратную на интервале, на котором рассматривается исходное уравнение. Также подразумевается, что $\varphi'(\xi)\neq 0$.

Заметим, что при такой подстановке **однородное** линейное уравнение переходит снова в **однородное.**

Второе свойство утверждает, что уравнение остается линейным при **линейном преобразовании зависимого** переменного по формуле $y=v(x)\,\eta(x)+\gamma(x)$. Здесь $\eta-$новая искомая функция, и подразумевается, что функции v и γ имеют непрерывные производные порядка до n включительно, $v(x)\neq 0$ на рассматриваемом интервале.

Оба свойства доказываются непосредственным вычислением всех n производных искомой функции в терминах новых переменных и подстановкой результатов вычислений в уравнение. Уместно отметить, что при втором преобразовании производная k-го порядка от y по x выражается через k первых производных от η по x линейно (но неоднородно), поэтому линейность уравнения не нарушается.

2. Линейные однородные уравнения n-го порядка

Линейное однородное уравнение n-го порядка (в канонической форме) (40) имеет вид

$$L(y)\equiv y^{(n)}+h_1(x)\quad y^{(n-1)}+\ \dots\ +\ h_{n-1}(x)\quad y'+h_n(x)\quad y=0,$$

где функции $h_i(x)$, $i=1,\ 2,\ \dots,\ n$ непрерывны на интервале $I=(a,\ b)$. Приведем (без доказательства) **основные свойства решений** этого уравнения.

1. Если $y_1, y_2, \ldots, y_m$ – решения уравнения (40), то и любая их линейная комбинация $\sum_{i=1}^{m} C_i y_i$, где $C_i = const$ $(i = 1, \ldots, m)$ является решением уравнения (40).

2. Если линейное однородное уравнение (40) с **действительными коэффициентами** имеет **комплексное решение** $y = u + iv$, то функции $u = \operatorname{Re} y$, $v = \operatorname{Im} y$ каждая по отдельности будут решениями уравнения (40).

Линейная комбинация $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (40), где n – порядок уравнения, содержит n произвольных констант. Вопрос о том, будет ли эта комбинация **общим решением** уравнения (40), разрешается в связи с понятием **линейной зависимости системы** (набора) **функций.**

Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ называются **линейно зависимыми на множестве** I**,** если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ такие, что

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \ldots + \alpha_m \varphi_m(x) \equiv 0, \qquad x \in I, \tag{42}$$

причем $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 > 0$.

Если же тождество (42) имеет место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_m = 0$, то функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ называются **линейно независимыми на I.**

Любая система из n линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ однородного уравнения (40) называется **фундаментальной системой решений однородного уравнения**. **Фундаментальная система решений** $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называется **нормальной** (при $x = x_0$), если

$$\begin{array}{llll}
y_1(x_0) = 1, & y_2'(x_0) = 0, & \ldots, & y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, \\
y_2(x_0) = 0, & y_2'(x_0) = 1, & \ldots, & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_n(x_0) = 0, & y_n'(x_0) = 0, & \ldots, & y_n^{(n-1)}(x_0) = 1,
\end{array}$$

где $x_0 \in I$.

3. Общее решение линейного однородного уравнения (40) имеет вид $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$, где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные, а $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений этого уравнения.

4. Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – **нормальная фундаментальная система решений** уравнения (40), то решение для него задачи Коши с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ имеет вид
$y = y_0 y_1(x) + y_0' y_2(x) + \ldots + y_0^{(n-1)} y_n(x)$.

Сформулируем далее (без доказательства) **условия линейной зависимости и независимости системы функций,** которые обозначим $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots,\ \varphi_m(x)$.

1. Для того, чтобы функции $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x)$, непрерывные на отрезке $[a, b]$, были линейно независимы на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы **определитель Грама системы функций** $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x)$, имеющий вид

$$\Gamma(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m)=\begin{vmatrix} (\varphi_1,\ \varphi_1) & (\varphi_1,\ \varphi_2) & \ldots & \ldots(\varphi_1,\ \varphi_m) \\ (\varphi_2,\ \varphi_1) & (\varphi_2,\ \varphi_2) & \ldots & \ldots(\varphi_2,\ \varphi_m) \\ \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ (\varphi_m,\ \varphi_1) & (\varphi_m,\ \varphi_2) & \ldots & \ldots(\varphi_{m1},\ \varphi_m) \end{vmatrix},$$

где $(\varphi_i,\ \varphi_j)=\int\limits_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)dx \quad (i,\ j=1,\ \ldots,\ m)$, был отличен от нуля: $\Gamma(\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots, \varphi_m)\neq 0.$

2. Для того, чтобы функции $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x)$, непрерывные на I вместе со своими производными до $(m-1)$-го порядка включительно, были линейно независимы на I, достаточно, чтобы **определитель Вронского (вронскиан)** $W(x)=W[\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m]$ **системы функций** $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x)$ был отличен от нуля хотя бы в одной точке. То есть должна существовать точка $x_0\in I$ такая, что

$$W[\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m]=\begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \ldots\ \ldots\ \ldots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) & \ldots\ \ldots\ \ldots & \varphi_m'(x_0) \\ \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots \\ \varphi_1^{(m-1)}(x_0) & \varphi_2^{(m-1)}(x_0) & \ldots\ \ldots & \varphi_m^{(m-1)}(x_0) \end{vmatrix}\neq 0.$$

3. Если функции $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x)$, непрерывные на $I=(a,\ b)$ вместе со своими производными до $(m-1)$-го порядка включительно, линейно зависимы на I, то

$$W(x)\equiv W[\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m]\equiv 0,\quad x\in I.$$

4. Для того, чтобы решения $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ линейного однородного уравнения n-го порядка (40) были линейно независимы на $I=(a,\ b)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$W(x)\equiv W[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n]\neq 0 \qquad \forall\quad x\in I.$$

Для вронскиана n решений линейного однородного уравнения (40) имеет место формула (приведём её без доказательства):

$$W(x) \equiv W[y_1, y_2, \dots, y_n] = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} h_1(S)\, dS},$$

которую в литературе принято называть **формулой Лиувилля-Остроградского.** Из формулы Лиувилля-Остроградского вытекает следующее условие.

5. Для того, чтобы решения $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейного однородного уравнения n-го порядка (40) были линейно независимы на $I = (a, b)$, необходимо и достаточно, чтобы вронскиан $W(x) \equiv W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ не обращался в нуль хотя бы в одной точке $x_0 \in I$.

Приведём далее ряд утверждений, являющихся суть следствиями изложенных выше фактов и определений. Эти утверждения можно расценивать как упражнения. Обоснование их не представляет трудностей, поэтому ограничимся в каждом случае лишь указанием идеи доказательства.

Будем рассматривать некоторую систему функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$, определенных на $I = (a, b)$.

1. Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ будет линейно зависимой на I, если хотя бы одна из этих функций, например $\varphi_1(x)$, тождественно равна нулю на I. Идея доказательства: достаточно взять $\alpha_1 \neq 0, \ \alpha_j = 0 \ (j = 2, \dots, m)$.

2. Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ линейно зависима на I, если хотя бы две из них (например, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$) тождественно равны между собой. Идея доказательства: достаточно взять $\alpha_1 = -\alpha_2 \neq 0, \ \alpha_j = 0 (j = 3, \dots, m)$.

3. Любая подсистема системы линейно независимых на $I = (a, b)$ функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ также линейна независима. Идея доказательства от противного. Набор ненулевых коэффициентов такой подсистемы, дающих тождественно равную нулю линейную комбинацию, следует дополнить нулевыми коэффициентами до полного набора коэффициентов для всей системы из m функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$.

4. Если какая-либо подсистема системы функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ линейно зависима на I, то и вся система тоже. Идея доказательства также – от противного. Использовать предыдущее утверждение 3.

5. Если система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ линейно зависима на $I = (a, b)$, то она линейно зависима на любом промежутке $I_1 = (\alpha, \beta) \subset I$. Доказательство очевидно.

6. Если $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_m(x)$ линейно независима на $I=(a,\ b)$, то отсюда **не следует**, что эта система линейно независима на любом интервале $I_1=(\alpha,\ \beta)\subset I.$ Идея доказательства: достаточно показать, что две функции x и $|x|$ линейно независимы на интервале $(-1,\ 1)$ и линейно зависимы на промежутке $(0,\ 1)\subset(-1,\ 1).$

7. Если система функций $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_m(x)$ линейно независима на интервале $(\alpha,\ \beta)\subset I$, то она линейно независима и на всем промежутке $I=(a,\ b)$. Идея доказательства от противного. Использовать утверждение 5.

8. Если функции $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_m(x)$ непрерывно дифференцируемы на $I=(a,\ b)$ $(m-1)$ раз и вронскиан $W(x)=W[\varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_m]\not\equiv 0$ на I, то эта система функций линейно независима на I. Идея доказательства: предположить противное, тогда $W(x)\equiv 0,$ что невозможно.

9. Если для системы из двух функций $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ имеет место неравенство $\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\not\equiv \text{const}$ на $I=(a,\ b)$, то эти функции линейно независимы на I. Идея доказательства от противного.

