

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВЫХ РАСЧЁТОВ
ПО КУРСУ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»**

Часть II.

Омск
Издательство ОмГТУ
2011

Рецензент:
Бояркин Геннадий Николаевич, к.э.н., профессор

Составители: Веснина Алефтина Александровна, доцент,
Стругова Татьяна Михайловна, старший преподаватель,
Назарук Елена Маратовна, старший преподаватель

Методические указания составлены в соответствии с программой курса высшей математики для технических вузов. Предназначены для студентов первого и второго курсов всех специальностей дневного обучения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета.

ГОУ ВПО «Омский государственный
технический университет», 2011

Контрольная работа № 6

“ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ”

ЗАДАНИЕ 1. Исследовать на экстремум:

1.	1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x;$	2) $y = x^2 - 2\ln x + 3.$
2.	1) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1;$	2) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}.$
3.	1) $y = x^3 - 6x^2 + 5;$	2) $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}.$
4.	1) $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 9;$	2) $y = (1/x) + x.$
5.	1) $y = \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x};$	2) $y = x^4 - 2x^2.$
6.	1) $y = x^2(x - 12)^2;$	2) $y = (1 + x)e^x.$
7.	1) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 7;$	2) $y = \frac{1}{1 + x^2}.$
8.	1) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x};$	2) $y = x^2(1 - x).$
9.	1) $y = 80x - x^5 - 80;$	2) $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}.$
10.	1) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1;$	2) $y = \frac{x^2}{x - 2}.$
11.	1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x;$	2) $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}.$
12.	1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x;$	2) $y = x + \frac{1}{x}.$
13.	1) $y = x^4 - 2x^2 + 6;$	2) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}.$
14.	1) $y = 17 - 3x^2 + \frac{1}{2}x^4;$	2) $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right).$
15.	1) $y = x^2(x - 2)^2;$	2) $y = \frac{x^3}{3} + x^2.$
16.	1) $y = (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2;$	2) $y = x^3 + 6x^2 + 9x.$

17.	1) $y = 4x^3 + 15x^2 - 18x + 48;$	2) $y = x + \frac{4}{x^2}.$
18.	1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9;$	2) $y = x^3(x - 1)^2.$
19.	1) $y = \frac{1}{x^2} - 2x;$	2) $y = 2 - 3x^2 - x^3.$
20.	1) $y = (x - 1)^2(x + 2);$	2) $y = x - \frac{4}{x^2}.$
21.	1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 4;$	2) $y = 1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}.$
22.	1) $y = 3x^2 - 2 - x^2;$	2) $y = x^2(x + 3)^2.$
23.	1) $y = (x + 1) \cdot e^{x+2};$	2) $y = 16x^2(x - 1)^2.$
24.	1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5;$	2) $y = (3 - x) \cdot e^{x-2}.$
25.	1) $y = 2 - 12x^2 - 8x^3;$	2) $y = (3x + 1)^2(3x - 1)^2.$
26.	1) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x;$	2) $y = (x - 1) \cdot e^{-x}.$
27.	1) $y = 12x^2 - 8x^3 - 2;$	2) $y = x(1 - x)^3.$
28.	1) $y = (2x + 4) \cdot e^{x+1};$	2) $y = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$
29.	1) $y = 12x^2 - 8x^3 - 2;$	2) $y = 1 - \frac{27}{x^2} + \frac{54}{x^3}.$
30.	1) $y = (4 - x) \cdot e^{x-3};$	2) $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9.$

ЗАДАНИЕ 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1.	$y = 72x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 1$ на отрезке $[0; 1]$.
2.	$y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2; 2]$.
3.	$y = 2 - 2x^2 + x^4$ на отрезке $[0; 3]$.
4.	$y = \sin 2x - x$ на отрезке $[0; \pi/2]$.
5.	$y = (x - 1) \cdot \sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[0; 2]$.
6.	$y = x - 2\sqrt{x}$ на отрезке $[1/9; 4]$.

7.	$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$ на отрезке $[1; 3]$.
8.	$y = \sin x - 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.
9.	$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ на отрезке $[0; 4]$.
10.	$y = x^3 - 7,5x^2 + 18x + 1$ на отрезке $[0; 4]$.
11.	$y = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 1$ на отрезке $[0; 2]$.
12.	$y = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[0; 3]$.
13.	$y = 15 + 4x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$.
14.	$y = 3x - x^3$ на отрезке $[-2; 3]$.
15.	$y = 3x - x^3$ на отрезке $[0; 3]$.
16.	$y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[0; 2]$.
17.	$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$ на отрезке $[1; 4]$.
18.	$y = 2\sqrt{x} - x$ на отрезке $[0; 4]$.
19.	$y = x - 4\sqrt{x} + 5$ на отрезке $[1; 9]$.
20.	$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$ на отрезке $[-4; -1]$.
21.	$y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$ на отрезке $[1; 4]$.
22.	$y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$ на отрезке $[2; 4]$.
23.	$y = 8x + \frac{4}{x^2} - 15$ на отрезке $[0,5; 2]$.
24.	$y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15$ на отрезке $[-2; -0,5]$.
25.	$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ на отрезке $[1; 3]$.
26.	$y = x - \sqrt{x}$ на отрезке $[0; 4]$.
27.	$y = x + \sqrt{x}$ на отрезке $[0; 9]$.

28. $y = x^2 + \frac{2}{x}$ на отрезке $[0,5; 2]$.
29. $y = x^5 - x^3 - 2$ на отрезке $[-2; 2]$.
30. $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 4$ на отрезке $[-4; 2]$.

ЗАДАНИЕ 3. Найти точки перегиба функции:

1. $y = \frac{x^3}{6} - x^2.$	2. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5.$	3. $y = \frac{5x}{2 + x^2}.$
4. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2.$	5. $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}.$	6. $y = \frac{x}{x^2 - 1}.$
7. $y = \frac{1}{x} + 4x^2.$	8. $y = \frac{1}{x^2 + 3}.$	9. $y = \frac{x^3}{x - 1}.$
10. $y = \frac{x}{1 + x^2}.$	11. $y = \frac{x}{x^2 - 4}.$	12. $y = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}.$
13. $y = \frac{6x}{1 + x^2}.$	14. $y = \frac{x + 1}{x^2}.$	15. $y = x e^x.$
16. $y = \frac{x}{(1 - x^2)^2}.$	17. $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 - 12$	18. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{3}$
19. $y = \frac{1 - x}{1 + x^2}.$	20. $y = \frac{x + 2}{x^3}.$	21. $y = 1 - \frac{9}{x^2}.$
22. $y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 7$	23. $y = \frac{x^2}{x + 1}.$	24. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x + 3$
25. $y = x + \frac{1}{x}.$	26. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$	27. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$
28. $y = -\frac{x^3 + 1}{3}.$	29. $y = 2x^4 - 3x^2 - 6$	30. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}.$

ЗАДАНИЕ 4. Найти асимптоты графика функции:

1. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.	2. $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$.	3. $y = \frac{2x^2 - 3x + 5}{5x}$.
4. $y = \frac{x^2}{x + 4}$.	5. $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$.	6. $y = \frac{1}{1 - x^2}$.
7. $y = \frac{1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$.	8. $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.	9. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.
10. $y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2}$.	11. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.	12. $y = \frac{(x - 1)^2}{(x + 1)^3}$.
13. $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$.	14. $y = \frac{16}{x^2(x - 4)}$.	15. $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$.
16. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.	17. $y = \frac{x + 4}{x^2}$.	18. $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$.
19. $y = \frac{12x}{9 - x^2}$.	20. $y = \frac{4 - x^3}{x^2}$.	21. $y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$.
22. $y = \frac{x^2}{(x - 1)^2}$.	23. $y = -\frac{8x}{x^2 + 4}$.	24. $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.
25. $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$.	26. $y = \frac{x^3 - 4}{x^2}$.	27. $y = \frac{4x^2}{3 + x^2}$.
28. $y = \frac{(x - 1)^2}{x^2}$.	29. $y = \frac{4x}{(x + 1)^2}$.	30. $y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}$.

