МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ
ГУМАНИТАРНОГО ФАКУЛЬТЕТА

Омск-2001

Составители:

Веснина Алефтина Александровна

Стругова Татьяна Михайловна

Данные методические указания предназначены студентам гуманитарного факультета заочной формы обучения. Они содержат задания по всем темам программы. В конце приведены образцы решения задач.

Тема 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Задачи для контрольной работы

ЗАДАНИЕ № 1. Вычислить определители:

1. а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

3. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

4. а) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$

5. а) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

6. а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$

7. а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

8. а) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

9. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

10. а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$

11. а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

12. а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$

13. а) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

14. а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

15. а) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

16. а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & -2 \\ 1 & -3 & -7 & 6 \end{vmatrix}$

ЗАДАНИЕ № 2. Умножить матрицы:

1. а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

2. а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

3. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

4. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

5. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

8. а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

9. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

11. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

12. а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

13. а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

14. а) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

15. а) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

16. а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ № 3. Найти обратные матрицы для матриц:

1. а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 2. а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

3. а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 4. а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5. а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 6. а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

7. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

9. а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 10. а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

11. а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ 12. а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

13. а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ 14. а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

15. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ 16. а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ № 4. Найти двумя способами ранг матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Тема 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задачи для контрольной работы

ЗАДАНИЕ №1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

1.а) $\begin{cases} x-2y-z=-5 \\ x+2y-2z=2 \\ 3x+y-4z=-2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+z=-2 \\ x+2y+2z=1 \\ 3x+y+4z=0 \end{cases}$ 2. а) $\begin{cases} 2x+y-z=7 \\ 2x-2y+3z=3 \\ x-y-z=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-2y+3z=6 \\ 3x-2y+4z=7 \\ 3x+2y-3z=4 \end{cases}$

3.а) $\begin{cases} 2x+2y-3z=-4 \\ x+2y+z=5 \\ 3x+z=-1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3y-z=-2 \\ 2x+2y-z=1 \\ 2x+3y+3z=4 \end{cases}$ 4.а) $\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ x+3y-z=7 \\ 3x-y-4z=12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ x-y-z=-1 \\ x+3y-z=3 \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x+3y+3z=11 \\ x-2y+3z=1 \\ 3x+3y-z=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2z=11 \\ 2x-2y+3z=3 \\ x-y+4z=-1 \end{cases}$ 6. а) $\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 4x+2y+5z=5 \\ 3x+4y+7z=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 2x+6y+z=2 \\ 4x+8y-z=2 \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} 2x+4y+z=4 \\ 3x+6y+2z=4 \\ 4x-y-3z=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 4x+y+4z=9 \\ 3x+5y+2z=10 \end{cases}$ 8. а) $\begin{cases} 3x-3y+2z=2 \\ 4x-5y+2z=1 \\ 5x-6y+4z=3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+2y-4z=8 \\ 2x+4y-5z=11 \\ 4x-3y+2z=1 \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$ 10. а) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 5x - 2y + 7z = 22 \\ 2x - 5y + 4z = 4 \end{cases}$ 12. а) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ 3x - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ 14. а) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ 4x + y + 3z = 9 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ 16. а) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 3z = 14 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$

Задание № 2. Решить системы методом Гаусса:

1. а) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ -x + 4y + z = 3 \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 4 \\ 9x + 4y + z + 7t = 2 \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 4x - 11y + 10z = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \\ 3x + 6y + 9z = 2 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 5z = 6 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 1 \\ 3x + 2y + z - t = 1 \\ 5x + 5y + 2z = 2 \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 5x + y - z = 7 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+3y-z=3 \\ 4x-y+z=11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \\ 3x+4y+3z=0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=10 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y+3z+4t=5 \\ x-y+z-t=1 \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-3y+4z=2 \\ 11x-12y+17z=3 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} x+2y-6z=5 \\ 2x-y+3z=-7 \\ 5x+5y-15z=8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-y+3z=9 \\ 3x-5y+z=-4 \\ 4x-7y+z=5 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y+3z+4t=5 \\ x-y+z-t=1 \end{cases}$

8.а) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 11x+17y+6z-39u=1 \\ 2x-3y-5z-u=0 \\ x+32y+31z-34u=1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y-3z=13 \\ 3x-2y+4z=-15 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+3y-z=1 \\ 3x+4y-z=5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ x-2y+z-t=-1 \\ x-2y+z+5t=5 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+z+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y-3z=13 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x-2y+4z=-15 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$

10.а) $\begin{cases} 2x-y+3z=-7 \\ x+2y-6z=-1 \\ -x+5y-15z=8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-3y+2z=5 \\ 3x-y+4z=7 \\ 5x-7y+8z=1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-y+3z-7t=5 \\ 6x-3y+z-4t=7 \\ 4x-2y+14z-31t=18 \end{cases}$

11.а) $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 3x+2y-4z=2 \\ 5x-2y+2z=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-11y+4z=13 \\ 2x-10y+5z=1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9x-3y+5z+6t=4 \\ 6x-2y+3z+t=5 \\ 3x-y+3z+14t=-8 \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ 2x-y+5z=12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-7y+6z=4 \\ x+12y-11z=-7 \\ 3x-2y+z=1 \\ 8x+y-3z=-1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-y-z=-6 \\ 3x-4y+3z=0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 2x+6y+z=2 \\ 4x+8y-z=2 \\ 3x+9y+3z=6 \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+2y-2z=5 \\ 2x-y-3z=4 \\ 3x+y-5z=1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \\ 3x+4y+3z=0 \end{cases}$

14.а) $\begin{cases} 3x+2y+z=-1 \\ 7x+6y+5z=5 \\ 5x+4y+3z=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y+5z+7t=1 \\ 4x-6y+2z+3t=2 \\ 2x-3y-11z-15t=1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-y+3z=0 \\ 2x-7y+5z=1 \\ 3x-8y+8z=5 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y+3z+4t=5 \\ x-y+z-t=1 \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ 2x-y+5z=12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+3z-t=1 \\ 3x+2y+z-t=1 \\ 5x+5y+2z=2 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+2y+2z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 3x+y+4z=1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+3y-z=1 \\ 3x+4y-z=5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 2x-y-2z=-4 \\ 3x+y-4z=1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9x-3y+5z+6t=4 \\ 6x-2y+3z+t=5 \\ 3x-y+3z+14t=-8 \end{cases}$

Задание № 3. Решить системы однородных уравнений:

1. а). $\begin{cases} 3x+4y+2z=0 \\ x-y+4z=0 \\ 5x+2y+10z=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+2y-z=0 \\ 2x+5y+3z=0 \\ 4x+3y=0 \end{cases}$ 2. а). $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 3x+6y+9z=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x-y+3z-t=0 \\ 2x+2y-z+2t=0 \\ 2x-7y+5z-t=0 \end{cases}$

3. а). $\begin{cases} x+2y+z+t=0 \\ 2x+5y+z+5t=0 \\ 3x+8y+z+9t=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 4. а). $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+2y-3z=0 \\ 3x+z=0 \\ 5x+2y-2z=0 \end{cases}$

5.а). $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 4x+4y-4z=0 \\ 5x+5y-5z=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x-y+z+t=0 \\ x+3y-z-2t=0 \\ 3x-y-4z-t=0 \end{cases}$ 6. а). $\begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ 2x+3y-5z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 4x-3y+z-t=0 \\ 2x+y+3z-5t=0 \\ x-2y-2z+3t=0 \end{cases}$

7.а). $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ 4x-11y+10z=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 3x+5y+4z=0 \\ 3x-2y-4z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \end{cases}$ 8. а). $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ 5x-7y+8z=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=0 \\ 6x-4y+4z+3t=0 \\ 9x-6y+3z+2t=0 \end{cases}$

9.а). $\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ x-y+z=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 3x-y+3z+14t=0 \\ 6x-2y+3z+t=0 \\ 9x-3y+5z+6t=0 \end{cases}$ 10. а). $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x+2y+z-t=0 \\ x-12y+4z+2t=0 \\ 3x-5y+3z+t=0 \end{cases}$

11.а). $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+2y-5z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x+2y+z+t=0 \\ x+y+2z-t=0 \\ 2x+y+z-2t=0 \end{cases}$ 12. а). $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ x+2y+9z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ x+y+3z=0 \\ 2x+2y+4z=0 \end{cases}$

13.а). $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 5x-y+2z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x+5y+4z+3t=0 \\ 2x-y+2z-t=0 \\ 5x+3y+8z+t=0 \end{cases}$ 14. а). $\begin{cases} 2x+y-4z=0 \\ 3x+5y-7z=0 \\ 4x-5y-6z=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x-2y-4z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \\ 5x+8y-3z=0 \\ 3x+y-6z=0 \end{cases}$

15.а). $\begin{cases} 3x+5y+2z=0 \\ 4x+7y+5z=0 \\ x+y-4z=0 \\ 2x+9y+6z=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ 2x-2y+4z=0 \\ 5x-5y+10z=0 \end{cases}$ 16.а). $\begin{cases} 2x-4y+5z+3t=0 \\ 3x-6y+4z+2t=0 \\ 4x-8y+17z+11t=0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ 2x+5y+3z=0 \\ 3x+4y+2z=0 \end{cases}$