10. Если, наоборот, $\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\equiv \text{const}$ на $I=(a,\ b)$, то эта пара функций линейно зависима на I. Идея доказательства: если обозначить через $C\equiv\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},$ то для доказательства достаточно взять в качестве коэффициентов линейной комбинации величины $\alpha_1=1$ и $\alpha_2=-C$ (при этом, разумеется, учитывается, что $\varphi_2(x)\neq 0$).

Решим несколько примеров.

Пример 26. Исследовать на линейную зависимость системы функций:

1) $1,\ \ x,\ \ x^2,\ \ x^3;$ 2) $1,\ \ln x;$ 3) $\sin x,\ \ \cos x;$ 4) $-x,\ \ 2x+3,\ \ 6x+8;$ 5) $x^2+2x,\ \ 3x^2-1,\ \ x+4;$ 6) $x,\ \ x^3,\ \ |x^3|$. Функции рассматриваются в областях, где они определены.

Решение:

1. Предположим, что функции $1,\ x,\ x^2,\ x^3$ линейно зависимы на $I=(-\infty,\ +\infty).$ Тогда на I справедливо тождество $\alpha_1\cdot 1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2+\alpha_4 x^3\equiv 0,$ где $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2>0,$ что невозможно, так как левая часть тождества – многочлен степени не выше третьей, который, как известно, может обращаться в нуль не более, чем в трех точках промежутка I. Следовательно, функции

$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3$ линейно независимы на I. Из решения следует, в частности, что эти функции линейно независимы на любом промежутке $I_1 = (a, \quad b)$.

2. Так как $\dfrac{\ln x}{1} = \ln x \not\equiv$ const при $x > 0$, то в силу утверждения 9 данные функции линейно независимы на $I = (0, +\infty)$.

3. Функции $\sin x$ и $\cos x$ определены на $I = (-\infty, +\infty)$. Предположим, что они линейно зависимы на I, т. е. имеет место тождество $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x \equiv 0$, где, например, $\alpha_1 \neq 0$. Положим $x = \pi/2$. Тогда из тождества следует, что $\alpha_1 = 0$. Полученное противоречие означает, что $\sin x$ и $\cos x$ линейно независимы на I.

4. Покажем, что существуют $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такие, что $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$, и для которых на промежутке $I = (-\infty, \infty)$ справедливо тождество

$$\alpha_1(4 - x) + \alpha_2(2x + 3) + \alpha_3(6x + 8) \equiv 0.$$

После приведения подобных тождество запишется в виде

$$(-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3)x + (4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3) \cdot 1 \equiv 0.$$

Так как функции x и 1 линейно независимы на I, (см. п. 1 примера), то оба коэффициента – при x и при 1 – должны быть нулевыми, т. е. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ удовлетворяют двум линейным уравнениям (системе)

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0, \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Если какой-нибудь из трёх величин, например, α_3 присвоить произвольное ненулевое значение, то легко убедиться, что возникающая в результате система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными всегда имеет решение, поскольку её определитель отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0.$$

Сказанное означает, что интересующие нас функции линейно зависимы на I.

5. Если рассуждать аналогично п. 4, то в этом случае придем к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Система однородна, её главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -23 \neq 0,$$

и, следовательно, она имеет только тривиальное решение: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$ Это в свою очередь означает, что данные функции линейно независимы на I.

6. Пусть данные функции линейно зависимы на $I = (-\infty,\ \infty)$. Тогда на этом промежутке должно выполняться тождество

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 \left| x^3 \right| \equiv 0, \qquad \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2 > 0.$$

Поскольку

$$\left| x^3 \right| = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0, \end{cases}$$

то тождество разбивается на два:

$$\alpha_1 x + (\alpha_2 + \alpha_3) x^3 \equiv 0 \quad \text{при} \quad x \geq 0 \quad \text{и}$$

$$\alpha_1 x + (\alpha_2 - \alpha_3) x^3 \equiv 0 \quad \text{при} \quad x < 0.$$

А так как функции x и x^3 линейно независимы на всем промежутке I, то из последних двух тождеств следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$ что противоречит сделанному предположению. Противоречие означает, что рассмотренные функции линейно независимы на I.

Пример № 27. Пользуясь определителем Грама, исследовать данные функции на линейную зависимость в указанных промежутках:

1. $\varphi_1(x) = 2x - 1, \quad \varphi_2(x) = 2x + 1, \quad \varphi_3(x) = x; \quad I = [-1,\ 1];$

2. $\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_{11}(x) = \sin x, \quad \varphi_{12}(x) = \cos x, \ldots, \varphi_{n1}(x) = \sin nx, \quad \varphi_{n2}(x) = \cos nx;$

   $I = [-\pi; \pi];$

3. $\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = |x|; \quad I = [-1,\ 1].$

Решение. 1. Чтобы найти определитель Грама, нужно вычислить все $(\varphi_i,\ \varphi_j), \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3.$

$$(\varphi_1,\ \varphi_1) = \int_{-1}^{1} \left(4x^2 - 4x + 1\right) dx = \left(\frac{4}{3} x^3 - 2x^2 + x \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{14}{3};$$

$$(\varphi_1,\ \varphi_2)=\int_{-1}^{1}\left(4\ x^2-1\right)\ dx=\left(\frac{4}{3}\ x^3-x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{2}{3};$$

$$(\varphi_1,\ \varphi_3)=\int_{-1}^{1}\left(2\ x^2-x\right)\ dx=\left(\frac{2}{3}\ x^3-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{3};$$

$$(\varphi_2,\ \varphi_1)=\frac{2}{3};\qquad (\varphi_2,\varphi_2)=\int_{-1}^{1}\left(4x^2+4x+1\right)dx=\left(\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{14}{3};$$

$$(\varphi_2,\ \varphi_3)=\int_{-1}^{1}\left(2\ x^2+x\right)\ dx=\left(\frac{2}{3}\ x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{3};\qquad \left(\varphi_3,\ \varphi_1\right)=\frac{4}{3};$$

$$\left(\varphi_3,\ \varphi_2\right)=\frac{4}{3};\qquad (\varphi_3,\ \varphi_3)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{3}x^3\ \Bigg|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.$$

$$\Gamma(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)=\begin{vmatrix}14/3 & 2/3 & 4/3\\ 2/3 & 14/3 & 4/3\\ 4/3 & 4/3 & 2/3\end{vmatrix}=\frac{8}{27}\begin{vmatrix}7 & 1 & 2\\ 1 & 7 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=\frac{8}{27}(49+4+4-28-28-1)=0.$$

Определитель Грама предложенной системы функций равен нулю, следовательно, функции $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$ – линейно зависимы.

2. Действуем аналогично п. 1 примера:

$$\left(\varphi_0,\ \varphi_0\right)=\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot dx=2\pi,\quad \left(\varphi_0,\ \varphi_{i1}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin ix\,dx=0,\ \left(\varphi_0,\ \varphi_{i2}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos ix\,dx=0.$$

Аналогично $\left(\varphi_{i\mu},\ \varphi_{j\nu}=0\right)\qquad \left(i\neq j;\quad \mu,\ \nu=1,\ 2\right)$;

$$\left(\varphi_{i1},\varphi_{i1}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\ ix\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\cos\ 2ix\right)dx=\pi;$$

$$\left(\varphi_{i2},\ \varphi_{i2}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 ix\ \ dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\cos\ \ 2ix\right)\ dx=\pi;$$

$$\left(\varphi_{i\mu},\ \varphi_{j\nu}\right)=0\qquad(\mu\neq\nu)\quad\left(i,j=1,\ 2,\ \ldots,\ n\right).$$

$$\Gamma(\varphi_0, \ \varphi_{11}, \ \ldots, \varphi_{n2}) = \begin{vmatrix} 2\pi & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \pi \end{vmatrix} = 2\pi^{2n+1} \neq 0.$$

Следовательно, функции $\varphi_0(x) = 1, \ \varphi_{i1}(x) = \sin ix, \ \varphi_{i2}(x) = \cos ix \quad (i = 1, \ 2, \ldots, \ n)$ линейно независимы на $I = [-\pi, \ \pi]$.

3. Действуя снова аналогично предыдущим пунктам, находим

$$(\varphi_1, \ \varphi_1) = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3};$$

$$(\varphi_1, \ \ \varphi_2) = \int_{-1}^{1} x \ \ |x| \ \ dx = 0; \qquad (\varphi_2, \ \ \varphi_1) = 0;$$

$$(\varphi_2, \ \varphi_2) = \int_{-1}^{1} |x|^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Так как определитель Грама функций φ_1, φ_2

$$\Gamma(\varphi_1, \ \varphi_2) = \begin{vmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{vmatrix} = 4/9$$

и отличен от нуля, то функции x и $|x|$ линейно независимы на $I = [-1, \ \ 1]$.

Пример № 28. а) Найти определитель Вронского следующих систем функций на указанных интервалах:

1. $e^x, \ \ xe^x, \ \ x^2 e^x; \ \ I = (-\infty, \ \infty);$

2. $10, \quad \arcsin x, \quad \arccos x; \qquad I = (-1, \ \ 1);$

3. $5, \ \ \cos^2 x, \ \ \sin^2 x; \quad I = (-\infty, \ \infty);$

4. $x^2, \quad x|x|; \quad I = (-\infty, \ \infty).$

б) Какие выводы относительно линейной зависимости данных функций на I можно сделать по их определителю Вронского? Исследовать системы функций на линейную зависимость.