ЗАДАНИЕ 5. Исследовать функцию и построить ее график:

1. $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$.	2. $y = x^3 - 3x$.	3. $y = \frac{3x}{4 + x^2}$.	4. $y = \frac{1}{1 - x^2}$.
5. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.	6. $y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2}$.	7. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.	8. $y = \frac{x^3}{x - 1}$.
9. $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$.	10. $y = x e^{-x}$.	11. $y = \frac{1}{x^2 + 3}$.	12. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$.
13. $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$.	14. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.	15. $y = \frac{8}{x^2 - 4}$.	16. $y = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$.
17. $y = x^2(x + 1)^2$.	18. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$.	19. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.	20. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

21. $y = (x-2)^2(x+3)^2$	22. $y = x^3(x+2)^2$	23. $y = \frac{x}{1-x^2}$	24. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$
25. $y = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$	26. $y = \frac{x^2+1}{x}$	27. $y = 2x + \frac{1}{x^2}$	28. $y = \frac{x^2}{x-2}$
29. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$	30. $y = \frac{x^3}{1-x^2}$		

Образец выполнения контрольной работы № 6
“ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ”

1) Исследовать на экстремум функцию $y = x^2(1-x)^2$.

Решение. Найдем точки, подозрительные на экстремум. Для этого возьмем производную y' и приравняем ее нулю.

$$\begin{aligned} y' &= (x^2(1-x)^2)' = (x^2)'(1-x)^2 + x^2((1-x)^2)' = \\ &= 2x(1-x)^2 + x^2 \cdot 2(1-x)(-1) = 2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x) = \\ &= 2x(1-x)[1-x-x] = 2x(1-x)(1-2x) = 2x(x-1)(2x-1). \end{aligned}$$

$y' = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1/2$.

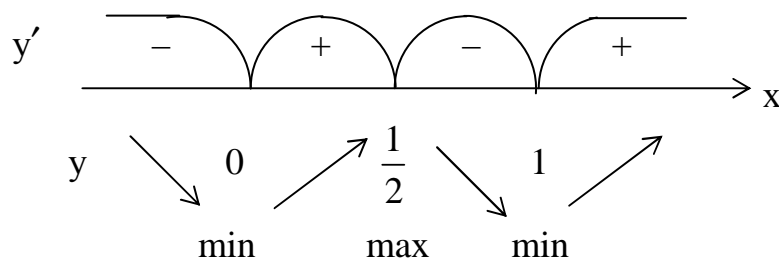


Рисунок 1

$$y_{\min}(0) = 0, \quad y_{\min}(1) = 0, \quad y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

На тех интервалах, где $y' < 0$, функция убывает; где $y' > 0$, функция возрастает. Поэтому интервалы возрастания функции $(0; 0,5)$ и $(1, \infty)$, интервалы убывания функции: $(-\infty, 0)$ и $(0,5; 1)$.

По рисунку 1 видно, что в точках $x = 0$ и $x = 1$ функция принимает свои минимальные значения, а при $x = 1/2$ – максимальное. Найдем эти значения:

Ответ: $y_{\min}(0) = y_{\min}(1) = 0$, $y_{\max}(1/2) = 1/16$.

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ на отрезке $[-2, 0]$.

Решение. Так как свои наименьшее и наибольшее значения непрерывная на отрезке функция может принимать либо на концах этого отрезка, либо в точках экстремума, входящих в этот отрезок, то находим значения исследуемой функции во всех этих точках и среди них выбираем наибольшее и наименьшее значения:

$$y(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 5 = -8 - 12 + 18 + 5 = 3;$$

$$y(0) = 5;$$

$$y' = (x^3 - 3x^2 - 9x + 5)' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3).$$

$$y' = 0 \text{ при } x^2 - 2x - 3 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -1.$$

Найдем значение функции только при $x = -1$, так как $3 \notin [-2, 0]$.

$$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = -1 - 3 + 9 + 5 = 10.$$

Выбираем наибольшее значение функции из найденных трех чисел – это 10. Теперь наименьшее – это 3.

Ответ: $y_{\max}(-1) = 10$, $y_{\min}(-2) = 3$.

3) Найти точки перегиба функции $y = x \cdot e^{-x}$.

Решение. Так как точками перегиба являются те точки из области допустимых значений, где вторая производная y'' меняет знак, сначала найдем y' , затем y'' и приравняем y'' к нулю:

$$y' = (x e^{-x})' = (x)' e^{-x} + x (e^{-x})' = e^{-x} - x e^{-x};$$

$$y'' = (y')' = (e^{-x} - x e^{-x})' = -e^{-x} - (e^{-x} - x e^{-x}) = -2e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}(x - 2).$$

$y'' = 0$ при $x = 2$, т. к. $e^{-x} > 0$ для всех x .

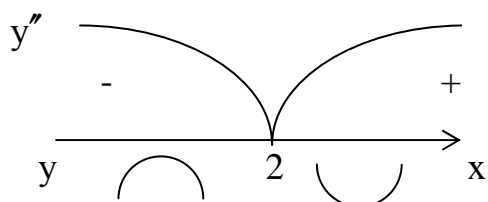


Рисунок 2

Так как в точке $x = 2$ y'' изменила знак, то функция y изменила выпуклость на вогнутость, т. е. $x = 2$ – точка перегиба функции (рис. 2).

Ответ: $x = 2$ – точка перегиба.

4) Найти асимптоты графика $y = \frac{2x^2}{x+1}$.

Так как вертикальную асимптоту имеет функция с разрывом 2-го рода в точке $x = x_0$, сначала найдем точки разрыва и исследуем поведение функции в их окрестностях. О.Д.З. $x \neq -1$.

Значит, $x = -1$ – точка разрыва, так как функция в этой точке не определена. Найдем предел слева и предел справа функции $y = \frac{2x^2}{x+1}$ при подходе к точке $x = -1$. Выясним, разрыв какого рода терпит данная функция в точке.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1-0 \\ x < -1}} \frac{2x^2}{x+1} = \left| \begin{array}{l} x+1 \rightarrow -0 \\ \frac{1}{x+1} \rightarrow -\infty \end{array} \right| = -\infty. \text{ Предел слева равен } -\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1+0 \\ x > -1}} \frac{2x^2}{x+1} = \left| \begin{array}{l} x+1 \rightarrow +0 \\ \frac{1}{x+1} \rightarrow +\infty \end{array} \right| = +\infty. \text{ Предел справа равен } +\infty.$$

Так как односторонние пределы бесконечны, то в точке $x = -1$ разрыв 2-го рода, поэтому уравнением вертикальной асимптоты будет $x = -1$.