Тема 3. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Задачи для контрольной работы

ЗАДАНИЕ № 1.Построить графики функций путем сдвигов и деформаций:

1. $y=\dfrac{1}{x+2}-3$ 2. $y=(x-1)^3+7$ 3. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-1$ 4. $y=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

5. $y=8\cdot 2^x-2$ 6. $y=\lg(x+2)-\dfrac{1}{2}$ 7. $y=\log_3(x-2)+1$ 8. $y=\lg(-x)-2$

9. $y=-2\cos 2x$ 10. $y=2arctg2x$ 11. $y=-\arcsin x+\dfrac{\pi}{3}$ 12. $y=\sin(x-3)+1$

13. $y=tg(x-1)+1$ 14. $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 15. $y=(x+1)^3-3$ 16. $y=2^{x-3}+1$

ЗАДАНИЕ № 2. Построение графика функции, заданной несколькими аналитическими выражениями:

1. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & при \quad |x|\le\pi \\ 0, & при \quad |x|>\pi \end{cases}$ 2. $f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad |x|>2 \\ 1, & при \quad 1<|x|\le 2 \\ -x^2+2, & при \quad |x|<1 \end{cases}$ 3. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & если -\pi\le x\le 0 \\ 2, & если \ 0<x<1 \\ \dfrac{1}{x}, & если \ 1\le x\le 4 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} e^{-ч}, если \quad 0\le x<1 \\ e^{x}, если \quad 1\le x\le 2 \\ e, если \quad x>2 \end{cases}$ 5. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, если \quad x\le 0 \\ 0, \quad если \quad 0<x\le 2 \\ x-2, если \quad x>2 \end{cases}$ 6. $f(x)=\begin{cases} -x, если\ x\le 1 \\ \dfrac{2}{x-1}, \quad если\ x>1 \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} x-3, \quad если\ x<0 \\ x+1, если\ 0\le x<4 \\ 3+\sqrt{x}, \quad если\ x>4 \end{cases}$ 8. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, если\ x\le 1 \\ 2x, если\ 1<x\le 3 \\ x+2, если\ x>3 \end{cases}$ 9. $f(x)=\begin{cases} -x, если \quad x\le 0 \\ x^2, если \quad 0<x\le 2 \\ x+1, если \quad x>2 \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} x^3, если \quad -3\le x\le 1 \\ 2x, если \quad 1<x\le 2 \\ 4-x, если\ 2<x\le 3 \end{cases}$ 11. $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{3}, если\ x\le 0 \\ \sin x, если \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{2} \\ x-\dfrac{\pi}{2}, если \quad x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ 12. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, если\ x\le 0 \\ tgx, если\ 0<x<\dfrac{\pi}{4} \\ 1, если\ x\ge \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} 2x^2, если \quad x\le 0 \\ \cos x, если\ 0<x\le \dfrac{\pi}{2} \\ x-\dfrac{\pi}{2}, если\ x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ 14. $f(x)=\begin{cases} 2x+5, если\ x<-1 \\ \dfrac{1}{x}, если \quad x\ge -1 \end{cases}$ 15. $f(x)=\begin{cases} x^2-1, если\ x\le 0 \\ x, если\ 0<x<2 \\ 2x-2, если\ x\ge 2 \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} \sin x, если \quad x\le 0 \\ 2x, если \quad 0<x\le 1 \\ x, если\ x>1 \end{cases}$

ЗАДАНИЕ № 3. Построить графики функций заданных параметрически:

1. $\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{a^3}{t^2+a^2} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=3\cos^2 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}, \quad 0\le t\le 2\pi$ 3. $\begin{cases} x=2a\cos^2 t \\ y=a\sin 2t \end{cases}, 0\le t\le \pi$ 4. $\begin{cases} x=a\sin 2t \\ y=2a\sin^2 t \end{cases}, 0\le t\le \pi$

5. $\begin{cases} x=t^3 \\ y=4-t^2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x=\dfrac{t^6}{6} \\ y=2-\dfrac{t^4}{4} \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x=2\sin^3 t \\ 3\cos^2 t \end{cases}, 0\le t\le 2\pi$ 8. $\begin{cases} x=t^2-2t+1 \\ y=t-1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x=3-t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x=t+2 \\ y+t^2+4t+5 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x=1+\sin^2 t \\ y=\sin t \end{cases}, -\dfrac{\pi}{2}\le t\le \dfrac{\pi}{2}$

13. $\begin{cases} x=2-4\sin^2 t \\ y=2\sin t \end{cases}, -\dfrac{\pi}{2}\le t\le \dfrac{\pi}{2}$ 14. $\begin{cases} x=t^3 \\ y=t-1 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x=t^3 \\ y=2+t^2 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t_3 \end{cases}$

ЗАДАНИЕ № 4. Построить графики функций в полярных координатах:

1. $\rho = \sin 2\varphi$ 2. $\rho = a\cos 3\varphi$ 3. $\rho = a\sin 3\varphi$ 4. $\rho = a(1-\cos\varphi)$ 5. $\rho = a(1+\sin\varphi)$

6. $\rho = a(1-\sin\varphi)$ 7. $\rho = a\varphi$ 8. $\rho = -\dfrac{\varphi}{\pi}$ 9. $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$ 10. $\rho = -\dfrac{\pi}{\varphi}$ 11. $\rho = 1+\cos 2\varphi$

12. $\rho = 2\sin^2 2\varphi$ 13. $\rho = 3\cos^2 2\varphi$ 14. $\rho = \sin\varphi + \cos\varphi$ 15. $\rho = \dfrac{3}{2+\sin\varphi}$ 16. $\rho = \dfrac{1}{2+\cos\varphi}$

Тема 4. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Задачи для контрольной работы

ЗАДАНИЕ № 1. Вычислить пределы функций:

1. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-1}{x+5}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x^2-2x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-1}{x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{3x^2+x-1}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{x^3+2x-5}$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{6x+1}-1}{3x}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin x}{4(1-\cos x)^2}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{tg3x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 2x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x-5}\right)^{\frac{2x+3}{5}}$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x+4}$

2. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-5}{2x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{2x+1}$ 3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x}{x+1}$ 4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{7x^2+3}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x-1}{3x^3+2x}$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ 10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 15x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\arcsin 2x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

3. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x+1}{x+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^2+x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x}{x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x-2}{2x^2+x-5}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+1}{2x^2+x}$ 8) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$ 10) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 2x}{\sin 7x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{3x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{10}{x}\right)^x$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{x^2}$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+2}\right)^x$

4. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2+2x+1}{2x+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+2x+2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2+x+3}{(x-3)^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$

5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3+3x+1}{4x^3+x}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+x+1}{2x^2+1}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$ 10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{tgx}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{2x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x+4}$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

5. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x+5}{2x^2+x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{5x+2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x+1}{x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{2x^2+3x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{3+2x-x^2}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+x+1}{x^3+2}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^3+x+1}$ 8) $\lim\limits_{x\to -2-0}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 10) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 2x}{3x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{2x+1}$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^{x+1}$

6. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x}{2x+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x+1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x+3}{x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2+5x-3}{4x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{5x^2+9x-44}{2x^2+5x-12}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+x+1}{3x^2+5}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+7}{x^3+2x+3}$ 8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{5x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{2x+3}\right)^x$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

7. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2+x-3}{2x^2+4}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+1}{(x-3)^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$

5) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+x+1}{2x^2+5}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+1}{x^2+5x+6}$ 8) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ 10) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{18+x^2}-3\sqrt{2x+9}}{x+3}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^x$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x+3}\right)^x$

8. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+7x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2+x+1}{(x-3)^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+7}{2x^2+x+1}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x+1}{x^2+x+1}$ 8) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$ 10) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$ 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+5}-x\right)$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{5x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+4}\right)^{x^2}$

9. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$ 2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x+1}{x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

5) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+6}{x^3+8}$ 6) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2+x+3}{x^2+5x+7}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3+7x+1}{3x^2+5x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$ 10) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{xtg2x}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{5}}{x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

10. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+8}{2x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{3x^2+5x+8}$ 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$ 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-8}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x+4}{x^2+x+7}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{7x^3+8x+1}$ 8) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7x+1}-1}{5x}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{arctg 3x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

11. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^2-x-4}{2x-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x}{x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+3x+4}{4x^3+x}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5x+1}{x^2-7x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$

9) $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{8}{16-x^2}\right)$ 10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\frac{x}{2}}{x^3}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{3x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x}$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^x$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$

12. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+7x+4}{x^2+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+5x+4}{x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+4x^2}{x^2+x-12}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+7}{4x^2+x}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+x+3}{2x^2+5}$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ 11) $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sqrt{1-cox2x}}{x}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\frac{x}{4}}{x^3}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 5x}{x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+4}$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{x+1}$

13. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x+5}{x+7}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^2+x+5}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x}{x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+2x^2-x}{5x}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+7x+4}{x^2+x+1}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+8x+4}{2x^2+3}$ 8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^3}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{2x}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\sin x}{4(1-\cos x)^2}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)ctgx$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^x$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x+1}$

14. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+5x+7}{2x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x+5}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2+7x}{(x-3)^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x^2-7x+12}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+5}{6x^2+7x}$ 8) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{6}{9-x^2}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$ 10) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg3x$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+1}$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$

15. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+x+7}{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x+7}{(x-3)^3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

5) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{16-x^2}{x^3-64}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+8}{-5x^3+2x^2+x}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x-1}{3x^2-5x+6}$ 8) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$ 10) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x\cdot ctg3x$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^x$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

16. 1) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{2x^2-11x-6}{3x^2-19x+6}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+1}{2x^3+x^2+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+4}$ 4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{x^3+2x+12}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+4}{5x^3+x}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+5}{7x^3+2x+1}$ 8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}-x\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+1}-1}{3x}$ 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg6x}{\sin 13x}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{tg2x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\cos 5x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

ЗАДАНИЕ 2. Исследовать на непрерывность и построить графики функций:

1. 1) $f(x)=\begin{cases}-2(x+1), x\le -1\\ (x+1)^3, -1<x<0\\ x, x\ge 0\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}-x, x\le 0\\ -(x-1)^2, 0<x<2\\ x-3, x\ge 2\end{cases}$ 3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 4) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$

2. 1) $f(x)=\begin{cases}3x+1, x<0\\ x^2+1, 0\le x<1\\ 0, x\ge 1\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\cos x, x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi\\ \dfrac{\pi}{2}, x>\pi\end{cases}$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ 4) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$

3. 1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ x, 0\le x\le 2\\ 0, x>2\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, x\le 0\\ 0, 0<x\le 2\\ x-2, x>2\end{cases}$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ 4) $f(x)=arctg\,\dfrac{1}{x-4}$

4. 1) $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, 0\le x\le 1\\ 4-2x, 1<x<2{,}5\\ 2x-7, 2{,}5\le x<+\infty\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\le 0\\ 1, x>0\end{cases}$ 3) $f(x)=\dfrac{1+x^3}{1+x}$ 4) $f(x)=1-2^{\frac{1}{x}}$

5. 1) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\le 1\\ 2x-1, 1<x\le 3\\ x+2, x>3\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\cos x, x\le 0\\ x, x>0\end{cases}$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

6. 1) $f(x)=\begin{cases}x+1, x\le 0\\ (x+1)^2, 0<x\le 2\\ -x+4, x>2\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ tgx, 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\ x, x\ge\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 3) $f(x)=\dfrac{4}{(x-1)^2}$ 4) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

7. 1) $f(x)=\begin{cases}x+2, x\le -1\\ x^2+1, -1<x\le 1\\ -x+3, x>1\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}tgx, -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0\\ 1, x>0\end{cases}$ 3) $f(x)=\dfrac{4}{x-2}$ 4) $f(x)=9^{\frac{1}{x+3}}$

8. 1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x<1\\ x, 1\le x<2\\ 3, x>2\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 3) $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$ 4) $f(x)=5^{\frac{2}{x+5}}$

9. 1) $f(x)=\begin{cases}x+4, x<-1\\ x^2+2, -1\le x<1\\ 2x, x\ge 1\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\cos x, x<\frac{\pi}{2}\\ 1, x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 3) $f(x)=\frac{1}{(x-5)^2}$ 4) $f(x)=3^{\frac{1}{x+1}}$

10. 1) $f(x)=\begin{cases}x-1, x\le 0\\ x^2, 0<x<2\\ 2x, x\ge 2\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\cos x, x\le\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}, x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 3) $f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$ 4) $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}$

11. 1) $f(x)=\begin{cases}-x, x\le -1\\ \frac{2}{x-1}, x>-1\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\le 0\\ x, x>0\end{cases}$ 3) $f(x)=\frac{6}{(x-3)^2}$ 4) $f(x)=4^{\frac{1}{x-3}}$

12. 1) $f(x)=\begin{cases}2x^2, x\le 0\\ x, 0<x\le 1\\ 2, x>1\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ x, 0\le x\le 2\\ 0, x>2\end{cases}$ 3) $f(x)=\frac{8}{x+4}$ 4) $f(x)=5^{\frac{1}{1-x}}$

13. 1) $f(x)=\begin{cases}2x+5, x<-1\\ \frac{1}{x}, x\ge -1\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}x, x\le 0\\ \sin x, x>0\end{cases}$ 3) $f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$ 4) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$

14. 1) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\le 1\\ 2x, 1<x\le 3\\ x+2, x>3\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\cos x, x\le 0\\ x, x>0\end{cases}$ 3) $f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$ 4) $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}$

15. 1) $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2, x\le 2\\ x, x>2\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}1, x\le 0\\ \sin x, x>0\end{cases}$ 3) $f(x)=\frac{4}{4-x^2}$ 4) $f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

16. 1) $f(x)=\begin{cases}-x, x\le -1\\ \frac{2}{x-1}, x>-1\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \cos x, x>0\end{cases}$ 3) $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$ 4) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$

Тема 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Задачи для контрольной работы

Найти производные функций:

1. 1) $y = e^{\sin x} x^5 + \lg(5x+1)$ 2) $y = \dfrac{\cos^2 3x}{2x+3} - \arcsin 2x$ 3) $y = \sqrt{3x^2+1} + 2^{tgx}$

4) $y = ctg^2 8x - 2x^3 + 1$ 5) $y = arctg^3(\cos x)$ 6) $y = 3^{x^2} \sin 3x$

7) $y = \dfrac{\arccos 2x}{x} - 8\sqrt{x} + 2x$ 8) $y = \lg(\sin 2x) + \cos 3x$ 9) $y = 3^{\ln x} arcctg 2x$

10) $y = \ln^2 \dfrac{1}{x}$

2. 1) $y = e^{\cos x} x^3 + \lg(2x^2 + 3x)$ 2) $y = \dfrac{\sin^2 5x}{x+3} - \arccos 8x$ 3) $y = \sqrt{7x^2+5} + 3^{ctgx}$

4) $y = tg^2 7x + 3x^2 + 8$ 5) $y = arcctg^2(\sin x)$ 6) $y = 5^{x^3} \cos 8x$

7) $y = \dfrac{\arcsin 3x}{x^2} + \sqrt[3]{x} - 1$ 8) $y = \ln\cos 3x - \sin 2x$ 9) $y = 2^{\ln x} arctg 3x$

10) $y = \ln^3 \dfrac{1}{x}$

3. 1) $y = e^{tgx} \cdot x^4 - \lg(3x^3 + 5)$ 2) $y = \dfrac{\sin^3 3x}{2x+5} - \arcsin(3x+1)$ 3) $y = \sqrt{2x+3} - 4^{tgx}$

4) $y = ctg^3 2x + 4x^2 + 5$ 5) $y = arctg^2(\sin x)$ 6) $y = 4^{x^5} \cos 2x$

7) $y = \dfrac{arctg 2x}{x} - \sqrt{x} + 2$ 8) $y = \ln\sin 3x + tg 8x$ 9) $y = 2^{\lg x} \arccos 3x$

10) $y = \ln^5 \dfrac{1}{x}$

4. 1) $y = e^{ctgx} x^7 - \lg(2x^2 + 8x)$ 2) $y = \dfrac{\cos^3 2x}{5x+1} + \arcsin(2x+5)$ 3) $y = \sqrt{2x^2+1} + 2^{ctgx}$

4) $y = tg^2 3x - 3x - 4$ 5) $y = arcctg^2(\cos x)$ 6) $y = 2^{x^2} \sin 3x$

7) $y = \dfrac{\arcsin 2x}{x} - \sqrt{x} + 5$ 8) $y = \lg\cos 2x - ctg 3x$ 9) $y = 4^{\ln x} \arcsin 2x$

10) $y = \ln^4 \dfrac{1}{x}$

5. 1) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\cos 2x} + 2^x$ 2) $y = \arcsin^2(e^x) + x^3$ 3) $y = tg^3 x \cdot \dfrac{1}{x}$

4) $y = arctg^2 3x + 2x^4 + 1$ 5) $y = \ln^2 \dfrac{\sin 3x}{x}$ 6) $y = ctg 3x \cdot \ln x$

7) $y=\sqrt[3]{3x^5+7}+\arccos 2x$ 8) $y=\dfrac{\sin e^x}{x^2}+2x^2+5x$ 9) $y=\arcsin(5x+3)\cdot e^{2x}$

10) $y=\sin(\ln x)$

6. 1) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sin 3x}+3^x$ 2) $y=\arccos^2 5x+e^{x^2}$ 3) $y=ctg^3 x\cdot\dfrac{2}{x}$