Решение: а) Находим определитель Вронского для каждого случая

1. $$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & x\ e^x & x^2\ e^x \\ e^x & (x+1)\,e^x & (x^2+2x)\,e^x \\ e^x & (x+2)\,e^x & (x^2+4x+2)\,e^x \end{vmatrix} = e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix} = e^{3x}(4x+2-4x)=2e^{3x};$$

2. $$W(x)=\begin{vmatrix} 10 & \arcsin x & \arccos x \\ 0 & (1-x^2)^{-1/2} & -(1-x^2)^{-1/2} \\ 0 & x(1-x^2)^{-3/2} & -x(1-x^2)^{-3/2} \end{vmatrix}=0;$$

3. $$W(x)=\begin{vmatrix} 5 & \cos^2 x & \sin^2 x \\ 0 & -\sin 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\cos 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}=0;$$

4. $$W(x)=\begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix}=0.$$

б) 1. Поскольку $W(x)=2\,e^{3x}\neq 0$ на I, то данные функции линейно независимы на этом интервале.

2. Сделать заключения о линейной зависимости (или независимости) системы функций по определителю Вронского нельзя, поскольку последний оказался равным нулю.

Если исходить из определения линейной зависимости, то легко убедиться, что эти функции линейно зависимы. Для этого достаточно в линейной комбинации $\alpha_1\cdot 10+\alpha_2\cdot\arcsin x+\alpha_3\cdot\arccos x$ взять в качестве коэффициентов значения $\alpha_1=-\pi/20$, $\alpha_2=\alpha_3=1$, чтобы она стала тождественно равной нулю, $\alpha_1^{\ 2}+\alpha_2^{\ 2}+\alpha_3^{\ 2}>0$.

3. Аналогично п. 2, вывод о линейной зависимости только по определителю Вронского сделать нельзя $(W=0)$.

Функции линейно зависимы на I, поскольку на I имеет место тождество $\alpha_1\cdot 5+\alpha_2\cos^2 x+\alpha_3\sin^2 x\equiv 0$, в котором $\alpha_1=-1/5$, $\alpha_2=\alpha_3=1$.

4. Определитель Вронского снова равен нулю, и вывод о линейной зависимости сделать нельзя.

Следуя определению линейной зависимости системы функций, рассмотрим тождество $\alpha_1 x^2+\alpha_2 x|x|\equiv 0,\quad x\in I.$

Из него следует, что при $x=1$ должно выполняться равенство $\alpha_1+\alpha_2=0,$ а при $x=-1,$ соответственно, равенство $\alpha_1-\alpha_2=0.$ А так как система линейных уравнений

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0,\\ \alpha_1-\alpha_2=0\end{cases}$$

имеет единственное (тривиальное) решение $\alpha_1=0,\ \alpha_2=0,$ то заключаем, что система функций линейно независима.

3. Линейные неоднородные уравнения

Линейное неоднородное уравнение n-го порядка будем рассматривать в **канонической форме** (39)

$$y^{(n)}+h_1(x)\ y^{(n-1)}+\ldots+h_{n-1}(x)\ y'+h_n(x)\ y=f(x).$$

Будем также использовать его краткую запись $L(y)=f(x),$ $L-$линейный дифференциальный оператор n-го порядка. Напомним, что коэффициенты уравнения (39) должны быть непрерывны на некотором интервале $I=(a,\ b).$

Теория и практическое решение **неоднородных линейных** уравнений во многом опираются на таковые для **однородных линейных** уравнений, рассмотренных достаточно подробно в предыдущем разделе.

Оказывается, что если общее решение **линейного однородного уравнения** (уравнения (40)), **соответствующего** данному **линейному неоднородному уравнению** (уравнение (39)), уже известно, то для построения **общего решения неоднородного уравнения** достаточно найти какое-нибудь **одно частное решение** последнего.

Общее решение неоднородного уравнения тогда будет иметь вид

$$y=\bar{y}+\tilde{y}. \tag{43}$$

Здесь $\bar{y}-$**общее** решение однородного уравнения $L(y)=0,$ соответствующего уравнению $L(y)=f(x),$ а $\tilde{y}-$любое **частное** решение уравнения исходного неоднородного уравнения $L(y)=f(x).$

Для отыскания частного решения неоднородного уравнения существует метод, который называется **методом вариации постоянных.** С его помощью решение неоднородного уравнения можно построить всегда, если только уже известна фундаментальная система $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ решений однородного уравнения $L(y)=0.$

Идея метода, его ещё называют **методом Лагранжа,** заключается в предположении, что частное решение имеет вид

$$y=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i, \tag{44}$$

где $c_i(x) \quad (i=1,\ldots,\ n)$ – неизвестные функции.

Чтобы функция (44) обращала уравнение (39) в тождество, необходимо и достаточно, чтобы функции $c_i(x) \quad (i=1,\ldots,\ n)$ были решением системы линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)\, y_1 + c_2'(x)\, y_2 + \ldots + c_n'(x)\, y_n = 0 \\ c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x)\, y_2' + \ldots + c_n'(x)\, y_n' = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ c_1'(x) y_1^{(n-1)} + c_2'(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \tag{45}$$

Систему (45) легко получить подстановкой решения (44) в (39). Её главный определитель

$$\Delta = W\left[y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n\right] \neq 0 \quad \forall x \in I. \tag{46}$$

Следовательно, она совместна, и её решение

$$c_i'(x) = \psi_i(x) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n) \tag{47}$$

единственно.

Отсюда следует, что

$$c_i(x) = \int \psi_i(x)\, dx + \alpha_i, \tag{48}$$

$\alpha_i \ (i=1,\ldots,\ n)$ – произвольные постоянные, и, в силу (43) и (44), **общее решение неоднородного уравнения** будет

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n + \sum_{i=1}^{n} \left(\int \psi_i(x)\, dx\right) y_i. \tag{49}$$

Рассмотренный метод вариации постоянных (метод Лагранжа) универсален. Как видим, он сводится к интегрированию функций $\psi_i (i=1,\ldots,\ n)$ в (49), которое в случае невозможности его точного проведения может быть проделано численно.

Рассмотрим ещё один метод – **метод Коши** – тоже достаточно универсальный. Итак, пусть снова фундаментальная система решений $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ линейного однородного уравнения $L(y)=0$ уже известна. В качестве частного решения неоднородного уравнения будем отыскивать то из них, которое удовлетворяет нулевым начальным условиям:

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y_0^{(n-1)}(x) = 0 \quad (x_0 \in I). \tag{50}$$

Оказывается, что его можно найти в виде

$$\tilde{y} = \int_{x_0}^{x} K(x, s) f(s) ds, \qquad (x_0,\ x \in I). \qquad (51)$$

Выражение (51) называется **формулой Коши.** Функция $K(x, s)$ – **функция Коши,** являющаяся при каждом значении параметра $s \in I$ решением однородного уравнения $L(y) = 0$ и удовлетворяющая условиям

$$K(s, s) = K'(s, s) = \ldots = K^{(n-2)}(s, s) = 0, \quad K^{(n-1)}(s, s) = 1. \qquad (52)$$

Она может быть найдена в виде

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{n} c_i(s)\ y_i(x), \qquad (53)$$

где коэффициенты $c_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определяется так, чтобы удовлетворить условиям (52). Тогда формула (43) с учетом (51) дает решение неоднородного линейного уравнения.

Третий метод, который мы рассмотрим, менее универсален, чем два предыдущих. Он заключается в том, что для линейных неоднородных уравнений имеет место **принцип суперпозиции решений.** Это означает, что если y_i является решением линейного неоднородного уравнения

$$L(y) = f_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, m), \qquad (54)$$

то функция $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\ y_i(x)$ является решением линейного неоднородного уравнения

$$L(y) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x), \qquad (55)$$

где α_i – постоянные величины.

Более того, если правая часть $f(x)$ уравнения (39) $L(y) = f(x)$ представима в виде суммы ряда, т. е. $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\ f_i(x)$, а y_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,)$ являются решениями неоднородных уравнений

$$L(y) = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots), \qquad (56)$$

причем ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\ y_i$ сходится и допускает n-кратное почленное дифференцирование, то функция $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\ y_i$ будет решением линейного неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$.

Завершая краткий обзор методов решения линейных неоднородных уравнений, отметим одно их важное свойство, касающееся уравнений специального вида. А именно, если линейное неоднородное уравнение

$$L(y) = \varphi(x) + i\,\psi(x),$$

где коэффициенты левой части $h_j(x)$ $(j=1,\dots,n)$ и правой части $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – действительные функции, имеет комплексное решение $y = u(x) + iv(x)$, то функции $u = \operatorname{Re} y$, $v = \operatorname{Im} y$ являются соответственно решениями двух уравнений: $L(y) = \varphi(x)$, $L(y) = \psi(x)$.

В заключение приведём формулу решения **задачи Коши** для линейного неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$, если известна **нормальная фундаментальная система решений** $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейного однородного уравнения $L(y) = 0$. Решением линейного неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$, удовлетворяющим начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, в этом случае будет

$$y = y_0\, y_1(x) + y_0'\, y_2(x) + \dots + y_0^{(n-1)}\, y_n(x) + \tilde{y}(x),$$

где $\tilde{y}(x)$ – частное решение уравнения, **удовлетворяющее нулевым начальным данным** $y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ (отметим, что именно такое частное решение $\tilde{y}$ даёт метод Коши).