Функция также может иметь или не иметь наклонные асимптоты. Если они есть, то их уравнение запишем в виде $y = kx + b$,

где
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Найдем правую наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x+1} : x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$$

Применяем правило Лопиталья:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(x+1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow k = 2.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x+1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 - 2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$$

Применяем правило Лопиталья:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-2x)'}{(x+1)'} = -2 \Rightarrow b = -2.$$
 Подставляем в уравнение асимптоты $y = kx + b$ и получаем уравнение правой асимптоты $y = 2x - 2$. Найдем левую асимптоту при $x \rightarrow -\infty$. Повторяя все предыдущие

действия, как и для $x \rightarrow +\infty$, получаем уравнение левой асимптоты: $y = 2x - 2$ (рис. 3)

Ответ: Вертикальная асимптота $x = -1$. Наклонная асимптота $y = 2x - 2$.

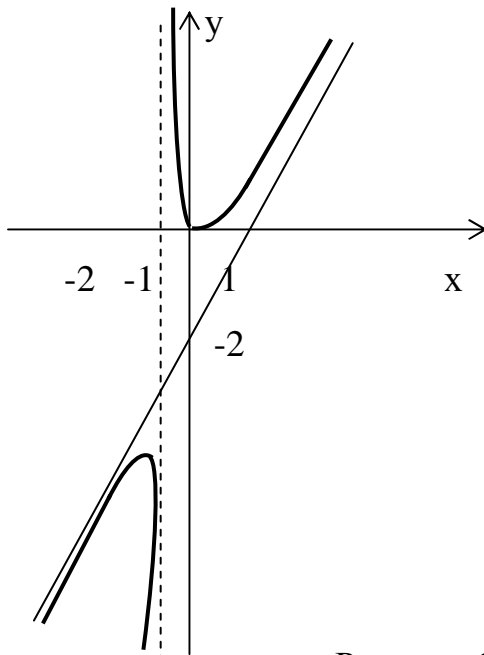


Рисунок 3

5) Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{2(x^2 + 1)}$ и построить ее график.

Исследование функции будем проводить по плану.

1. Найдем О.Д.З. и, если есть вертикальные асимптоты. О.Д.З.: x – любое. Следовательно, нет точек разрыва, поэтому вертикальных асимптот нет.

2. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат, исследуем функцию на четность, тригонометрические функции – на периодичность. Пусть $x = 0$, тогда $y = 0$. Проверим четность функции:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{2((-x)^2 + 1)} = \frac{-x^3}{2(x^2 + 1)} = -y(x).$$

Значит, данная функция нечетная, и ее график симметричен относительно начала координат.

3. Исследуем монотонность функции с помощью y' .

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^3}{2(x^2 + 1)} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

$y' = 0$ при $x = 0$. Получаем, что функция $y = \frac{x^3}{2(x^2 + 1)}$ всюду

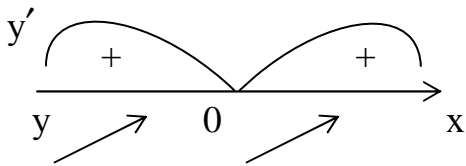


Рисунок 4

возрастающая, не имеющая точек экстремума, так как нет ни одной точки, в которой y' меняет знак (рис. 4).

4. С помощью y'' находим точки перегиба.

$$\begin{aligned} y'' = (y')' &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} \right)' = \frac{1}{2} \frac{(4x^3 + 6x)(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1) 2x(x^4 + 3x^2)}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x(2x^2 + 3)(x^2 + 1)^2 - 2x(x^2 + 1)(2x^4 + 6x^2)}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{2x(x^2 + 1)(2x^2 + 3)(x^2 + 1) - (2x^4 + 6x^2)}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= x \frac{2x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 3 - 2x^4 - 6x^2}{(x^2 + 1)^3} = x \frac{3 - x^2}{(x^2 + 1)^3}. \end{aligned}$$

$$y'' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } 3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

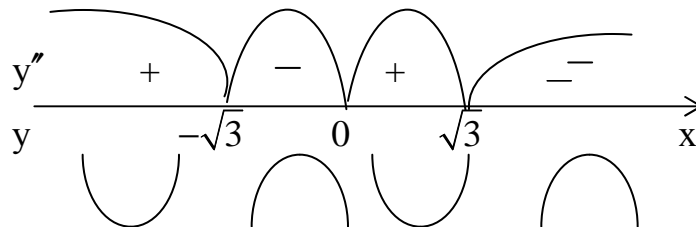


Рисунок 5

Все точки, в которых $y'' = 0$, являются точками перегиба, так как в них y'' меняет знак на противоположный (рис. 5).

Найдем значения функции в этих точках:

$$y(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{2((-\sqrt{3})^2 + 1)} = \frac{-3\sqrt{3}}{2 \cdot 4} \approx -0,65, \quad y(0) = 0, \quad y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx +0,65.$$

5. Найдем наклонные асимптоты, если они есть: $y = kx + b$.

$$\text{Сначала } x \rightarrow +\infty, \text{ тогда } k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2(x^2 + 1)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$$

По правилу Лопитала: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{2(x^2+1)'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Теперь найдем } b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2(x^2+1)} - \frac{x^2+1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{2(x^2+1)} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(x^2+1)'} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \Rightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Получаем $y = x/2$ – уравнение правой асимптоты. Повторяя прежние рассуждения уже при $x \rightarrow -\infty$, получим уравнение левой асимптоты: $y = x/2$.

6. Строим график функции, начертив сначала все асимптоты, отметив точки экстремума, точки перегиба и точки пересечения с осями координат (рис. 6).

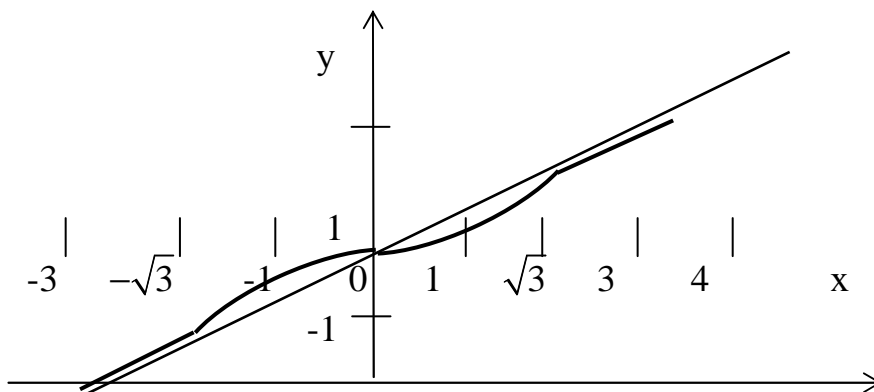


Рисунок 6

Контрольная работа № 7 “ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ”