4) $y=arctg^2 5x+3x^3+8x$ 5) $y=\ln^2\dfrac{\cos 2x}{x}$ 6) $y=tg 2x\cdot\ln 2x$

7) $y=\sqrt{2x+5}+\arcsin 3x$ 8) $y=\dfrac{\cos e^x}{x^3}+5x^3+4$ 9) $y=\arccos(3x+5)\cdot e^x$

10) $y=\cos(\ln x)$

7. 1) $y=\arcsin^2 5^x+\sqrt{x+2}$ 2) $y=tg^3(\sin 2x)+2^x$ 3) $y=\dfrac{\cos 8x}{x^5}-\arccos 3x$

4) $y=\ln^3(\sin 8x)+ctg 2x$ 5) $y=\sin 3x\cdot\lg 7x^2$ 6) $y=arctg^2 3x$

7) $y=2^{\sin x}+x^2+4$ 8) $y=\sin^3 7x^2$ 9) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}+8x$

10) $y=\dfrac{\cos 3x}{4}-\arccos 7x$

8. 1) $y=\arccos^2 7^x+\sqrt{3x+1}$ 2) $y=ctg^2(\cos 2x)+7^x$ 3) $y=\dfrac{\sin 3x}{x^2}-\arcsin 4x$

4) $y=\ln^2(\cos 2x)+tg 3x$ 5) $y=\cos 3x\cdot\lg 8x$ 6) $y=arcctg^2 8x$

7) $y=3^{\cos x}+x^3+8x-1$ 8) $y=\cos^2 8x^3$ 9) $y=\dfrac{x^3}{\sin x}+\ln 5x$

10) $y=\dfrac{\sin 2x}{3}-\arcsin 5x^2$

9. 1) $y=\ln^3\sqrt{\sin x}$ 2) $y=\dfrac{tg 2x}{3x}+\arcsin x^2$ 3) $y=\cos^2\lg 5x$

4) $y=\sin 3x\cdot arctg\dfrac{1}{x}$ 5) $y=arctg 5^x-8x+5$ 6) $y=2^{x^2+\sin x}$

7) $y=\arccos^2 5x+\ln 3x$ 8) $y=\cos^2(\ln\dfrac{1}{x})$ 9) $y=arctg(\sin 8x)$

10) $y=ctg\dfrac{x^2}{4}-\sin x$

10. 1) $y=\ln^2\sqrt{\cos x}$ 2) $y=\dfrac{ctg 3x}{7x^2}+\arccos 2x$ 3) $y=\sin^2(\lg 3x)$

4) $y=\cos 2x\cdot \arccos\frac{1}{x}$ 5) $y=arctg7^{x^2}-3x+5$ 6) $y=\arcsin(\cos 2x)$

7) $y=7^{\sin 3x+5x}$ 8) $y=\sin^3(\ln\frac{1}{x})$ 9) $y=arcctg(\cos 5x)$

10) $y=tg\frac{x^3}{3}-\cos x$

11\. 1) $y=\sqrt{\frac{\cos 2x}{x}}+\ln 8x$ 2) $y=\arcsin 2x\cdot tg(7x+3)$ 3) $y=\sin^8(\sin 3x)$

4) $y=3^{x^2+tgx}-x^3$ 5) $y=\cos 3x+\sqrt{x^5+3}$ 6) $y=\ln^2\frac{1}{x}$

7) $y=arctg2^x+x^2-7x$ 8) $y=\frac{\sin 2x}{x^4}-x^7+2x$ 9) $y=arctg^2 3x$

10) $y=3^{x^2}\cdot\cos 7x$

12\. 1) $y=\sqrt{\frac{\sin 3x}{x}}\cdot\ln 7x$ 2) $y=\arccos 3x\cdot ctg(3x+7)$ 3) $y=\cos^5(\ln 7x)$

4) $y=2^{x^3+ctgx}-x^5$ 5) $y=\sin 2x+\sqrt{x^3+7}$ 6) $y=\ln^3\frac{1}{x}$

7) $y=arcctg3^x+7x+5$ 8) $y=\frac{\cos 3x}{x^3}-x^8+5x^3$ 9) $y=arcctg^3 2x$

10) $y=5^{x^3}\sin 3x$

13\. 1) $y=\ln^2(\cos 3x)+x^3$ 2) $y=\sin 4x\cdot 2^{x^2}$ 3) $y=\frac{\sqrt{x+3}}{tg2x}+3x^3$

4) $y=arctg^2(\ln x)$ 5) $y=\cos(\arcsin 2x)$ 6) $y=5^{x^3+ctgx}$

7) $y=x^7\ln\frac{1}{x}$ 8) $y=\cos^2 3x+\frac{x^2}{\sin x}$ 9) $y=\ln^3 2^x+x^3$

10) $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{\cos x}}$

Образец выполнения контрольных работ

Тема 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1) Вычислить определители: а) $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=?$

Этот определитель вычислим по правилу диагоналей. Приписываем справа к определителю первый и второй столбцы. Перемножаем элементы, стоящие на главной диагонали и складываем это произведение с аналогичными произведениями элементов, стоящих на диагоналях, параллельных главной. Затем к произведению элементов, стоящих на побочной диагонали, прибавляем аналогичные произведения элементов, стоящих на диагоналях, параллельных побочной. Затем от первой суммы вычитаем вторую. Это и будет искомый определитель.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}$$

$$= (1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8) - (3\cdot 5\cdot 7 + 1\cdot 6\cdot 8 + 2\cdot 4\cdot 9) =$$
$$= (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) = 225 - 225 = 0$$

Ответ: $\Delta = 0$.

б)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

Его найдем разложением по первому столбцу, но сначала с помощью свойств определителя сделаем нули в этом столбце везде кроме элемента, равного -1. Для этого элементы в т о р о й строки умножим на 2 и прибавим к соответствующим элементам п е р в о й строки; элементы в т о р о й строки прибавим к соответствующим элементам т р е т ь е й строки; элементы в т о р о й строки умножим на 2 и прибавим к соответствующим элементам ч е т в е р т о й строки. Эти действия записываем так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \; (2) \; = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & 7 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$

Разложив определитель 4-го порядка по 1-ому столбцу, свели его вычисление к нахождению одного определителя 3-его порядка, который можно вычислить по правилу диагоналей, разобранному выше. Можно дальше применить свойства определителя и свести этот определитель к одному определителю 2-го порядка. Продолжаем делать нули теперь уже во второй строке, умножая элементы третьего столбца на (-4) и прибавляя к первому и второму столбцам:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -21 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -16 & -17 \\ -20 & -21 \end{vmatrix} = -(16\cdot 21 - 20\cdot 17) = -(336-340) = 4.$$

(-4)

(-4)

Ответ: $\Delta = 4.$

2) Умножить матрицы:

$$C = \underset{3x2}{\begin{pmatrix} (1) & [2] \\ (3) & [4] \\ (5) & [6] \end{pmatrix}} \cdot \underset{2x2}{\begin{pmatrix} (1) & (2) \\ [3] & [4] \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (1)\cdot(1)+ & [2]\cdot[3] & (1)\cdot(2)+ & [2]\cdot[4] \\ (3)\cdot(1)+ & [4]\cdot[3] & (3)\cdot(2)+ & [4]\cdot[4] \\ (5)\cdot(1)+ & [6]\cdot[3] & (5)\cdot(2)+ & [6]\cdot[4] \end{pmatrix} = \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}}.$$

Произведение матриц получили, умножая элементы строк первой матрицы на соответствующие элементы столбцов второй матрицы и складывая их.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}$.

3). Найти обратные матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$. Сначала находим $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$; $\Delta \neq 0$, значит, существует A^{-1}. Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\underset{(+)}{(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4;\qquad A_{21}=\underset{(-)}{(-1)^{2+1}}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2;\qquad A_{12}=\underset{(-)}{(-1)^{1+2}}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{22}=\underset{(+)}{(-1)^{2+2}}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1;\qquad A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

4) Найти двумя способами ранг матрицы: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -2\\ 2 & -2 & 5 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 8\end{pmatrix}$.

<u>1 способ.</u> Метод окаймляющих миноров. Находим любой минор второго порядка, отличный от нуля, например $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=1\cdot(2)-(2)(-1)=-2+2=0$, поэтому выписываем другой определитель $\Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 8\end{vmatrix}=5\cdot 8-1\cdot 1=40-1=39\neq 0$. Нашелся определитель второго порядка, отличный от нуля, значит ранг A $rA\geq 2$. Теперь найдем определитель третьего порядка, окаймляющий найденный $\Delta_2\neq 0$.

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}-1 & 3 & -2\\ -2 & 5 & 1\\ -1 & 1 & 8\end{vmatrix}\ (-2)(-1)\ =\begin{vmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & -2 & 10\end{vmatrix}=(1-)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 5\\ -2 & 10\end{vmatrix}=0$$

Берем другой определитель, окаймляющий $\Delta_2\neq 0$:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 8\end{vmatrix}\ (-2)(-1)\ =\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & -2 & 10\end{vmatrix}=0$$, как и предыдущий.