4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами будем называть уравнение вида

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (57)$$

где $a_j = \text{const}$ $(j=1,\dots,n)$.

Заметим, что это суть уравнение (40), в котором все коэффициенты h_j $(j=1,\dots,n)$ не зависят от x. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, будем использовать для них другое обозначение: a_j $(i=1,\dots,n)$.

Проведем схему построения фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (57) (с точностью до отыскания корней многочлена n-ой степени). Алгоритм заключается в следующем.

Сначала выписывается многочлен $D(\lambda)$ степени n

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n, \qquad (58)$$

называемый **характеристическим многочленом** линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $L(y)$. Затем решается алгебраическое уравнение

$$D(\lambda)=0, \tag{59}$$

называемое **характеристическим уравнением** оператора $L(y)$. Согласно основной теореме алгебры оно имеет n корней (вообще говоря, комплексных), в числе которых могут быть корни кратности более чем единица.

Если окажется, что все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell$, имеющие кратности $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$ $\left(\sum_{j=1}^{\ell} m_j = n\right)$ соответственно, – **действительные числа**, то функции

$$e^{\lambda_1 x},\ \ xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x},\ \ e^{\lambda_2 x},\ \ xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{m_2-2}e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_\ell x},\ \ xe^{\lambda_\ell x}, \ldots, x^{m_\ell-1}e^{\lambda_\ell x} \tag{60}$$

образуют **фундаментальную систему решений** линейного однородного уравнения (57).

Рассмотрим теперь более общую ситуацию – когда у характеристического уравнения могут быть комплексные корни. Пусть снова в уравнении (58) коэффициенты a_j $(j=1, \ldots, n)$ – действительные числа, а уравнение (59) имеет действительные корни: k_1 кратности m_1, k_2 кратности $m_2, \ldots$, k_r кратности m_r, а также комплексные корни (последние образуют комплексно сопряженные пары с одинаковой кратностью): $\alpha_1 \pm i\beta_1$ кратности μ_1, $\alpha_2 \pm i\beta_2$ кратности $\mu_2, \ldots,$ $\alpha_s \pm i\beta_s$ кратности μ_s $\left(\sum_{j=1}^{r} m_j + 2\sum_{\ell=1}^{s}\mu_\ell = n\right)$. В этом случае в качестве **фундаментальной системы решений** линейного однородного уравнения (57) можно взять

$$e^{k_1 x},\ \ xe^{k_1 x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{k_1 x},\ \ e^{k_2 x},\ \ xe^{k_2 x}, \ldots, x^{m_2-1}e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_r x},\ \ xe^{k_r x}, \ldots, x^{m_r-1}e^{k_r x},$$

$$e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ \ xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \ldots, x^{\mu_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,$$

$$e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\ \ xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \ldots, x^{\mu_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,$$

$$\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots$$

$$e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x,\ \ xe^{\alpha_s x}\cos\beta_s x, \ldots, x^{\mu_s-1}e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x,$$

$$e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x,\ \ xe^{\alpha_s x}\sin\beta_s x, \ldots, x^{\mu_s-1}e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x. \tag{61}$$

Подстановкой функций системы (60) (или (61)) в исходное уравнение (57) легко убедиться, что они являются его решением. Доказательство линейной независимости также не представляет трудностей.

Таким образом, решение линейного неоднородного уравнения сводится к **алгебраической задаче** отыскания корней полинома n-ой степени (58).

Мы уже говорили о том, что преобразование переменных – независимых и зависимых (искомых функций) – является эффективным средством решения уравнений. Удачно найденные замены часто позволяют свести исходное уравнение к уже решенным. Приведем несколько таких примеров, касающихся преобразования некоторых частных видов уравнений в уравнения с **постоянными коэффициентами.**

1. **Уравнение Эйлера**

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0,$$

где $a_j = \mathrm{const}$ $\left(j = 1, 2, \ldots, n\right)$, не является уравнением с постоянными коэффициентами, но заменой **независимой переменной** $x = e^t$ (при $x > 0$) оно сводится к таковому.

2. **Уравнение Лагранжа**

$$\left(a x + b\right)^n y^{(n)} + a_1 \left(a x + b\right)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\left(a x + b\right) y' + a_n y = 0,$$

где $a, b, a_j = \mathrm{const}$ $\left(j = 1, 2, \ldots, n\right)$, преобразуется с помощью подстановки $a x + b = e^t$.

3. **Уравнение Чебышева**

$$\left(1 - x^2\right) y'' - x y' + n^2 y = 0 \qquad (n = \mathrm{const}),$$

рассматриваемое на промежутке $|x| < 1$, заменой $x = \cos t$ сводится к уравнению

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + n^2 y = 0.$$

4. **Уравнение Бесселя**, имеющее вид

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0 \qquad \left(n = \mathrm{const}\right),$$

при значении параметра $n = 1/2$ с помощью замены **искомой функции** сводится к уравнению с постоянными коэффициентами и интегрируется в элементарных функциях. Достаточно в качестве новой искомой функции взять $z = x^{1/2} y$. Тогда, выразив отсюда $y,\ y',\ y''$ в терминах новой зависимой переменной z, подставив в исходное уравнение, получим (после упрощения) уравнение $z'' + z = 0$.

5. **Линейное однородное уравнение**

$$y'' + h_1(x) y' + h_2(x) y = 0$$

с помощью замены **искомой функции** $y = u\, e^{-\frac{1}{2}\int h_1(x)\,dx}$ приводится к уравнению

$$u'' + Q(x) u = 0,$$

в котором коэффициент $Q(x) = h_2(x) - \dfrac{1}{4} h_1^{\,2}(x) - \dfrac{1}{2} h_1'(x)$. Если $Q(x) \equiv C$, то имеем **уравнение с постоянными коэффициентами.** Если окажется, что $Q(x) = \dfrac{C}{\left(a x + b\right)^2}$ $(a,\ b,\ C = \mathrm{const})$, то уравнение будет **уравнением Лагранжа.**

5. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

После того, как в предшествующих разделах нами рассмотрены линейные неоднородные уравнения и линейные однородные с постоянными коэффициентами, об уравнениях **линейных неоднородных с постоянными коэффициентами**

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{62}$$

где $f(x)$ – непрерывная на $I = (a, b)$ функция, $a_j = \text{const}$ $(j = 1, \ldots, n)$, остается сказать совсем немного.

Так как фундаментальную систему решений линейного уравнения с постоянными коэффициентами $L(y) = 0$ всегда можно построить, то для нахождения общего интеграла линейного неоднородного уравнения (62) достаточно найти одно частное решение последнего. Это тоже всегда можно сделать, используя или метод Лагранжа вариации произвольных постоянных, или метод Коши. Таким образом, решение уравнения (62) может быть найдено в квадратурах.

Интегрирование уравнения (62) ещё более упрощается и сводится только к алгебраическим операциям (без квадратур) в некоторых частных случаях, когда правая часть $f(x)$ линейно неоднородного уравнения имеет специальный вид. Рассмотрим несколько таких ситуаций.

1. Пусть сначала

$$f(x) = P_m(x) e^{\sigma x}, \tag{63}$$

$P_m(x)$ – многочлен степени m, σ – комплексная (или действительная) постоянная, называемая **контрольным числом правой части** (63). Пусть, кроме того, контрольное число σ является корнем характеристического уравнения оператора $L(y)$ кратности $r \geq 0$. Тогда функция

$$\tilde{y} = x^r R_m(x)\, e^{\sigma x}, \tag{64}$$

где $R_m(x)$ – многочлен степени m, будет частным решением уравнения (62). Коэффициенты полинома $R_m(x)$ могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов. Отметим, что частное решение вида (64) однозначно, т. е. оно единственно среди решений такого вида.

Если число $r > 0$, то говорят, что имеет место **резонансный случай,** если $r = 0$ (σ не является корнем характеристического уравнения), то **нерезонансный.**

2. Пусть теперь правая часть $f(x)$ уравнения (62) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_k(x)\sin\beta x\right], \tag{65}$$

α, β – действительные постоянные, $P_m(x)$, $Q_k(x)$ – полиномы соответственно степени m и k с действительными коэффициентами.

В этом случае частное решение уравнения (62) с правой частью (64) может быть построено в виде

$$\tilde{y} = x^r e^{\alpha x}\left[R_\ell(x)\cos\beta x + S_\ell(x)\sin\beta x\right],$$

где $R_\ell(x)$, $S_\ell(x)$ – многочлены степени $\ell = \max\{m,\ k\}$, коэффициенты которых могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов, $r \geq 0$ – кратность контрольного числа $\sigma = \alpha + i\beta$ правой части как корня характеристического уравнения оператора $L(y)$. Случай $r > 0$ называют, как и выше, **резонансным,** $r = 0$ – **нерезонансным.**

3. Рассмотрим более общую ситуацию, часто встречающуюся в приложениях. Речь идёт об уравнениях, в которых правая часть $f(x)$ – периодическая функция с произвольным периодом T. В этом случае функция $f(x)$ представима в виде тригонометрического **ряда Фурье:**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \tag{66}$$

поэтому частное решение можно найти тоже в виде тригонометрического ряда с неопределенными коэффициентами

$$\tilde{y}(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos kx + B_k \sin kx\right). \tag{67}$$

В формулах (66) и (67) для простоты мы положили период $T = 2\pi$. Также для простоты и наглядности дальнейшие формулы приведём для уравнения **второго порядка** $(n = 2)$, в левую часть которого (см. п.5 предыдущего раздела) не входит первая производная искомой функции. Сделанные упрощения не ограничивают общности метода.