ЗАДАНИЕ 1а. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции:

1. $z = 2^{xy} + \sin(2xy)$.	2. $z = e^{xy} + \ln(x + \ln y)$.
3. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.	4. $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{y}$.
5. $z = 2^{xy^3} + \arcsin x$.	6. $z = \ln(x^2 + y^2 + xy)$.
7. $z = \arcsin(x^2/y)$.	8. $z = \arccos \sqrt{x^2 + y^2}$.
9. $z = x^y + \operatorname{arctg}(x+y)$.	10. $z = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

11. $z = \ln \sin(x^2 + y)$.	12. $z = 3^{xy} + \sin(x^2 + y^2)$.
13. $z = e^{\frac{x}{y}} + \ln(x^2 + xy)$.	14. $z = \cos \ln xy$.
15. $z = \ln \operatorname{tg}(x/y)$.	16. $z = \operatorname{tg} \ln(x^2 + y^2)$.
17. $z = 3^{x^2 y} + \cos(3x^2 + 2xy)$.	18. $z = e^{3x+4y} + \operatorname{arctg}(2x + y)$.
19. $z = 5^{xy} + \ln(x^3 + 3xy)$.	20. $z = \operatorname{ctg}(2x + 4xy^3)$.
21. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+y}$.	22. $z = \ln \cos(x + 4xy)$.
23. $z = \operatorname{arctg} \frac{2x-y}{x^2}$.	24. $z = 2^{xy^3} + \cos(9x + 4xy^2)$.
25. $z = \arccos(x + y) + (xy)^2$.	26. $z = e^{\frac{x+1}{y}} + \ln(3x^2 + 4xy - y^2)$.
27. $z = \sin \ln(5x + 8y)$.	28. $z = \arccos \frac{x^2 + 4y}{x - y}$.
29. $z = \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{3y - 4x}$.	30. $z = \sqrt{3x + 5y^2} + \ln(xy)$.

ЗАДАНИЕ № 1 б. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции:

1. $z = \arcsin \frac{x+y}{xy}$.	2. $z = \sin(x + y) + \operatorname{tg}(x^2 y)$.
3. $z = \ln(x^2 + 3y^2 + xy)$.	4. $z = \operatorname{tg} \frac{x}{y} \cdot \sin \frac{y}{x}$.
5. $z = \ln \frac{xy}{5x + y}$.	6. $z = \cos x^3 + \sin y^3 - xy$.
7. $z = x^y + y^x$.	8. $z = \sin \ln \frac{x}{y}$.
9. $z = \ln \cos(xy)$.	10. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
11. $z = \operatorname{arcctg}(y/x)$.	12. $z = \operatorname{arcctg}(x/y)$.

13. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.	14. $z = \frac{2x + y}{x - 3y}$.
15. $z = e^{2x+y} + \sqrt{x^2 + y^2}$.	16. $z = \arcsin x y$.
17. $z = \arccos \frac{xy}{7x+9y}$.	18. $z = \ln \sin(x + y^2 - xy)$.
19. $z = \cos(2x - 3xy^2) + \operatorname{tg} y$.	20. $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + y^2}$.
21. $z = \ln(x^3 y^3 - xy)$.	22. $z = \operatorname{tg}(2x + y) \cdot \cos(x^2 - 9xy)$.
23. $z = \sqrt[3]{3x^2 y - 4x + 9y}$.	24. $z = \frac{4x^2 - 12y}{x + y}$.
25. $z = \cos(x^3 + 3xy) \cdot e^{5xy}$.	26. $z = \sqrt[5]{xy^3 + 4x^2}$.
27. $z = e^{8y+xy} + \sqrt{x^2 y + yx^2}$.	28. $z = \ln \frac{3x^2 + 8xy - 4}{x + y}$.
29. $z = \arcsin \sqrt{6x - 7y}$.	30. $z = \cos \ln \frac{x + y}{x - y}$.

ЗАДАНИЕ 2. Показать, что

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = \ln(x^2 + y)$.
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = \sqrt{2xy + y^2}$
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = x^y$.
4. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.
5. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
6. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = e^x (x \cos y - y \sin y)$
7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$.

8.	$x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) = y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z = x e^{-\frac{y}{x}}$.
9.	$2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ для функции $z = 2 \cos^2 \left(x - \frac{y}{2} \right)$.
10.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = \ln(x^2 + y^2)$.
11.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = e^x \cdot \cos y$.
12.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$ для функции $z = \ln \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)$.
13.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.
14.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$ для функции $z = \ln(e^x + e^y)$.
15.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$.
16.	$2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x - y}$ для функции $z = \frac{x y}{x - y}$.
17.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = \ln(x^2 + y^2)$.
18.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4x^2 \cdot z + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z = \ln(x^2 + 2y)$.
19.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{8}{y + 4x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2}{y + 4x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z = \frac{y}{y + 4x}$.
20.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 \cdot \sin(x + y) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z = x \cdot \cos(x + y)$.
21.	$3y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 3x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z = e^{3xy}$.
22.	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$ для функции $z = x \cdot \ln \frac{y}{x}$.

23.	$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$	для функции	$z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$.
24.	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$	для функции	$z = (x^2 + y^2) \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.
25.	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$	для функции	$z = \arcsin \frac{x - y}{x + y}$.
26.	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -z$	для функции	$z = \frac{2x + 3y}{x^2 + y^2}$.
27.	$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(x + y)}{x - y}$	для функции	$z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$.
28.	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$	для функции	$z = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3$.
29.	$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \cos x - \cos y + 3 \cos(2x - y)$	для функции	$z = \sin x + \sin y + \sin(2x - y)$.
30.	$x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$	для функции	$z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$.

ЗАДАНИЕ 3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1. $\frac{4}{1,03^2 + 2,97^2}$.	2. $\operatorname{arctg} \frac{0,96}{1,05}$.	3. $\frac{2,05^2}{2,05^2 + 3,01^2}$.
4. $1,03^{0,98}$.	5. $0,97^{1,05}$.	6. $3,09 \cdot e^{0,09}$.
7. $\sqrt{1,05^3 + 1,98^3}$.	8. $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2}$.	9. $2,003^2 \cdot 3,004^3$.
10. $1,02^3 \cdot 0,97^2$.	11. $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.	12. $1,04^{2,02}$.
13. $\sqrt{4,02^2 + 3,03^2}$.	14. $1,02^{3,01}$.	15. $0,98^{2,02}$.
16. $2,01 \cdot e^{1,02}$.	17. $\frac{2}{2,01^2 + 3,98^2}$.	18. $\frac{3}{1,04^3 + 2,05^2}$.
19. $\frac{0,98}{0,98 + 3,02^2}$.	20. $2,02^2 \cdot 1,98^2$.	21. $\frac{1,04^2}{1,02^2 + 2,03^2}$.
22. $3,04^{0,99}$.	23. $2,03^{1,02}$.	24. $0,99^{2,04}$.
25. $\sqrt{1,01^2 + 2,02^3}$.	26. $2,01^{1,04}$.	27. $\sqrt[3]{2,04^2 + 1,99^2}$.
28. $3,04 \cdot e^{0,03}$.	29. $2,07 \cdot e^{0,08}$.	30. $3,001^3 \cdot 2,99^2$.