Больше окаймляющих миноров третьего порядка для $\Delta_2\neq 0$ нет, поэтому ранг А, равный наивысшему порядку минора, отличного от нуля, равен 2.

2 способ. Метод элементарных преобразований.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\2&-2&5&1\\1&-1&1&8\end{pmatrix}(-2)(-1)\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&0&-1&5\\0&0&-2&10\end{pmatrix}(-2)\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&0&-1&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Получили 2-е нулевые строки. Поэтому ранг А равен 2 (очевидно минор второго порядка $\begin{vmatrix}-1&3\\0&-1\end{vmatrix}\neq 0$). Ответ: $rA=2$.

Тема 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1) Решить систему матричным способом: $\begin{cases}x-y+z=2\\2x+y-z=1\\x-2y=-3\end{cases}.$

Пусть $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$. Тогда данную систему можно записать в виде матричного уравнения $AX=B$. Решаем его, домножая слева на обратную матрицу: $A^{-1}AX=A^{-1}B\Rightarrow EX=A^{-1}B.$ Отсюда получаем решение $X=A^{-1}B$. Найдем сначала A^{-1}.

$$\Delta_A=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&-1\\1&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\3&0&0\\1&-2&0\end{vmatrix}=3\underset{(-)}{(-1)^{2+1}}\begin{vmatrix}-1&1\\-2&0\end{vmatrix}=3(-1)(0-(-2))=-6.$$

($\Delta_A\neq 0$,значит $A^{-1}\ \exists$).

$$A_{11}=\underset{(+)}{(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&-1\\1&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&0\end{vmatrix}=0-2=-2$$

$$A_{21}=\underset{(-)}{(-1)^{2+1}}\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&-1\\1&-2&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1\\-2&0\end{vmatrix}=-(0-(-2))=-2$$

$$A_{31} = \underset{(+)}{(-1)^{3+1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$A_{12} = \underset{(-)}{(-1)^{1+2}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-(-1)) = -1, \quad A_{22} = \underset{(+)}{(-1)^{2+2}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$A_{32} = \underset{(-)}{(-1)^{3+2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-2) = 3, \qquad A_{13} = \underset{(+)}{(-1)^{1+3}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5,$$

$$A_{23} = \underset{(-)}{(-1)^{2+3}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+1) = 1 \qquad A_{33} = \underset{(+)}{(-1)^{3+3}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3$$

Составляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Найдем

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (+3) \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-3)(-3) \\ 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-3)(-3) \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

т.е. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Проверка. Подставим найденное решение в исходную систему:

1-2+3=2 (истина), $2 \cdot 1$+2-3=1 (истина), 1-$2 \cdot 2$=-3 (истина).

Ответ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$.

2) Решить систему методом Крамера. Возьмем эту же систему и решим её с помощью определителей.

$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$. Запишем определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6$ (Найден выше).

Заменим в Δ столбец коэффициентов при x на столбец правых частей

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3\underset{(-)}{(-1)^{2+1}}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-)(0+2) = -6$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при y на столбец правых частей

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1\underset{(+)}{(-1)^{1+3}}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 3 = -12$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при z на столбец правых частей

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} (-2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = (-1)\underset{(-)}{(-1)^{1+2}}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 3 = -18.$$

По формулам Крамера получаем решение: $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-6}{-6} = 1 \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-12}{-6} = 2 \\ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{-18}{-6} = 3 \end{cases}$. Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$.

3. Решить системы методом Гаусса:

а)

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Выписываем расширенную матрицу

$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right)$ и с помощью элементарных преобразований приводим ее

или к треугольному виду, или к виду трапеции (как получится).

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\2&1&-1&1\\1&-2&0&-3\end{array}\right)\begin{array}{c}(-2)\quad(-1)\\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&3&-3&-3\\0&-1&-1&-5\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&-1&-1&-5\\0&3&-3&-3\end{array}\right)(3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&-1&-1&-5\\0&0&-6&-18\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :(-1)\\ :(-6)\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&1&1&5\\0&0&1&3\end{array}\right)\end{array}$$

. $rA=3$, $rB=3$ $\Rightarrow r=3$. Так как число неизвестных $n=3$ и равно рангу системы, то система имеет единственное решение. По полученной матрице восстанавливаем систему уравнений. Идя снизу вверх, получаем это решение: $\begin{cases}x-y+z=2\\ y+z=5\\ z=3\end{cases}$. Из последнего уравнения $z=3$, из второго находим $y=5-z=5-3=2$. Подставляя в первое уравнение найденные $y=2$ и $z=3$, находим $x=2+y-z=2+2-3=4-3=1$. Ответ: $\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=3\end{cases}$.

б) $\begin{cases}x-y+z=2\\ 2x+y-z=1\\ x+2y-2z=1\end{cases}$

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\2&1&-1&1\\1&2&-2&1\end{array}\right)\begin{array}{c}(-2)\quad(-1)\\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&3&-3&-3\\0&3&-3&-1\end{array}\right)(-1)\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&3&-3&-3\\0&0&0&2\end{array}\right)$$

$rA=2$, $rB=3$. Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли система несовместна (т.е. не имеет решения). Выпишем уравнение, соответствующее последней строке полученной матрицы: $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=2$, что невозможно.

Ответ: система не имеет решения.

в) $\begin{cases}3x-2y+z=-1\\ -2x+y-2z=2\\ x-y-z=1\end{cases}$

Записываем расширенную матрицу :

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&1&-1\\-2&1&-2&2\\1&-1&-1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&1\\-2&1&-2&2\\3&-2&1&-1\end{array}\right)\begin{matrix}(2)&(-3)\end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&1\\0&-1&-4&4\\0&1&4&-4\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&1\\0&-1&-4&4\\0&0&0&0\end{array}\right):(-1)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&1\\0&1&4&-4\\0&0&0&0\end{array}\right).$$ $rA=rB=2\ \Rightarrow$ Система совместна.

Число неизвестных $n=3\ \rangle\ r=2\ \Rightarrow$ Система имеет бесконечное множество решений. n-r=3-2=$1\ \Rightarrow$ Одна свободная переменная, пусть это будет z, тогда x,y – базисные (базисных неизвестных столько, каков ранг системы, то есть сколько ненулевых строк остается в последней матрице).

Запишем систему, соответствующую полученной матрице : $\begin{cases}x-y-z=1\\y+4z=-4\\z=z\end{cases}$.

Идя снизу вверх, выражаем базисные неизвестные через свободную z .Из второго уравнения выражаем $y=-4-4z$, из первого уравнения $x=y+z+1=(-4-4z)+z+1=$ $=-4-4z+z+1=-3-3z$.

Общее решение:

$$\begin{cases}x=-3-3z\\y=-4-4z\\z=z\end{cases}$$

Из общего решения можно получить любое частное решение. Пусть $z=-2$, тогда получим частное решение: $x=-3-3\ (-2)=-3+6=3;\ \ y=-4-4\ (-2)=-4+8=4.$

Частное решение:

$$\begin{cases}x=3\\y=4\\z=-2\end{cases}.$$

Выполним проверку общего решения. Для этого подставим найденные выражения для x,y,z в уравнения исходной системы:

1) $3(-3-3z)-2(-4-4z)+z=-1$

$-9-\cancel{9z}+8+\cancel{8z}+\cancel{z}=-1\qquad -1=-1\quad(\textit{истина})$

2) $-2(-3-3z)+(-4-4z)-2z=2$

$6+\cancel{6z}-4-\cancel{4z}-\cancel{2z}=2 \qquad 2=2 \quad (\textit{истина})$

3) $(-3-3z)-(-4-4z)-z=1$

$-3-\cancel{3z}+4+\cancel{4z}-\cancel{z}=1 \qquad 1=1 \quad (\textit{истина})$

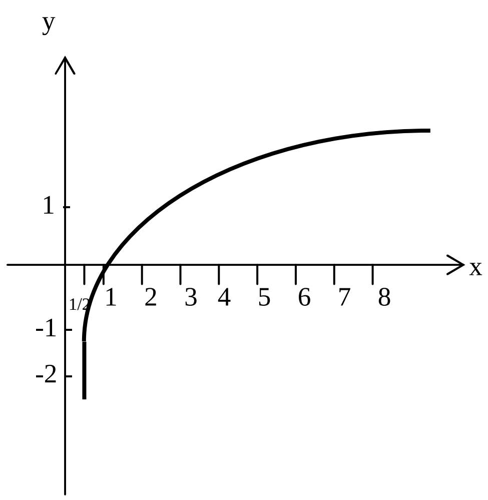
Ответ: $\begin{cases} x=-3-3z \\ y=-4-4z \\ z=z \end{cases}$.

Тема 3. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

1) Построить график функции путем сдвигов и деформаций

$$y=\log_2(1-x)-2$$

1. Строим график функции $y=\log_2 x$ (рис.1)



x	$y=\log_2 x$
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

2. Симметрично отображаем этот график относительно оси *OY* и получаем график функции $y=\log_2(-x)$ (на рис.2 – сплошная линия).