После сделанных упрощений уравнение (62) примет вид

$$L(y) \equiv y'' + q\,y, \quad (q = \text{const}). \tag{68}$$

После подстановки ряда (69) в уравнение (68) с учетом (66), приравнивая коэффициенты соответствующих гармоник и свободные члены (выражение $A_k \cos kx + B_k \sin kx$ называется k-й гармоникой), получим формальное решение в виде ряда

$$\tilde{y}(x) = \frac{a_0}{q} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{a_k}{k^2 - q}\cos kx - \frac{b_k}{k^2 - q}\sin kx\right). \tag{69}$$

Полученное решение существует при $q \neq 0$, $q \neq k^2$ $(k \in N)$ и представляет собой сходящийся ряд (в силу свойств ряда Фурье (66) функции $f(x)$).

Случай $q = 0$ и $q = k^2$ $(k \in N)$ (резонансный случай) следует рассматривать особо.

6. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Решение дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами далеко не всегда удается свести к квадратурам. В таких случаях часто эффективным оказывается метод интегрирования уравнений, основанный на представлении решения в виде степенного ряда.

Рассмотрим этот метод применительно к однородному уравнению **второго** порядка:

$$y'' + p(x)\, y' + q = 0. \qquad (70)$$

Будем предполагать, что его коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ есть аналитические функции на интервале $|x - x_0| < a, \quad a > 0,$ т. е. представимы в виде степенных рядов

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(x - x_0\right)^k, \; q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \left(x - x_0\right)^k, \qquad (71)$$

сходящихся при $|x - x_0| < a.$

Тогда, оказывается, что решение уравнения (70) будет тоже **аналитической функцией** на том же интервале, т. е. представимо в виде ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(x - x_0\right)^k, \qquad (72)$$

сходящегося при $|x - x_0| < a.$

Подстановка решения (72) в уравнение (70) и приравнивание к нулю коэффициентов при степенях $\left(x - x_0\right)$ даёт рекуррентную систему уравнений для определения коэффициентов c_k $(k = 0, 1, 2 \ldots)$:

$$\begin{gathered}
q_0 c_0 + p_0 c_1 + 1 \cdot 2 c_2 = 0, \\
q_1 c_0 + \left(q_0 + p_1\right) c_1 + 2 p_0 c_2 + 2 \cdot 3 c_0 = 0, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\sum_{i=1}^{k} \left[q_{k-i}\, c_i + \left(i + 1\right) p_{k-i} c_{i+1} \right] + \left(k + 1\right)\left(k + 2\right) c_{k+2} = 0, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{gathered} \qquad (73)$$

Два первых коэффициента c_0 и c_1 можно задавать произвольно. Нулевые значения $c_0 = c_1 = 0$ соответствуют тривиальному решению $y \equiv 0.$

Если же для уравнения (70) нужно решить задачу Коши с начальными данными $y\left(0\right) = c_0,$ $y'(0) = c_1,$ то из первого уравнения системы (73) определяется коэффициент $c_2,$ из второго c_3 и т. д.

14. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные понятия и методы решения

Если система k дифференциальных уравнений, связывающая независимую переменную x и k функций $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_k(x)$, разрешена относительно старших производных этих функций $y_1^{(p_1)}(x),\ y_2^{(p_2)}(x),\ \ldots,\ y_k^{(p_k)}(x)$, т. е. имеет вид

$$\begin{cases} y_1^{(p_1)}(x) = f_1\left(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_1^{(p_1-1)},\ \ldots,y_k,\ \ldots,\ y_k^{(p_k-1)}\right) \\ y_2^{(p_2)}(x) = f_2\left(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_1^{(p_1-1)},\ \ldots,y_k,\ \ldots,\ y_k^{(p_k-1)}\right) \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ y_k^{(p_k)}(x) = f_k\left(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_1^{(p_1-1)},\ \ldots,y_k,\ \ldots,\ y_k^{(p_k-1)}\right), \end{cases} \tag{74}$$

то она называется **канонической.** При этом число $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ называется **порядком системы.**

Каноническая система (74) при $n = p_1 = p_2 = \ldots = p_k = 1$, т. е. система дифференциальных уравнений первого порядка называется **нормальной** системой:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n\right) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2\left(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n\right) \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\left(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n\right) \end{cases} \tag{75}$$

Решением системы (75) на интервале $I = (a,\ b)$ называется совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x),\ \ldots,\ y_n = \varphi(x)$ непрерывно дифференцируемых на I и обращающих уравнения системы (75) в тождества относительно $x \in I$.

Интегралом системы (75) на интервале I называется функция $\psi(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\dfrac{\partial\psi}{\partial x},\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y_1},\ \ldots,\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y_n}$ в некоторой области переменных D и принимающая при любых $x \in I$ постоянное значение при подстановке в неё произвольного решения системы.

Равенство $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C$, где $\psi(x, y_1, \dots, y_n) -$ интеграл нормальной системы, $C -$ произвольная постоянная, называется **первым интегралом системы** (75).

Задача Коши для системы (75) формулируется следующим образом: найти решение $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ системы (75), удовлетворяющее начальным данным

$$y_1(x_0) = y_1^0, \qquad y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0, \tag{76}$$

где $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0 -$ заданные числа.

Приведём (без доказательства) теорему о существовании и единственности решения задачи Коши.

Теорема. Пусть правые части $f_1, f_2, \dots, f_n$ нормальной системы (75) определены в $(n+1)-$мерной области D изменения переменных $x, y_1, y_2, \dots, y_n$. Если в некоторой $\delta-$окрестности точки $M\left(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0\right) \in D$ функции f_i $(i = 1, \dots, n)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_i}$ $(i = 1, \dots, n)$, то существует интервал $x_0 - h < x < x_0 + h$ изменения переменной x, в котором решение системы (75), удовлетворяющее начальным данным (76), существует, и оно единственно.

Общим решением системы (75) называется совокупность функций

$$y_i\left(x, C_1, \dots, C_n\right), \qquad i = 1, \dots, n, \tag{77}$$

зависящая от n произвольных постоянных и при любых допустимых значениях постоянных $C_i (i = 1, \dots, n)$ обращающая уравнения системы (75) в тождества, и при этом в области, в которой выполнены условия теоремы существования и единственности, из семейства решений (77) можно получить решение задачи Коши с любыми начальными данными.

Основными методами решения нормальной системы являются метод **исключения** и метод **выделения интегрируемых комбинаций.**

Первый из них позволяет свести систему уравнений вида (75) к одному дифференциальному уравнению n-го порядка. Поясним это на примере.

Пример 29 . Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = -4y + z. \end{cases}$$

Решение. Найдем $z(x)$ из первого уравнения, $z = y - y'$. После дифференцирования левой и правой частей последнего равенства $z' = y' - y''$, подставив выражения z и z' через $y,\ y',\ y''$ во второе уравнение системы, получим дифференциальное уравнение второго порядка: $y'' - 2y' - 3y = 0$. Общее решение этого однородного дифференциального уравнения будет $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$. Отсюда сразу находим $z = y - y' = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{3x} = 2C_1 e^{-x} - 2C_2e^{3x}$. Таким образом, при любых постоянных C_1 и C_2 система функций

$$\begin{cases} y = C_1e^{-x} + C_2 e^{3x} \\ z = 2C_1e^{-x} - 2C_2 e^{3x} \end{cases}$$

является решением исходной системы примера.

Пример 30. Найти решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z + x, \\ \dfrac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным данным

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Решение

1. Сначала, применяя метод исключения, приведем систему уравнений задачи Коши к одному уравнению. Дифференцирование первого уравнения даёт $y'' = y' + z' + 1$. Подставив сюда выражение для y' и z' из системы, получим, $y'' = -3y - 2z + 3x + 1$. Из первого уравнения системы можно выразить функцию z через $y,\ y'$ и x: $z = y' - y - x$. Тогда $y'' = -3y - 2y' + 2y + 2x + 3x + 1$ или $y'' + 2y' + y = 5x + 1$. Это неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, к которому в результате применения метода исключения свелась система уравнений задачи.

2. Решение последнего предполагает сначала, как нам уже известно, отыскание общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 2y' + y = 0$. Его характеристическим уравнением будет уравнение $k^2 + 2k + 1 = 0$, которое имеет один корень $k = -1$ кратности два. Следовательно,

$$\bar{y}(x) = e^{-x}\left(C_1 + C_2x\right).$$

Частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения найдем методом неопределенных коэффициентов. Пусть $\tilde{y} = Ax + B$, тогда $\tilde{y}' = A$, $\tilde{y}'' = 0$. Подстановка в уравнение дает $2A + Ax + B = 5x + 1 \Rightarrow A = 5,\quad B = -9$ и, следовательно, $\tilde{y} = 5x - 9$.