ЗАДАНИЕ 4. Исследовать на экстремум:

1. $z = x^2 + y^2 - 6x + 8y - 2.$	2. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$
3. $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 6.$	4. $z = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3.$
5. $z = x^2 - 8x - 10y + xy + y^2 + 17.$	6. $z = 4x + 5y - x^2 - xy - y^2 + 4.$
7. $z = 3x + 9y - x^2 - xy - y^2 - 4.$	8. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$
9. $z = 13y + 11x - xy - x^2 - y^2 + 5.$	10. $z = 6x - 8y - x^2 - y^2 - 17.$
11. $z = x^2 - 2x + 1 + 2y^2.$	12. $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1.$
13. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7.$	14. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$
15. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$	16. $z = 4x - 4y - x^2 - y^2.$
17. $z = x^2 + y^2 - 8xy + 4x - y + 5.$	18. $z = 3x^2 + 2xy - 8x + 4y^2 - 10x + 2.$
19. $z = x^2 + 6xy - 14x - 2y^2 + 6y - 1.$	20. $z = 7x^2 + 4xy + 10x - 3y^2 + 10y + 4.$
21. $z = -3x^2 + 4xy + 14x - 5y^2 - 22y.$	22. $z = -4x^2 + 2xy + 14x - 3y^2 + 2y.$
23. $z = 4x^2 + 16xy + 9y^2 - 36y + 1.$	24. $z = -3x^2 + 6x + y^2 - 12y - 2.$
25. $z = \frac{x^2}{2} + 5xy + 4x - y^2 + 12y - 3.$	26. $z = \frac{3x^2}{2} - xy - 4x + \frac{5}{2}y^2 - 3y.$
27. $z = 2x^2 + 4xy - 3y^2 - 10y.$	28. $z = -\frac{x^2}{2} - 2xy + 2y^2 - 3x - 6y.$
29. $z = 2x^2 + 4xy - 6x + 6y^2 - 16y + 1.$	30. $z = -x^2 + 6xy - 2y^2 - 2y - 4x.$

ЗАДАНИЕ 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в треугольнике со сторонами $y = x + 1, y = 0, x = 3.$
2. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ в треугольнике со сторонами $x + y + 1 = 0, y = 0, x = -3.$
3. $z = x^2 + xy - 2$ в замкнутой области, ограниченной $y = 4x^2 - 4$ и осью $Ox.$
4. $z = y^2 - 2xy - x^2 + 4x - 3$ в треугольнике со сторонами $y = x + 1, x = 0, y = 2.$
5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ в треугольнике со сторонами $y = x + 2, y = 0, x = 2.$
6. $z = x^2 + 2xy - 10$ в замкнутой области, ограниченной $y = x^2 - 4$ и осью $Ox.$

7.	$z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$ в квадрате $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.
8.	$z = 2x + y - xy$ в квадрате $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$.
9.	$z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{3}$ и $y = 3$.
10.	$z = 1 + x + 2y$ в области, ограниченной прямыми $x = 0, y = 0, x + y = 1$.
11.	$z = 1 + x + 2y$ в области, ограниченной прямыми $x = 0, y = 0, x - y = 1$.
12.	$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0, y = 0, x = 1, y = 2$.
13.	$z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ в треугольнике со сторонами $x + y + 2 = 0, x = 0, y = 0$.
14.	$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в треугольнике со сторонами $x = 0, y = 0, x + y = 3$.
15.	$z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ в треугольнике со сторонами $y = 2x, y = 2, x = 0$.
16.	$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ в квадрате, ограниченном прямыми $x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$.
17.	$z = x^2 - 6xy + 4y + 2y^2 - 2y - 1$ в квадрате $0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 3$.
18.	$z = 3x^2 + 2xy + 4x - 2y^2 + 6y$ в треугольнике со сторонами $y = 2 + x, x = 0, y = 0$.
19.	$z = -2x^2 + 6xy - \frac{5}{2}x^2 + 4$ в квадрате $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1$.
20.	$z = x^2 - 3yx - x - y^2/2 - 4y$ в треугольнике со сторонами $y = -1 - x, x = 0, y = 0$.
21.	$z = -x^2 + 4yx + 6x - 5y^2 - 14y$ в квадрате $0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq -2$.
22.	$z = 5x^2 + 14yx - 24x + y^2 - 16y + 1$ в треугольнике со сторонами $y = -x, x = 2, y = 2$.
23.	$z = -x^2 + 4xy - 4x + y^2 - 12y$ в прямоугольнике $1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 3$.
24.	$z = 6x^2 + 2yx + 2x - 2y^2 - 4y - 1$ в область ограниченной линиями $y = x^2, y = -2$.

25.	$z = 2x^2 + 4xy - 4x + y^2 - 4y + 2$ в область ограниченной линиями $x = y^2$, $x = 2$.
26.	$z = -x^2 + 2yx - 2x - 2y^2 + 2y$ в квадрате $-2 \leq x \leq 0$; $-1 \leq y \leq 1$.
27.	$z = 3x^2 - 5yx - 6x + \frac{y^2}{2} - y$ в квадрате $-1 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 2$.
28.	$z = 6x^2 - 10xy + 7x^2 + 4$ в треугольнике со сторонами $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.
29.	$z = -\frac{x^2}{2} - 3xy + 7x + y^2 - y$ в треугольнике со сторонами $y = x$, $x = 0$, $y = 3$.
30.	$z = 3x^2 - 2yx - 10x - 2y^2 + 8y$ в треугольнике со сторонами $y = x$, $x = 3$, $y = 0$.

ЗАДАНИЕ 6. Найти производную функции:

1.	$z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке (3; 1) в направлении от этой точки к точке (6; 5).
2.	$z = \operatorname{arctg} xy$ в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координатно- го угла.
3.	$z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точке (2; 1) в направлении от этой точки к нача- лу координат.
4.	$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ в точке (1; 1) в направлении луча, образующего угол в 60° с осью ОХ.
5.	$z = \ln(e^x + e^y)$ в начале координат в направлении луча, образующего угол в 30° с осью ОХ.
6.	$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ в точке (1; 3) по направлению вектора $\vec{e} = \{3; 4\}$.
7.	$z = x^2 - xy - 2y^2$ в точке (1; 2) в направлении, составляющем с осью ОХ угол в 60° .
8.	$z = 3x^4 + xy + y^2$ в точке (1; 2) в направлении вектора, образующего с осью ОХ угол в 45° .
9.	$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ в точке (3; 1) по направлению вектора $\vec{e} = \{3; 4\}$.
10.	$z = \ln(e^x + e^y)$ в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координат- ного угла.