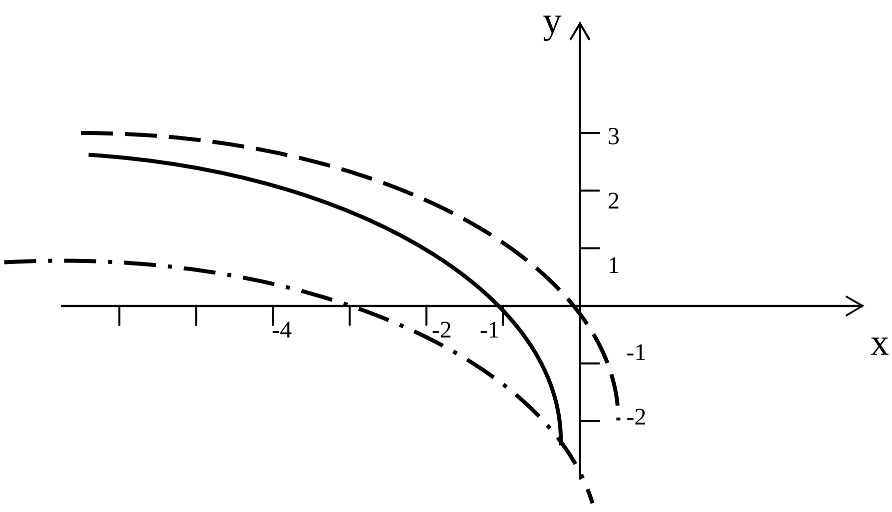


Рис.2

3. Сдвигаем этот график на одну единицу вправо и получаем график функции $y = \log_2(1-x)$ (на рис.2 пунктирная линия).
4. Сдвигаем этот график на 2 единицы вниз и получаем график функции $y = \log_2(1-x) - 2$ (на рис.2 штрих-пунктирная линия), что и будет графиком данной функции.

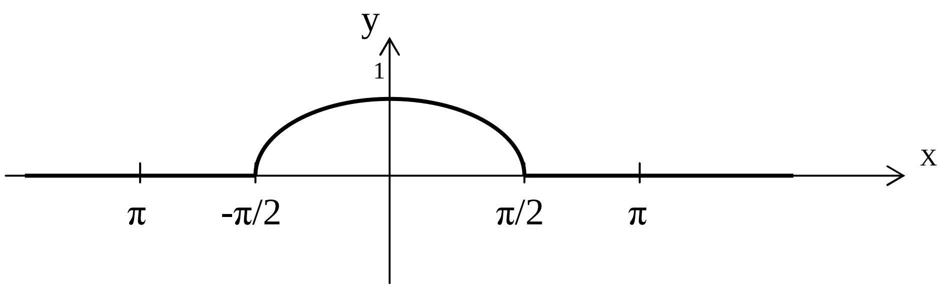
2) Построить график функции, заданной несколькими аналитическими выражениями:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & при \quad |x| \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & при \quad |x| \rangle \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Запишем данную функцию по интервалам возрастания аргумента x :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \langle -\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & при \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & при \quad x \rangle \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Графиком *f(x)* при $x \in \left(-\infty, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ будет часть оси *OX* , при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ часть косинусоиды, затем при $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \infty\right)$ снова часть оси *OX*



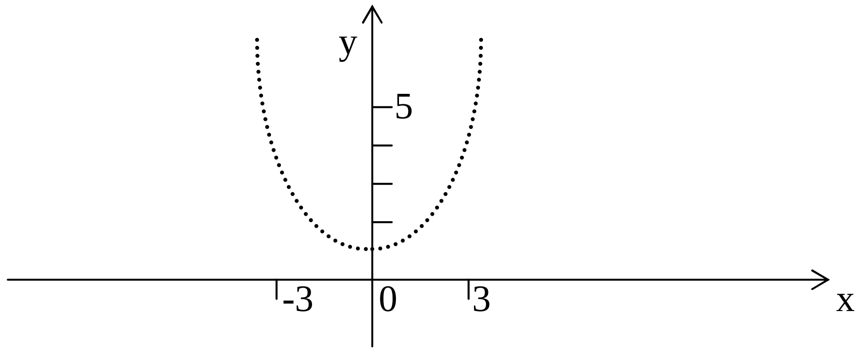
3) Построить график функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 - 2t + 2 \end{cases}$$

График функции, который надо построить, проходит через точки с координатами $(x(t), y(t))$. Чтобы найти координаты этих точек $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, составим таблицу связи аргумента t и координат точек *(x,y)* в зависимости от t .

t	-2	-1	0	1	2	3	4	
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	*(x=t-1)*
y	10	5	2	1	2	5	10	*($y=t^2$-2t+2)*

Для построения графика берем две последние строки таблицы и отмечаем на координатной плоскости точки (-3,10), (-2,5), (-1,2), (0,1), (1,2), (2,5), (3,10), координаты которых находятся в столбцах.

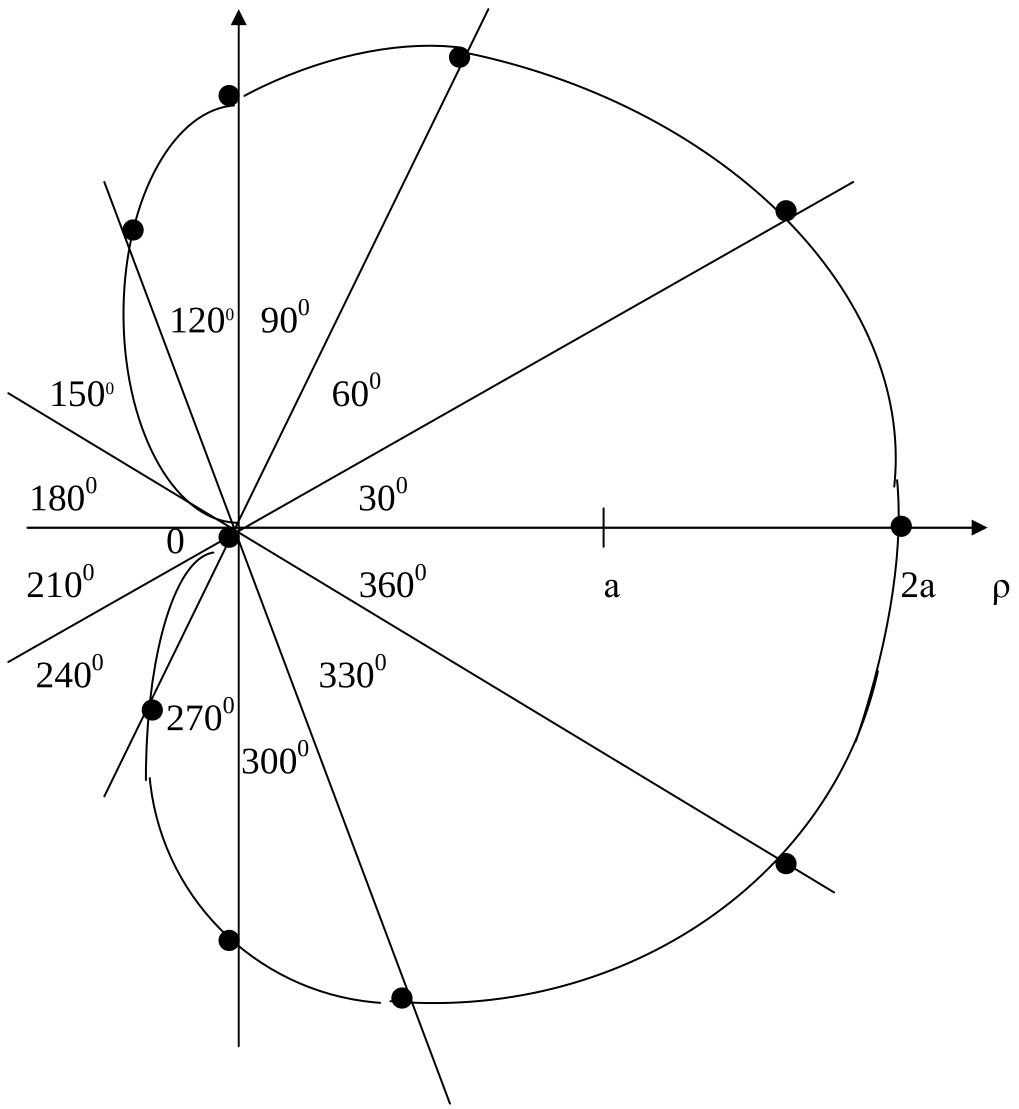


Затем соединяем полученные точки кривой (в данном случае получилась парабола вида $y = x^2$, смещенная на оси OY на 1 вверх, то есть $y = x^2 + 1$).

4)Построить график функции, заданной в полярной системе координат: $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. Здесь a выступает в роли масштаба. На полярной оси откладываем вместо единиц *a, 2a, 3a* и т.д. Заносим в таблицу значения ρ , вычисленные для углов $\varphi \in [0, 360°]$ $\left(удобнее \frac{\rho}{a} \right)$.