Окончательно находим общее решение неоднородного уравнения
$y = \overline{y} + \tilde{y} = e^{-x}\left(C_1 + C_2 \quad x\right) + 5x - 9.$

3. Теперь уже можем найти общее решение системы. Для этого осталось найти функцию z, которая будет следующей

$$z(x) = y' - y - x = -2e^{-x}(C_1 + C_2\, x) + C_2 e^{-x} + 14 - 6x.$$

Таким образом, решением системы будет пара функций

$$\begin{cases} y(x) = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + 5x - 9, \\ z(x) = -2e^{-x}(C_1 + C_2\, x) + C_2 e^{-x} + 14 - 5x, \end{cases}$$

которые, напомним, являются двупараметрическим семейством.

4. Находим решение задачи Коши подстановкой общего решения в начальные условия задачи:

$$\begin{cases} C_1 - 9 = 1 \\ -2C_1 + C_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 10 \\ C_2 = 6. \end{cases}$$

Решением исходной задачи Коши будет пара функций

$$\begin{cases} y(x) = (6x + 10)\ e^{-x} + 5x - 9, \\ z(x) = -2\,(6x + 10)\, e^{-x} + 6\, e^{-x} + 14 - 6x. \end{cases}$$

Важно отметить, что методом исключения к одному уравнению сводится не всякая система. В качестве примера, когда это не так, можно привести следующую систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y' = x\ y \\ z' + y' = z + x\, y. \end{cases}$$

Если в ней выражение для y' из первого уравнения подставить во второе, то получим два не связанных между собой уравнения, каждое из которых содержит только по одной неизвестной функции: $y' = x\, y$ и $z' = z.$ Оба уравнения есть уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, и их решениями соответственно будут функции $y = C_1 e^{x^2/2},\qquad z = C_2 e^{x}.$

Другим методом интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений является метод **выделения интегрируемых комбинаций.** Он заключается в получении из системы (75) такого уравнения, которое можно было бы проинтегрировать и получить первый интеграл системы. Если таким способом будут найдены n независимых первых интегралов системы (75), то их совокупность даст общий интеграл системы.

К сожалению, ограниченный объем данного пособия не позволяет изложить метод подробнее, поэтому мы ограничимся только приведенным выше указанием его идеи.

Для лучшего уяснения понятия систем дифференциальных уравнений и задач для них дадим **физическую интерпретацию нормальной системы.** Для простоты ограничимся рассмотрением системы из двух уравнений. Будем считать, что независимая переменная t есть время:

$$\begin{cases} x' = f_1(t,\ x,\ y), \\ y' = f_2(t,\ x,\ y). \end{cases} \tag{78}$$

Решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ системы (78) есть некоторая кривая в плоскости Oxy декартовой прямоугольной системы координат. Плоскость Oxy называется **фазовой плоскостью,** (или **пространством,** если порядок системы $n > 2$), а кривая $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – **фазовой траекторией системы** (78).

Системы вида (78) в механике принято называть **динамическими системами.** Сама система определяет поле скоростей движущейся точки в плоскости в любой момент времени t. Её решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – суть уравнения движения точки, они определяют положение точки при произвольном значении t. Начальные условия (задачи Коши для динамической системы (78)) задают положение точки в начальный момент: $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Уравнения движения определяют также **траекторию движения,** будучи уравнениями этой кривой в параметрической форме.

В заключение отметим, что нормальная система координат (75) может быть записана ещё в так называемой **симметричной форме.** Если уравнения системы (75) записать в виде $dx = \dfrac{f_i(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)}{dy_i}$, $(i = 1,\ \dots,\ n)$, то следующие отсюда равенства

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)} = \dots \dots = \frac{dy_n}{f_n(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)} \tag{79}$$

принято называть **симметричной формой нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.** Термин «симметричная» объясняется тем, что в систему (79) независимые и зависимые переменные входят равноправно и, следовательно, могут быть обозначены одной буквой с индексом. Например, можно обозначить x через y_{n+1}. Кроме того, знаменатели в (79) можно умножить на любую функцию тех же переменных, отличную от нуля в области их изменения. Если, наконец, $n+1$ обозначить через m, то мы приходим к более распространенному в литературе виду симметричной формы нормальной системы:

$$\frac{dy_1}{f_1(y_1,\ \dots,\ y_m)} = \frac{dy_2}{f_2(y_1,\ \dots,\ y_m)} = \dots = \frac{dy_m}{f_m(y_1,\ \dots,\ y_m)}. \tag{80}$$

Вид (80) бывает более удобен, чем (75) при решении системы методом выделения интегрируемых комбинаций.

При решении систем в симметричной форме, к которой применимы те же методы, что и к системе (75), бывает полезно использовать свойство равных дробей:

если есть равные дроби $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}= \dots = \frac{a_n}{b_n}$ и произвольные числа $k_1, k_2, \dots, k_n$,

то $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}= \dots = \frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1a_1+k_2a_2+\dots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\dots+k_nb_n}$.

8. Системы линейных однородных уравнений

Структура теории систем линейных уравнений во многом аналогична таковой для одного уравнения. Идя в той же последовательности, мы сначала рассмотрим системы линейных однородных уравнений.

Системой однородных линейных дифференциальных уравнений называется система уравнений

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y, \quad y\in R^n, \quad x\in I, \tag{81}$$

где $A(x)$ – квадратная матрица размером $n\times n$, составленная из коэффициентов $a_{ij}(x)$ $(i, j=1, \dots, n)$, являющихся непрерывными функциями на интервале I. Неизвестные функции y_i $(i=1, \dots, n)$ и их производные y_i' $(i=1, \dots, n)$ образуют матрицы-столбцы размером $n\times 1$.

Линейная система однородных уравнений (или матричное уравнение) (81) и её решение обладают рядом замечательных свойств, которые перечислим без доказательства. Будем наряду с термином «система уравнений» говорить просто «уравнение», подразумевая при этом матричную форму записи системы уравнений.

1. Множество L всех решений системы (81), определенных на I, является **линейным пространством.**

2. Любое из решений можно продолжить на весь интервал I.

3. Линейное пространство L **изоморфно** фазовому пространству R^n этой системы.

Фундаментальной системой решений линейной однородной системы уравнений называется **базис** линейного пространства решений L, т. е. n линейно независимых решений этой системы.

Матрицу $Y(x)$, столбцами которой являются решения, образующие фундаментальную систему решений, называют **фундаментальной матрицей.**

4. Любое уравнение (система) (81) имеет фундаментальную систему решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$.

5. Любое решение уравнения (81) является **линейной комбинацией** решений фундаментальной системы решений.

6. Любые $(n+1)$ решений уравнения (81) линейно зависимы.

Заметим, что свойства 4, 5, 6 являются следствием более сильного утверждения (свойства) 1.

Определителем Вронского системы вектор-функций $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$ называется определитель матрицы, столбами которой являются элементы этой системы:

$$W(x)=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(x) & \ldots & \varphi_{n1}(x) & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{1n}(x) & \ldots & \varphi_{nn}(x) & & \end{vmatrix}.$$

7. Система решений $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$ уравнения (81) будет фундаментальной тогда и только тогда, когда её определитель Вронского отличен от нуля в какой-нибудь точке x. Если вронскиан обращается в нуль в одной точке интервала, то он тождественно равен нулю на всем интервале.

8. Для определителя Вронского системы решений уравнения (81) имеет место формула Лиувилля-Остроградского:

$$W(x)=e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\,dr}\,W(x_0),$$

где $a(x)=S_p\,A(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)$ – **след матрицы** $A(x)$.

9. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Если в системе (81) элементы матрицы A коэффициентов не зависят от x, то такая система называется **линейной однородной системой с постоянными коэффициентами.** Она имеет вид

$$\frac{dy}{dx}=A\,y, \tag{82}$$

где A – числовая квадратная матрица размером $n\times n$, dy/dx и y – матрицы-столбцы размером $n\times 1$.

Разумеется, всё, что сказано о системах уравнений выше, справедливо и для системы (82). Вместе с тем существуют эффективные методы решения, применимые только к линейным однородным системам уравнений с постоянными коэффициентами.

Метод Эйлера заключается в представлении решения системы (82) в виде

$$\vec{y}=e^{\lambda x}\,\vec{a}, \tag{83}$$

где $\vec{y}$ и $\vec{a}$ – n-мерные векторы, λ – скалярная величина.

Оказывается, что представление (83) будет решением системы (82), если λ – собственное значение матрицы A, а вектор $\vec{a}$ – её собственный вектор, соответствующий числу λ. При этом, если все корни $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$ имеют кратность, равную единице (E – единичная матрица размером $n\times n$), и $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$ – соответствующие собственные векторы этой матрицы, то общее решение системы (82) будет

$$\vec{y} = C_1 e^{\lambda_1 x}\,\vec{a}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}\,\vec{a}_2 + \dots\ C_n e^{\lambda_n x}\,\vec{a}_n,$$

где $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ – произвольные числа.

Если кратность k какого-нибудь собственного числа λ превышает единицу, то возможны два случая. Первый – когда число линейно независимых собственных векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots\ ,\ \vec{a}_k$ совпадает с кратностью собственного числа. В этом случае данному собственному числу λ соответствует k линейно независимых решений исходной системы: $e^{\lambda_1 x}\vec{a}_1,\ e^{\lambda_2 x}\,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\ e^{\lambda_k x}\,\vec{a}_k$.