11.	$z = x^2 - 3xy + 5$ в точке (1; 2) в направлении от этой точки к точке (1; 1).
12.	$z = xy^2 + x^3 - xy$ в точке (1; 1) в направлении, образующем углы $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ с осями координат.
13.	$z = 2xy^2 + y^3 + 3xy$ в точке (4;1) в направлении от этой точки к точке (5;1).
14.	$z = xy$ в точке (5; 1) в направлении от этой точки к точке (9; 4).
15.	$z = x^2y + x^3$ в точке (1; 1) по направлению вектора $\vec{e} = \{1; -1\}$.
16.	$z = x^3 + 3x^2y + 6xy + y^2$ в точке (1; 1) в направлении от этой точки к точке (2; 2).
17.	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке (1; 1) в направлении вектора $\vec{a} = (1, -1)$.
18.	$z = x^2y - xy$ в точке (1; 5) в направлении вектора $\vec{a} = (2, -2)$.
19.	$z = x^2 - 4xy - 5$ в точке (1; 1) в направлении от этой точки к началу координат.
20.	$z = x^2y - x^2 + 5y^2$ в точке (-2; 1) в направлении луча образ. угол 60° с осью ОХ.
21.	$z = xy^2 - x^3y$ в точке (2; 2) в направлении луча образ. угол 30° с осью ОХ.
22.	$z = x\sqrt{y} - xy^2$ в точке (2; 1) в направлении вектора $\vec{a} = (-2, -1)$.
23.	$z = x^2 + y^2 - x$ в точке (3; 4) в направлении от этой точки к началу координат.
24.	$z = x^2 - x + y$ в точке (2; 1) в направлении вектора $\vec{a} = (3, -4)$.
25.	$z = xy - x^2$ в точке (-4; 3) в направлении вектора $\vec{a} = (5, 1)$.
26.	$z = \sqrt{xy} + y^2$ в точке (1; 1) в направлении вектора $\vec{a} = (-2, 2)$.
27.	$z = x^3 + y^2 + xy$ в точке (1; -3) в направлении биссектрисы первого координатного угла.
28.	$z = x + 2y + x^2y^2$ в точке (2; 2) в направлении от этой точки к точке (3; 3).
29.	$z = x^2y - \sqrt{xy}$ в точке (1; 5) в направлении от этой точки к точке (1; 2).
30.	$z = 3 - x^2 + xy^2$ в точке (1; 3) в направлении вектора $\vec{a} = (-1, 2)$.

ЗАДАНИЕ 7. Найти формулу вида $y = a x + b$ методом наименьших квадратов по данным опыта:

1.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>3,2</td><td>4,2</td><td>2,7</td><td>0,7</td><td>1,2</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	3,2	4,2	2,7	0,7	1,2	2.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>3,4</td><td>4,4</td><td>2,9</td><td>0,9</td><td>1,4</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	3,4	4,4	2,9	0,9	1,4
x	1	2	3	4	5																						
y	3,2	4,2	2,7	0,7	1,2																						
x	1	2	3	4	5																						
y	3,4	4,4	2,9	0,9	1,4																						
3.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>3,6</td><td>4,6</td><td>3,1</td><td>1,1</td><td>1,6</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	3,6	4,6	3,1	1,1	1,6	4.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>4,6</td><td>5</td><td>3,4</td><td>1,2</td><td>1,8</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	4,6	5	3,4	1,2	1,8
x	1	2	3	4	5																						
y	3,6	4,6	3,1	1,1	1,6																						
x	1	2	3	4	5																						
y	4,6	5	3,4	1,2	1,8																						
5.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>4</td><td>5</td><td>3,5</td><td>1,5</td><td>2</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	4	5	3,5	1,5	2	6.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>2,8</td><td>3,8</td><td>2,3</td><td>0,3</td><td>0,8</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	2,8	3,8	2,3	0,3	0,8
x	1	2	3	4	5																						
y	4	5	3,5	1,5	2																						
x	1	2	3	4	5																						
y	2,8	3,8	2,3	0,3	0,8																						
7.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>4,1</td><td>5,1</td><td>3,6</td><td>1,6</td><td>2,1</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	4,1	5,1	3,6	1,6	2,1	8.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>4,4</td><td>5,4</td><td>3,9</td><td>1,9</td><td>2,4</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	4,4	5,4	3,9	1,9	2,4
x	1	2	3	4	5																						
y	4,1	5,1	3,6	1,6	2,1																						
x	1	2	3	4	5																						
y	4,4	5,4	3,9	1,9	2,4																						
9.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>4,6</td><td>5,6</td><td>4,1</td><td>2,1</td><td>2,6</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	4,6	5,6	4,1	2,1	2,6	10.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>4,8</td><td>5,8</td><td>4,3</td><td>2,3</td><td>2,8</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8
x	1	2	3	4	5																						
y	4,6	5,6	4,1	2,1	2,6																						
x	1	2	3	4	5																						
y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8																						
11.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>3</td><td>4</td><td>2,5</td><td>0,5</td><td>1</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	3	4	2,5	0,5	1	12.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>3,7</td><td>4,7</td><td>3,2</td><td>1,2</td><td>1,7</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	3,7	4,7	3,2	1,2	1,7
x	1	2	3	4	5																						
y	3	4	2,5	0,5	1																						
x	1	2	3	4	5																						
y	3,7	4,7	3,2	1,2	1,7																						
13.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>2,9</td><td>3,9</td><td>2,4</td><td>0,4</td><td>0,9</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	2,9	3,9	2,4	0,4	0,9	14.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>3,1</td><td>4,1</td><td>2,6</td><td>0,6</td><td>1,1</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	3,1	4,1	2,6	0,6	1,1
x	1	2	3	4	5																						
y	2,9	3,9	2,4	0,4	0,9																						
x	1	2	3	4	5																						
y	3,1	4,1	2,6	0,6	1,1																						
15.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>2,5</td><td>3,5</td><td>2,0</td><td>0</td><td>0,5</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	2,5	3,5	2,0	0	0,5	16.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>2,6</td><td>3,6</td><td>2,1</td><td>0,1</td><td>0,6</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	2,6	3,6	2,1	0,1	0,6
x	1	2	3	4	5																						
y	2,5	3,5	2,0	0	0,5																						
x	1	2	3	4	5																						
y	2,6	3,6	2,1	0,1	0,6																						
17.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>3,1</td><td>4,3</td><td>2,8</td><td>1,7</td><td>0,6</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	3,1	4,3	2,8	1,7	0,6	18.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>3,3</td><td>4,1</td><td>2,8</td><td>0,8</td><td>1,5</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	3,3	4,1	2,8	0,8	1,5
x	1	2	3	4	5																						
y	3,1	4,3	2,8	1,7	0,6																						
x	1	2	3	4	5																						
y	3,3	4,1	2,8	0,8	1,5																						