φ	0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0	360^0
$\frac{\rho}{a}$	2	1,9	1,5	1	0,5	0,1	0	0,1	0,5	1	1,5	1,9	2

На полярной оси откладываем ρ и проводим окружность этого радиуса. Проводим луч под углом φ и находим точку пересечения этой окружности и этого луча. Сначала строим точку $(\rho,\varphi)=(2a,0)$ так: на оси $o\rho$ откладываем отрезок длины $2a$, это и будет искомая точка. Затем строим точку $(\rho,\varphi)=(1{,}9a;30^0)$ так: на оси $o\rho$ откладываем отрезок длиной *1,9a*, проводим окружность этого радиуса, строим луч под углом 30^0 и находим точку их пересечения ,это и будет искомая точка и т.д.



откладываем вместо единиц *a, 2a, 3a* и т.д. Заносим в таблицу значения ρ, вычисленные для углов $\varphi \in [0, 360°]$ $\left(\text{удобнее}\,\dfrac{\rho}{a}\right)$.

Тема 4. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+1}{x^2+2x+3}=\left|\begin{matrix}\textit{подставляем}\\ x=1\end{matrix}\right|=\dfrac{1-5+1}{1+2+3}=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}$ Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-1}=\left|\begin{matrix}\textit{подставляем} & \\ x=-1 & \textit{получаем}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)-\textit{это неопределенность}\end{matrix}\right|$. Чтобы

избавиться от такой неопределенности следует и в числителе, и в знаменателе выделить “ноль”, то есть множители , которые и дают нули. В данном примере *(x+1)* обращается в *0* при x=-1, его и будем выделять , чтобы потом сократить.

1. $x^2-1=(x-1)\underline{(x+1)}$;

2. $x^2-5x-6=0$ (находим корни этого уравнения):

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm 7}{2}\Rightarrow \begin{matrix}x_1=6\\ x_2=-1\end{matrix}\qquad \Rightarrow\quad x^2-5x-6=(x-6)\underline{(x+1)};$$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-6)\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-6}{x-1}\left|\begin{matrix}\textit{подставляем}\\ x=-1\end{matrix}\right|=\dfrac{-1-6}{-1-1}=\dfrac{7}{2}$.

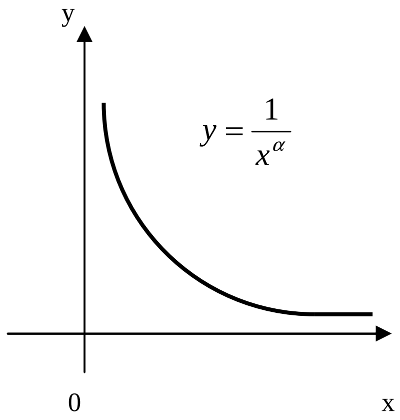
Ответ: $\dfrac{7}{2}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+3x-1}{4x^3+2x+5}=\left|\begin{matrix}\textit{при}\quad \textit{подстановке} & \\ x=\infty\quad \textit{получаем} & \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)-\textit{это неопределенность}\end{matrix}\right|$.

Чтобы избавиться от такой неопределенности , следует и в числителе, и в знаменателе вынести за скобки наивысшую степень x .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+3x-1}{4x^3+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}(1-4\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x}}+3\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^2}}-\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^3}})}{\cancel{x^3}(4+2\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x^2}}+\underset{\searrow 0}{\frac{5}{x^3}})}=\frac{1}{4}.$$

При нахождении этого предела использовано: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}=\left(\dfrac{1}{\infty}\right)=0\quad \textit{при}\quad \alpha\rangle 0$.



Получили в ответе отношение коэффициентов при старших степенях x.

Ответ : $\frac{1}{4}$.

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2-\sqrt{1-x}}{x+3}=\left|\dfrac{2-\sqrt{1-(-3)}}{-3+3}=\dfrac{0}{0}\right|$.

Для решения следует воспользоваться формулой сокращенного умножения

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Домножим числитель и знаменатель на $2+\sqrt{1-x}$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to -3}\frac{\left(2-\sqrt{1-x}\right)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}{(x+3)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to -3}\frac{2^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{(x+3)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to -3}\frac{4-(1-x)}{(x+3)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\cancel{3+x}}{\cancel{(x+3)}\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\left|\frac{1}{2+\sqrt{1-(-3)}}\right|=\frac{1}{4}.$$

Ответ : $\frac{1}{4}$.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)=|\infty-\infty|$.

Для решения применяем тот же прием, что и выше: домножаем числитель и знаменатель на сумму этих корней, чтобы получить разность квадратов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2-2x}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x+1}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x-3-\left(\cancel{x^2}-2x+1\right)}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-4}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=4\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Как и в примере 3) вынесем за скобки x в первой степени, причем

$$\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{x^2\left(1+2\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}=x\sqrt{1+2\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}\text{, тогда}$$

$$4\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(1-\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{1+2\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}-\underset{\to 0}{\frac{3}{x^2}}}+\sqrt{1-2\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}+\underset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}\right)}=4\frac{1}{1+1}=2$$

Ответ: 2.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 15x}{tg13x}=\left|\dfrac{0}{0};\ \textit{применяем первый замечательный предел}: \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1\right|=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\underset{\to 1}{\cancel{\sin 15x}}\cdot 15x\cdot \underset{\to 1}{\cancel{13x}}\cdot \overset{1}{\cancel{\cos 13x}}}{\cancel{15x}\cdot 13x\cdot \cancel{\sin 13x}}=\lim_{\cancel{x}\to 0}\frac{15x}{13x}=\frac{15}{13}\quad .$$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-2}\right)^{2x}=\left|\text{т.к.}\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{3x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}=\dfrac{3}{3}=1,\quad \textit{то имеем неопределенность}\ (1)^{\infty}\right|.$

Применяем второй замечательный предел: $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$. Выделяем в основании степени "единицу" так: прибавляем *1* и вычитаем *1*.

$$\frac{3x+4}{3x-2}+1-1=1+\frac{3x+4}{3x-2}\overbrace{-1}^{3x-2}=1+\frac{\cancel{3x}+4-\cancel{3x}+2}{3x-2}=1+\frac{6}{3x-2}\quad .$$

В нашем случае $u=\dfrac{6}{3x-2}$, т.е. $\dfrac{1}{u}=\dfrac{3x-2}{6}$, поэтому

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{6}}=e$$

Подставляем это в пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{3x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\boxed{\left(1+\frac{6}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{6}}}}_{e}{}^{\cdot\frac{6}{3x-2}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6}{3x-2}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{12x}{3x-2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{3x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}}=e^{\frac{12}{3}}=e^4.$$

Ответ: e^4.

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{4x-3}\right)^{2x}=\Big|$ т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+4}{4x-3}=\frac{3}{4}\langle 1$, то получаем показательную функцию с основанием меньше единицы в бесконечно большой степени, которая стремится к нулю $\Big|$ =0.

Ответ: 0.

Исследовать на непрерывность и построить график функции:

1) $$f(x)=\begin{cases} x, & x\langle -1\\ x^2+1, & -1\le x\le 2\\ 7-x, & x\rangle 2\end{cases}$$

Для исследования функции на непрерывность воспользуемся тем, что функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если выполняются равенства:

(*) $$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$$

Все элементарные функции, входящие в данную функцию, непрерывны на своих интервалах, поэтому проверять непрерывность будем в точках «склеивания».

<u>x=-1</u>

$$\lim_{\substack{x\to -1-0\\ x<-1}}f(x)=\lim_{x\to -1-0}x=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to -1+0\\ x>-1}}f(x)=\lim_{x\to -1+0}(x^2+1`)=(-1)^2+1=\underline{2}$$

$$f(-1)=(-1)^2+1=\underline{2}$$

Сравниваем эти три числа и видим, что первое равенство в (*) не выполняется. Следовательно, $x=-1$ - точка разрыва I рода, причем неустранимого (т.е. скачок).

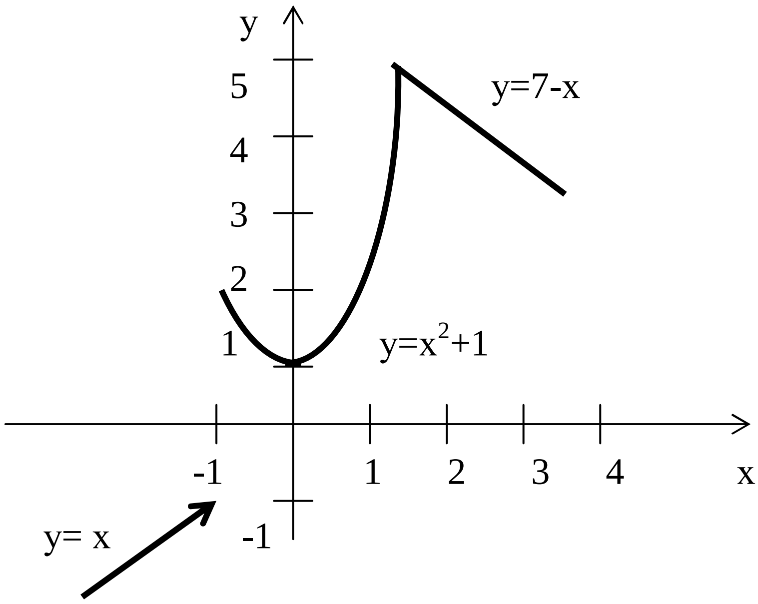
<u>x=2</u>

$$\lim_{\substack{x\to 2-0\\ x<2}} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(x^2+1) = 2^2+1 = \underline{5}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2-0\\ x>2}} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(7-x) = 7-2 = \underline{5}$$

$$f(2) = 2^2+1 = \underline{5}$$

Сравниваем эти три числа и видим, что все равенства в (*) выполняются. Следовательно, в точке $x=2$ данная функция непрерывна.