Второй случай – когда собственному числу λ кратности k соответствует m линейно независимых векторов и при этом $m < k$. Тогда решения системы, соответствующие числу λ, следует искать в виде

$$y = \left(\vec{a}_0 + \vec{a}_1 x + \dots + \vec{a}_{k-m} x^{k-m}\right) e^{\lambda x}. \tag{84}$$

Чтобы найти векторы $\vec{a}_0,\ \vec{a}_1,\ \dots\ ,\ \vec{a}_{k-m}$, нужно подставить представление (84) в исходную систему (82). Приравнивая коэффициенты подобных членов в левой и правой частях, получим алгебраические уравнения для определения векторов $\vec{a}_0,\ \vec{a}_1,\ \dots\ ,\ \vec{a}_{k-m}$.

Если среди собственных чисел матрицы A окажется **комплексное** число λ, то построенное описанным выше методом решение будет тоже, вообще говоря, комплексным. Взяв его действительную и мнимую части (для действительной матрицы A), получим два линейно независимых (действительных) решения, соответствующие этому собственному числу.

Другой метод решения линейных однородных систем, который мы здесь рассмотрим, основан на понятии функции экспоненты матрицы.

Экспонентой e^A **матрицы** A называется сумма ряда

$$e^A = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}A^i, \tag{85}$$

где E – единичная матрица.

Матричная экспонента обладает следующими свойствами.

1. Если произведение двух матриц A и B коммутативно, т. е. $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$.

2. Если $A = T^{-1} J\, T$, где J – жорданова матрица, то $e^A = T^{-1} e^J\ T$.

Оказывается, что матрица $y(x) = e^{Ax}$ является решением матричной задачи Коши: $\dfrac{dy}{dx} = A\,y,\ \ y(0) = E$, т. е. фундаментальной матрицей системы (82).

Из второго свойства следует, что решение $y(x)$ системы (82), удовлетворяющее условию $y(0) = y_0$, определяется выражением $y(x) = e^{Ax} y_0$. Это значит, что построение решений системы уравнений (82) сводится к задаче построения матрицы e^{Ax} по матрице A коэффициентов системы.

Для вычисления матрицы e^{Ax} используется представление матрицы A в виде $A = T^{-1} J_A T$, где J_A – жорданова форма матрицы A. Тогда $e^{Ax} = T^{-1} e^{J_A x} T$.

Жорданова клетка $$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

представима в виде $J = \lambda E + I$, где

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $e^{Jx} = e^{\lambda x} \cdot e^{Ix}$. Матрица e^{Ix} находится с помощью ряда (85). Если r – это размер матрицы Жордана J, то $I^r = 0$ и, следовательно в (85) отличными от нуля будут только первые r членов.

10. Линейные неоднородные системы

Линейной неоднородной системой называется система

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \tag{86}$$

где $x = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$, $f = (f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_n)$ – n-мерные векторы, $A = \{a_{ij}(x)\}$ – квадратная матрица размером $n \times n$ коэффициентов.

Самым распространенным методом решения линейной неоднородной системы (86) является знакомый нам уже метод **вариации произвольных постоянных,** если только уже построено решение соответствующей однородной системы:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y. \tag{87}$$

Решение однородной системы (87) имеет вид

$$y = Y(x) \cdot C, \tag{88}$$

где $Y(x)$ – фундаментальная матрица системы (87), C – произвольный постоянный n-мерный вектор. **Частное решение** неоднородной системы (86) можно искать, по аналогии с теорией для одного уравнения, в виде $y = Y(x) \cdot C(x)$. Компоненты $C_i(x)$, $i = 1,\ \dots,\ n$ вектора $C(x)$ являются решением системы уравнений

$$Y(x)\frac{dC}{dx} = f(x).$$

Общее решение неоднородной системы (86) будет представлять собой сумму общего решения однородной системы (87) и частного решения неоднородной системы (87).

Другой метод решения систем линейных неоднородных уравнений – это знакомый нам уже метод **интегрируемых комбинаций,** позволяющий приводить систему к одному уравнению более высокого порядка.

Для **линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами,** т. е. систем (87), в которых матрица A не зависит от x, в ряде случаев частное решение удаётся найти методом **неопределенных коэффициентов.** Такие случаи определяются видом функций $f_i(x)$, $i=1, \ldots, n$. Не излагая здесь этот вопрос подробно, отметим лишь, что функции $f_i(x)$ могут состоять из сумм и произведений полиномов $b_1 x + \ldots + b_m x^m$, экспонент $e^{\alpha x}$ и тригонометрических функций $\cos\beta x$, $\sin\beta x$. Тогда частное решение ищется в виде тех же комбинаций с неопределенными коэффициентами, которые находятся путём подстановки решения в систему и приравнивания коэффициентов при подобных членах.

11. Понятие устойчивости решений дифференциальных уравнений

Применение математики к исследованиям в различных областях знаний зачастую сводится к тому, что модель того или иного явления описывается системой дифференциальных уравнений (не обязательно обыкновенных). При этом требуется, чтобы интересующее исследователя решение удовлетворяло дополнительным условиям (начальным данным, краевым условиям, условиям затухания, условиям на разрыве решения и т. д.). В этом случае мы имеем дело, как уже говорилось, с задачей для дифференциального уравнения (или системы). Даже в тех редких ситуациях, когда удаётся найти точное решение задачи (системы или уравнения), важное значение имеет качественный анализ решений. Один из вопросов качественного анализа наряду с вопросами, например, существования и единственности решения – это исследование решений на **устойчивость.** Последнее приобрело особое значение в связи с бурным развитием ЭВМ и вычислительных методов, что позволило строить приближенные решения таких задач, которые в первой половине прошлого столетия казались недоступными.

Кратко рассмотрим понятие устойчивости на примере нормальной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y = (y_1, \ldots, y_n), \tag{89}$$

в которой все f_i и $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ непрерывны при $x_0 \le x < \infty$.

Решение $y = \varphi(x)$ системы (89) называется **устойчивым по Ляпунову,** если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого решения $y(x)$ той же системы, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$\left| y(x_0) - \varphi(x_0) \right| < \delta, \tag{90}$$

при всех $x \geq x_0$ выполняется неравенство $|y(x)-\varphi(x)|<\varepsilon.$

Если же для некоторого $\varepsilon > 0$ такого δ не существует, то решение $\varphi(x)$ называется **неустойчивым.**

Решение $\varphi(x)$ называется **асимптотически устойчивым,** если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения с достаточно близкими начальными условиями неограниченно приближаются к $\varphi(x)$ при $x \to +\infty$, т. е. если из неравенства (90) следует, что $y(x)-\varphi(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Вопрос об устойчивости данного решения $y=\varphi(x)$ системы (89) сводится к вопросу об устойчивости нулевого решения $z(x) \equiv 0$ другой системы, получаемой из (89) заменой искомой функции по формуле $z(x)=y-\varphi(x)$. Приведем некоторые из критериев устойчивости.

1. Часто (но не всегда!) вопрос устойчивости решения системы (89) удаётся исследовать с помощью **первого приближения,** которое строится путём выделения линейной части функций f_i вблизи точки $y_1 = \dots = y_n = 0$. Тогда вопрос об устойчивости решения можно решить с помощью следующей теоремы.

Теорема Ляпунова. Пусть дана система

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n + \psi_i(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n), \quad i=1,\ \dots,\ n \tag{91}$$

в которой a_{in} – постоянные, ψ_i – бесконечно малые порядка выше первого, точнее, при $|y|<\varepsilon_0$

$$|\psi_i| \leq \gamma(y)|y|, \quad i=1,\ \dots,\ n, \quad \gamma(y) \to 0 \quad \text{при} \quad |y| \to 0, \tag{92}$$

где $|y| = \sqrt{|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2}$.

Если все собственные значения матрицы $\{a_{ik}\}$, $i, k = 1,\ \dots,\ n$ имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение системы (91) асимптотически устойчиво. Если вещественная часть хоть одного собственного числа положительна, то нулевое решение неустойчиво.

2. Другой критерий исследования решения системы на устойчивость заключается в использовании **функций Ляпунова.**

Производной от функции $v(x,\ y_1,\ y_2,\ \dots\ y_n)$ **в силу системы** (89) называется функция

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y_1}f_1 + \dots + \frac{\partial v}{\partial y_n}f_n,$$

где $f_1,\ \dots,\ f_n$ – правые части системы (89).

Теорема Ляпунова. Если существует дифференцируемая функция $v(y_1,\ \dots,\ y_n)$, удовлетворяющая в области $|y|<\varepsilon_0$ условиям

1) $v>0$ при $y \neq 0$, $v(0)=0$,

2) $\dfrac{dv}{dx} \le 0$ при $|y| < \varepsilon_0, \quad x > x_0,$

то нулевое решение системы (89) **устойчиво по Ляпунову.**

Если вместо условия 2 выполнено более сильное условие

3) $\dfrac{dv}{dx} \le -w(y) < 0$ при $0 < |y| < \varepsilon_0, \quad x > x_0,$

а функция $w(y)$ непрерывна при $|y| < \varepsilon_0$, то нулевое решение системы (89) **асимптотически устойчиво.**

Фигурирующая в этой теореме функция v называется **функцией Ляпунова.** Если решение системы (89) неизвестно, то общего метода построения функции Ляпунова не существует. Заметим, что в ряде случаев функцию Ляпунова удается построить в виде квадратичной формы $v = \sum\limits_{i,\, j=1}^{n} b_{ij}\, y_i\, y_j$ или в виде суммы квадратичной формы и интегралов от нелинейных функций, входящих в правую часть этой системы.