19.	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>3,7</td><td>4,5</td><td>3,3</td><td>1,2</td><td>1,5</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	3,7	4,5	3,3	1,2	1,5	20.	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>3,7</td><td>2,1</td><td>2,4</td><td>5,1</td><td>0,7</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	3,7	2,1	2,4	5,1	0,7
x	1	2	3	4	5																						
y	3,7	4,5	3,3	1,2	1,5																						
x	1	2	3	4	5																						
y	3,7	2,1	2,4	5,1	0,7																						
21.	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>4,1</td><td>4,8</td><td>3,5</td><td>2,8</td><td>1,7</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	4,1	4,8	3,5	2,8	1,7	22.	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>4,2</td><td>2,1</td><td>1,3</td><td>0,4</td><td>0,6</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	4,2	2,1	1,3	0,4	0,6
x	1	2	3	4	5																						
y	4,1	4,8	3,5	2,8	1,7																						
x	1	2	3	4	5																						
y	4,2	2,1	1,3	0,4	0,6																						
23.	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>0,7</td><td>0,2</td><td>1,3</td><td>1,5</td><td>2,8</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	0,7	0,2	1,3	1,5	2,8	24.	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>1,8</td><td>2,9</td><td>3,3</td><td>3,5</td><td>3,8</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	1,8	2,9	3,3	3,5	3,8
x	1	2	3	4	5																						
y	0,7	0,2	1,3	1,5	2,8																						
x	1	2	3	4	5																						
y	1,8	2,9	3,3	3,5	3,8																						
25.	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>3,1</td><td>0,3</td><td>0,7</td><td>1,2</td><td>1,5</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	3,1	0,3	0,7	1,2	1,5	26.	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>2,4</td><td>2,1</td><td>6,9</td><td>1,1</td><td>2,9</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	2,4	2,1	6,9	1,1	2,9
x	1	2	3	4	5																						
y	3,1	0,3	0,7	1,2	1,5																						
x	1	2	3	4	5																						
y	2,4	2,1	6,9	1,1	2,9																						
27.	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>4,4</td><td>1,1</td><td>0,4</td><td>1,2</td><td>1,5</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	4,4	1,1	0,4	1,2	1,5	28.	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>1,6</td><td>0,7</td><td>1,3</td><td>1,7</td><td>2,8</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	1,6	0,7	1,3	1,7	2,8
x	1	2	3	4	5																						
y	4,4	1,1	0,4	1,2	1,5																						
x	1	2	3	4	5																						
y	1,6	0,7	1,3	1,7	2,8																						
29.	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>5,4</td><td>2,8</td><td>2,2</td><td>1,8</td><td>1,2</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	5,4	2,8	2,2	1,8	1,2	30.	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>4,4</td><td>1,2</td><td>0,5</td><td>1,2</td><td>1,8</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	4,4	1,2	0,5	1,2	1,8
x	1	2	3	4	5																						
y	5,4	2,8	2,2	1,8	1,2																						
x	1	2	3	4	5																						
y	4,4	1,2	0,5	1,2	1,8																						

Образец выполнения контрольной работы № 7
“ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ”

1) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = e^{xy} - \cos \frac{x}{y}$.

Решение $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{xy} - \cos \frac{x}{y} \right)'_x$. Считаем переменную “у” постоянной величи-

ной.

$$\begin{aligned} (e^{xy})'_x - \left(\cos \frac{x}{y}\right)'_x &= e^{xy} (xy)'_x + \sin \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \\ &= e^{xy} \cdot y(x)'_x + \sin \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} (x)'_x = ye^{xy} + \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} \text{ (т.к. } (x)'_x = 1). \end{aligned}$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{xy} - \cos \frac{x}{y}\right)'_y$. Считаем переменную “x” постоянной величиной.

$$\begin{aligned} (e^{xy})'_y - \left(\cos \frac{x}{y}\right)'_y &= e^{xy} \cdot x(y)'_y + \sin \frac{x}{y} \cdot x \left(\frac{1}{y}\right)'_y = \\ &= x \cdot e^{xy} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} \left(\text{т.к. } (y)'_y = 1; \left(\frac{1}{y}\right)'_y = (y^{-1})'_y = -y^{-2} = -\frac{1}{y^2} \right). \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y}; \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y}$.

2) Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ при $z = \ln \frac{x+y}{y}$.

Решение. Сначала найдем первые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln \frac{x+y}{y}\right)'_x = \frac{1}{x+y} \left(\frac{x+y}{y}\right)'_x = \frac{y}{x+y} \cdot \frac{1}{y} (x+y)'_x = \frac{1}{x+y}, \text{ (т.к. } (x+y)'_x = 1+0=1);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\ln \frac{x+y}{y}\right)'_y = \frac{1}{x+y} \left(\frac{x+y}{y}\right)'_y = \frac{y}{x+y} \cdot \frac{(x+y)'_y \cdot y - (y)'_y (x+y)}{y^2} = \\ &= \frac{y}{x+y} \cdot \frac{1 \cdot y - 1 \cdot (x+y)}{y^2} = \frac{1}{x+y} \cdot \frac{y-x-y}{y} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{x+y} = -\frac{x}{y(x+y)}. \end{aligned}$$

Теперь находим смешанные частные производные второго порядка и сравниваем их.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{y(x+y)} \right) = -\frac{1}{y} \left(\frac{x}{x+y} \right)'_x = \\ &= -\frac{1}{y} \cdot \frac{(x)'_x (x+y) - (x+y)'_x \cdot x}{(x+y)^2} = -\frac{1}{y} \cdot \frac{1 \cdot (x+y) - 1 \cdot x}{(x+y)^2} = \\ &= -\frac{1}{y} \cdot \frac{x+y-x}{(x+y)^2} = -\frac{1}{y} \cdot \frac{y}{(x+y)^2} = -\frac{1}{(x+y)^2}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x+y} \right) = \left((x+y)^{-1} \right)'_y = \\ &= -(x+y)^{-2} (x+y)'_y = -\frac{1}{(x+y)^2} (0+1) = -\frac{1}{(x+y)^2}. \end{aligned}$$

Видим, что смешанные производные равны, что и требовалось доказать.

3) Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{2,01^3 + 0,98^2}$.

Решение. Введем функцию двух переменных $z = \sqrt{x^3 + y^2}$. Так как $2,01 = 2 + 0,01$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,01$. Аналогично $y_0 = 1$, $\Delta y = -0,02$, т. к. $0,98 = 1 - 0,02$. Воспользуемся тем, что $\Delta z \approx dz$ при малых Δx и Δy .

Так как $\Delta z = z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0)$, отсюда следует, что

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = z(x_0, y_0) + \Delta z(x_0, y_0).$$

Заменим приращение функции Δz ее дифференциалом $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$,

где $dx \equiv \Delta x$, $dy \equiv \Delta y$.

$$\text{Тогда } z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y,$$

$$\text{т. е. в данном случае } z(2 + 0,01, 1 - 0,02) \approx z(2, 1) + \frac{\partial z(2, 1)}{\partial x} 0,01 + \frac{\partial z(2, 1)}{\partial y} (-0,02).$$

Вычислим $z(2, 1) = \sqrt{2^3 + 1^2} = 3$. Найдем $\frac{\partial z(2, 1)}{\partial x}$. Для этого сначала найдем частную производную z по x в произвольной точке.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^3 + y^2} \right) = \left((x^3 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right)'_x = \frac{1}{2} (x^3 + y^2)^{\frac{1}{2}} (x^3 + y^2)'_x =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^2}} (3x^2 + 0) = \frac{3x^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^2}} ;$$

$$\frac{\partial z(2, 1)}{\partial x} = \frac{3(2)^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^3 + 1^2}} = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

Теперь найдем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{x^3 + y^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^2}} (x^3 + y^2)'_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^2}} (0 + 2y) = \frac{y}{\sqrt{x^3 + y^2}} ;$$

$$\frac{\partial z(2, 1)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2^3 + 1^2}} = \frac{1}{3}.$$

Находим искомое значение корня

$$\sqrt{2,01^3 + 0,98^2} \approx 3 + 2 \cdot 0,01 + \frac{1}{3} \cdot (-0,02) \approx 3 + 0,02 - 0,0067 \approx 3,0133 .$$

Если найти $\sqrt{2,01^3 + 0,98^2}$ на калькуляторе, то получим $\approx 3,01347$. Различие только в четвертом знаке после запятой.