На графике функции на конце прямой $y=x$ в точке (-1,-1) ставим стрелку, так как функция $f(x)=x$ при x, строго меньшем –1, а при $x=-1$ значение функции $f(x)$ вычисляется уже по другой формуле x^2+1. Причем в точках непрерывности никаких стрелок не ставится.

2) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

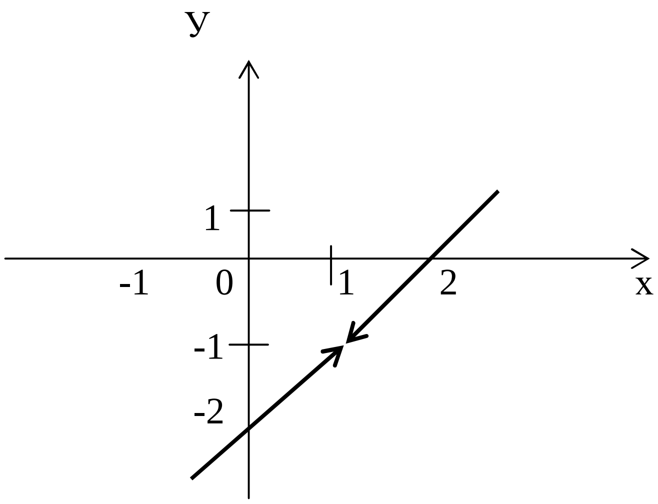
О.Д.З. $x \neq 1$.

Так как $x=1$ не входит в область допустимых значений (О.Д.З.) функции, то $x=1$ является точкой разрыва данной функции. Выясним с помощью односторонних пределов, разрыв какого рода терпит функция в этой точке.

$$\lim_{\substack{x\to 1-0\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1-0\\ x<1}} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1-0}\frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1-0}(x-2) = 1-2 = -1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1+0\\ x>1}} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1+0}(x-2)=1-2=-1$$

Получили, что в (*) первое равенство выполняется, а функция $f(1)$ не существует, т.е. второе равенство не выполняется. Следовательно, x=1 – точка разрыва I рода, причем устранимого. На графике выкалывается точка (1,-1) стрелками, так как x=1 не входит в О.Д.З.



3) $f(x)=1-2^{\frac{1}{x+3}}$

О.Д.З. $x\neq -3$. Значит x=-3 - точка разрыва.

Определяем тип разрыва функции в этой точке. Для этого опять находим левый и правый пределы при $x\to -3$.

Левый предел.

$$\lim_{\substack{x\to -3-0\\ x<-3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -3-0\\ x<-3}}\left(1-2^{\frac{1}{x+3}}\right)=\left|\begin{array}{l} x+3\to -0 \\ т.к.\ x<-3 \end{array}\Rightarrow \frac{1}{x+3}\to -\infty\right.$$

$$\left.\Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}}\to 0\Rightarrow 1-2^{\frac{1}{x+3}}\to (1-0)=1\right| =1$$

Правый предел.

$$\lim_{\substack{x\to -3+0\\ x>-3}} f(x)=\lim_{\substack{x-3+0\\ x>-3}}\left(1-2^{\frac{1}{x+3}}\right)=\left|\begin{array}{l} x+3\to +0 \\ т.к.\ x>-3 \end{array}\Rightarrow \frac{1}{x+3}\to +\infty\Rightarrow\right.$$

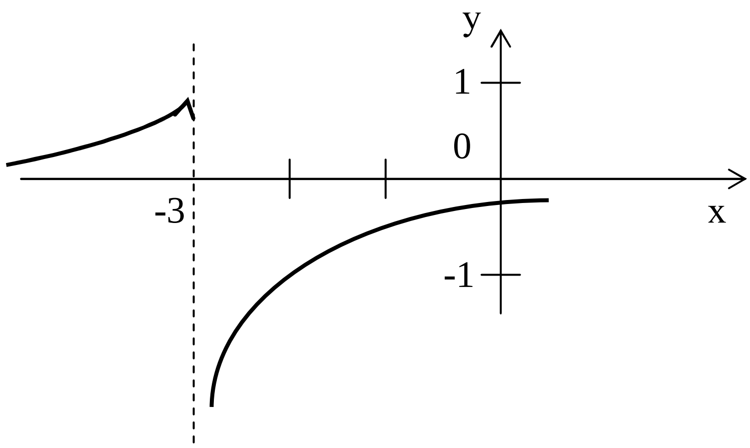
$$\left.\Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}}\to \infty\Rightarrow 1-2^{\frac{1}{x+3}}=(1-\infty)=-\infty\right| =-\infty$$

получился бесконечный предел, поэтому x=-3 – точка разрыва II рода.

Исследуем поведение функции при $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1-2^{\frac{1}{x+3}}\right) = \left| x+3\to\infty \Rightarrow \frac{1}{x+3}\to 0 \Rightarrow \right.$$

$$\left. \Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}} \to 1 \Rightarrow 1-2^{\frac{1}{x+3}} \to (1-1)=0 \right| = 0$$



Тема 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Найти производные функций:

1) $y = e^{x^3-5x^2+4x+12}$.

$$y' = (e^{x^3-5x^2+4x+12})' = \left| \begin{array}{l} \text{Можно представить данную функцию как } \quad y=e^u, \\ \text{где } u = x^3-5x^2+4x+12. \text{ Зная, что } \left(e^u\right)' = e^u \cdot u', \text{ получим} \end{array} \right| =$$

$$= e^{x^3-5x^2+4x+12}\left(x^3-5x^2+4x+12\right)' = e^{x^3-5x^2+4x+12}\left(3x^2-10x+4\right).$$

Ответ: $y' = \left(3x^2-10x+4\right)e^{x^3-5x^2+4x+12}$.

2) $y = tg^3 5x$.

$$y' = \left[(tg5x)^3\right]' = \left| \begin{array}{l} \text{Можно представить } y=u^3, \text{где} \quad u = tg5x. \\ \text{Причем } \left(u^3\right)' = 3u^2\cdot u' \end{array} \right| = 3(tg5x)^2 \cdot (tg5x)' =$$

$$= 3tg^2 5x \frac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5 = 15tg^2 5x\frac{1}{\cos^2 5x}.$$

Ответ: $y' = 15\dfrac{tg^2 5x}{\cos^2 5x}$.

3) $y = 3x\ln x$.

$$y' = 3(x\cdot\ln x)' = \left|(u\cdot v)' = u'v + v'u;\quad (c\cdot u)' = cu'\right| = 3\left[(x)'\cdot\ln x + x(\ln x)'\right] = 3\left[1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right] = 3(\ln x + 1)$$

Ответ: $y' = 3(\ln x + 1)$.

4) $y = \dfrac{x^2 - 3 + 1}{2x}$.

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2-3x+1}{x}\right)' = \left|\text{Правило}: \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-3x+1\right)'x - (x)'\left(x^2-3x+1\right)}{x^2} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)x - \left(x^2-3x+1\right)}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2-3x-x^2+3x-1}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{x^2}$$

Ответ: $y' = \dfrac{x^2-1}{2x^2}$.

Список литературы

1. Гурский Е.И., Ершова В.В. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. Минск: Высш. шк., 1965. 184с.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980, 1984. 120с.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980. 270с.

4. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. М.: Высш.шк., 1978. – Т.1. 384с.

5. Щипачев В.С. Основы высшей математики. М.: Высш.шк., 1998. 200с.

6. Элементы линейной алгебры / Сост. Ю.Ф.Стругов, Г.А.Троценко, Е.М.Назарук. Омск: изд-во ОмГТУ, 1998, 36с.

7. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.:Наука, 1986. 240с.

8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.:Наука,1977. 416с.

9. Иванов-Мусатов О.С. Начала математического анализа. М.:Наука, 1988.

10. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.:Наука. 1985.

11. Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. М.:Высш.шк., 1985.

12. Предел и непрерывность / Сост. Л.В.Бельгарт, Н.И.Николаева. Омск: изд-во ОмГТУ, 2000, 36с.

13. Сборник задач и упражнений по курсу высшей математики / Под ред. Г.И.Кручковича. М.:Высш.шк., 1973, 576с.