В заключение отметим, что различных критериев устойчивости (неустойчивости) существует достаточно много, однако ограниченный объем пособия не позволяет рассмотреть важный в теории дифференциальных уравнений вопрос устойчивости подробнее.

Приложение

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений в прикладном пакете Mathcad 2 000

В настоящее время разработано и используется в учебных и прикладных целях несколько математических систем: Derive, Mathcad, Matlab, Mathematica, Maple. Каждая имеет свои преимущества и недостатки. Mathcad ориентирована и создавалась для численного решения математических задач. Запись задачи в рабочей области листа Mathcad выглядит почти также, как если бы Вы решали задачу на обычном листе без компьютера. Windows-стандарты, которыми студент уже успел овладеть, работая в приложениях Office, остаются прежними. Вызов меню, панелей инструментов, работа с окнами, сохранение, создание и редактирование документов делается привычным образом с помощью знакомых команд известных меню Файл, Вид, Правка и т. д. Мы не ставим задачу познакомить читателя со всеми возможностями пакета, а укажем функции Mathcad, позволяющие решать дифференциальные уравнения и системы дифференциальных равнений. Существуют различные версии системы, одна из последних версий Mathcad 2 000 русифицирована. Новости разработчиков, примеры решения различных задач, в том числе прикладных, а также электронные обучающие уроки можно найти на сайте www.exponenta.ru .

Обратим внимание читателя, что любой документ в Mathcad состоит из отдельных блоков различного типа: тексты (комментарии к задаче) – текстовая область, формулы – формульный редактор, графики – математическая область, таблицы. Расположение блоков имеет принципиальное значение, они выполняются слева направо и сверху вниз. При этом текстовый курсор в каждой области имеет свои очертания. Нужно обратить внимание, что существуют разные типы и области действия переменных. Принцип передачи данных сквозной – от одного объекта к другому: от математических выражений к таблицам, от них – к графикам, при этом изменение начальных значений ведет к перерасчету всей цепочки в задаче. Не вдаваясь в подробное описание системы, перейдем собственно к предмету.

В Mathcad разнообразные встроенные функции классифицированы, выбор осуществляется с помощью диалогового окна Insert Function (Вставить функцию), вызываемого командой Function (Функция) из раздела меню Insert (Вставка). Для решения дифференциальных уравнений Mathcad предоставляет пользователю библиотеку встроенных функций из категории **Differential Equation Solving,** предназначенных для численного решения дифференциальных уравнений. Для вставки шаблона функции необходимо выбрать нужную функцию из категории, шаблон которой появится в том месте, где находился курсор. После этого шаблон требует заполнения, ввода необходимых аргументов функции.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными можно решить или проверить собственное решение с помощью обычного символьного интегрирования, используя команду Integrate подпункта Variable меню Simbolics.

Пример. Найти интеграл для дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{x} \cdot dy = y\ dx.$$

Приведём уравнение к виду, удобному для интегрирования (уравнение с разделяющимися переменными), и проведем символьное интегрирование левой и правой частей уравнения:

$$\frac{dy}{y} = x \cdot dx,$$

$$\int \frac{1}{y} dy \to \ln(y),$$

$$\int x\,dx \to \frac{1}{2} \cdot x^2,$$

$$\ln(y) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + C.$$

Получим аналитическое выражение (используя технику символьных вычислений) для функции $y(x, C)$:

Given

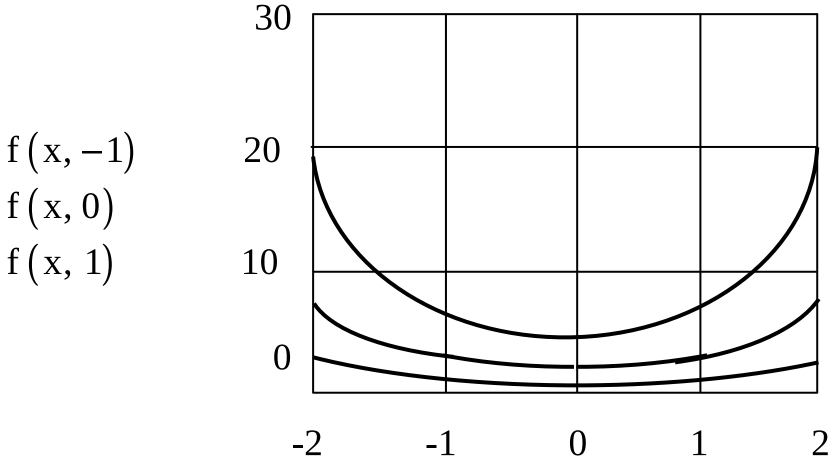
$$\ln(y) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + C,$$

$$\mathrm{Find}(y) \to \exp\left(\frac{1}{2}\cdot x^2 + C\right),$$

$$f(x, C) := \exp\left(\frac{1}{2}\cdot x^2 + C\right),$$

$$x := -2, -1{,}9..2\,.$$

Можно построить интегральные кривые:



Функция odesolve

Встроенная функция **odesolve** предназначена для решения дифференциальных уравнений, **линейных** (или разрешенных) **относительно старшей производной**. В отличие от других функций библиотеки **Differential Equation Solving**, **odesolve** решает дифференциальные уравнения, записанные в общепринятом в математической литературе виде.

Функция **odesolve** решает для уравнений вида

$$a(x)\ y^{(n)} + F\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\right) = f(x)$$

– задачу Коши

$$y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y_{0,1},\quad y''(x_0) = y_{0,2},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$$

– или простейшую граничную задачу

$$y^{k}(a) = y_{a,k},\qquad y^{(m)}(b) = y_{b,\,k},\quad 0 \le k \le n-1,\quad 0 \le m \le n-1.$$

Функция **odesolve** решает поставленную задачу численным методом Рунге-Кутта с фиксированным шагом. Для решения задачи методом Рунге-Кутта с *автоматическим* выбором шага нужно щелкнуть в рабочем документе по имени функции правой кнопкой мыши и пометить во всплывающем меню пункт **Adaptive**.

Обращение к функции имеет вид

$Y := \text{odesolve}(x,\ b,\ \text{step})$ или $Y := \text{odesolve}(x, b)$, где $Y -$ имя функции, содержащей значения найденного решения, $x -$ переменная интегрирования, $b -$ конец промежутка интегрирования, $\text{step} -$шаг, который используется при интегрировании уравнения методом Рунге-Кутта.

Перед обращением к функции **odesolve** необходимо записать ключевое слово **Given**, затем ввести уравнение и начальные либо граничные условия. При вводе уравнения и условий задачи используется знак символьного равенства (**<Ctrl> + <=>**), а для записи производных можно использовать как оператор дифференцирования, так и знак производной. Например, вторую производную можно вводить в виде $\frac{d^2}{dx^2}y(x)$ или в виде $y''(x)$. При этом необходимо обязательно записывать аргумент искомой функции.

Для того чтобы вывести в рабочий документ значения решения в любой точке промежутка интегрирования, достаточно ввести имя функции *Y*, указать в скобках значение аргумента и поставить знак равенства. Значения решения в любой точке промежутка интегрирования можно использовать в дальнейших вычислениях. Для этого достаточно ввести в нужном месте имя функции Y, указав в скобках значение аргумента.

Функция rkfixed

Функция $\text{rkfixed}\ (Y,\ x1,\ \ x2,\ k,\ F)$выдает таблицу результатов решения систем обыкновенных уравнений методом Рунге-Кутта четвертого порядка с фиксированным шагом интегрирования. Аргументы функции – это:

Y – вектор начальных значений искомых функций,
$x1$ – начальное значение переменной,
$x2$ – конечное значение переменной,
k – фиксированное число шагов интегрирования,
F – вектор-функция правых частей системы уравнений.

Если система уравнений содержит n уравнений, то результатом применения функции **rkfixed** будет являться таблица с $(n+1)$ столбцами и k строками. При этом первый столбец таблицы состоит из значений независимой переменной x с фиксированным шагом, а последующие столбцы таблицы – из значений n искомых функций в соответствующих точках. Представление результата возможно не только в табличном виде, но и в графическом. Графики искомых функций строятся с помощью команды **Plot,** первый столбец таблицы принимается за значения независимой переменной, а каждый следующий – за значения функций.

Существует еще ряд функций этой категории для реализации отдельных численных методов решения дифференциальных уравнений. Для более подробного знакомства с возможностями пакета советуем обратиться к указанной литературе или к примерам, разобранным на указанном сайте.

Библиографический список

1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1953. – 468 с.

2. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высш. школа, 1989. – 383 с.

3. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1970. – 96 с.

4. Д. Кирьянов. Самоучитель Mathcad-12. Санкт-Петербург, БХВ – Петербург, 2004.

5. Дьяконов. Энциклопедия Mathcad 2001. – М.: Солон – Пресс, 2004.

Редактор Н.Н. Пацула
ИД 06039 от 12.10.01.

Подписано в печать 22.06.05. Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л.2,5. Уч.- изд. л. 2,5.
Тираж 200 экз. Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