Ответ: $\sqrt{2,01^3 + 0,98^2} \approx 3,013$.

4) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - xy + 2x - 3y + 4$.

Решение. Найдем сначала стационарные точки, т. е. те точки, в которых частные производные одновременно равны нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x - y + 2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y - x - 3, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ 2y - x - 3 = 0. \end{cases}$$

Изменим порядок во втором уравнении и приведем систему линейных уравнений к стандартному виду, чтобы ее можно было решить методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 4 - 1 = 3,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = -4 + 3 = -1,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-2)(-1) = 6 - 2 = 4, \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{4}{3}.$$

Нашли одну стационарную точку, в которой $z'_x = z'_y = 0$, это точка $M_0\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Выясним с помощью вторых производных, есть ли в M_0 экстремум, и, если есть, то какой.

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x - y + 2) = 2,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2y - x - 3) = 2,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2y - x - 3) = -1.$$

Составляем определитель $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 4 - 1 = 3 > 0$.

Так как $D > 0$, то экстремум существует. Так как $A = 2 > 0$, то в стационарной точке M_0 функция имеет минимум. Найдем его.

$$z_{\min} \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{4}{3} \right)^2 - \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\frac{4}{3} \right) + 2 \left(-\frac{1}{3} \right) - 3 \cdot \frac{4}{3} + 4 = \frac{1}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} - 4 + 4 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Ответ: $z_{\min} \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right) = \frac{5}{3}$.

5) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x + 2y + y^2 - x^2 + xy$ в треугольнике со сторонами $x + y = 2$, $x = 1$, $y = 0$.

Решение. Так как свои наибольшее и наименьшее значения непрерывная функция может иметь или в стационарной точке внутри рассматриваемой области или на границе этой области, задачу будем решать в два этапа. Найдем стационарные точки и значения функции в тех из них, которые лежат в рассматриваемой области.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 - 2x + y = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 + 2y + x = 0, \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -2, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5, \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7,$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{4}{5} = 0,8, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{7}{5} = -1,4.$$

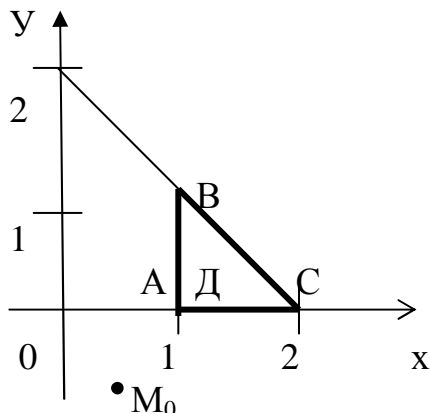


Рисунок 7

Точка $M_0(0,8; -1,4)$ не принадлежит треугольнику Д (рис. 7), поэтому значение функции в этой точке не вычисляем. Переходим ко второму этапу. Треугольник Д ограничивают три прямые. Будем исследовать функцию на экстремум на каждой из них. Сначала найдем значения функции в вершинах треугольника.

$$z_A = z(1, 0) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0^2 - 1^2 + 1 \cdot 0 = 3 - 1 = 2,$$

$$z_B = z(1, 1) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 1 = 6,$$

$$z_C = z(2, 0) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0^2 - 2^2 + 2 \cdot 0 = 2.$$

Рассмотрим границу АВ: $x = 1$. Подставляя $x = 1$ в выражение функции, получим $z = 3 \cdot 1 + 2y + y^2 - 1^2 + 1 \cdot y = y^2 + 3y + 2$.

Получили задачу на экстремум для функции одной переменной. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = y^2 + 3y + 2$ на отрезке $[0, 1]$. Находим $z' = 2y + 3 = 0$: $z' = 0$ при $y = -3/2$, а это значение y не входит в рас-

смаатриваемый отрезок $[0, 1]$. На концах отрезка значения функции уже подсчитаны, это z_A и z_B .

Переходим к границе $AC: y=0$. Подставляя $y=0$ в выражение функции, получим $z=3x+2\cdot 0+0^2-x^2+x\cdot 0=3x-x^2$.

Снова решаем задачу для функции одной переменной. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x-x^2$ на отрезке $[1, 2]$.

Находим $z'=3-2x=0$: $z'=0$ при $x=\frac{3}{2}=1,5$. Эта точка входит в отрезок $[1, 2]$. Поэтому вычислим значение функции в этой точке.

$$z\left(\frac{3}{2}\right)=3\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2,25.$$

На концах отрезка значения функции подсчитаны заранее, это z_A и z_C .

Рассматриваем третью границу $BC: x+y=2$. Выразим $y=2-x$ и подставим в выражение функции:

$$\begin{aligned} z &= 3x + 2(2-x) + (2-x)^2 - x^2 + x(2-x) = \\ &= 3x + 4 - 2x + 4 - 4x + x^2 - x^2 + 2x - x^2 = \\ &= 8 - x - x^2 \end{aligned}$$

Ищем наибольшее и наименьшее значения функции $z=8-x-x^2$ на отрезке $[1, 2]$.

Находим $z'=-1-2x$: $z'=0$ при $x=-0,5$, а это значение x не входит в $[1, 2]$. Теперь выбираем из найденных значений функции z наибольшее. Это значение равно 6 в точке $B(1, 1)$. А наименьшее значение принимается в двух точках: $A(1, 0)$ и $C(2, 0)$.

Ответ: $z_{\max}(1, 1) = 6$, $z_{\min}(1, 0) = z_{\min}(2, 0) = 2$.

6) Найти производную функции $z=3x^2-4y^3+2xy^2-5x+7y-1$ в точке $A(0, 1)$ в направлении от этой точки к точке $B(4, 4)$.

Решение. Запишем формулу производной функции по направлению вектора \vec{n} .

$$\frac{\partial z}{\partial n}\Big|_A = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A \cdot \cos \beta,$$

где $(\cos \alpha, \cos \beta) = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ – орт направления вектора \vec{n} .

Сначала найдем вектор \vec{n} , в направлении которого будем искать производную. $\vec{n} = \overline{AB} = (4-0; 4-1) = (4; 3)$. Найдем длину \vec{n} . $|\vec{n}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Направляющие косинусы вектора \vec{n} совпадают с координатами орта \vec{n} , поэтому $\cos \alpha = 4/5$, $\cos \beta = 3/5$.

Теперь найдем частные производные функции z .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (3x^2 - 4y^3 + 2xy^2 - 5x + 7y - 1)'_x = 6x + 2y^2 - 5,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_A = 6 \cdot 0 + 2 \cdot 1^2 - 5 = 2 - 5 = -3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (3x^2 - 4y^3 + 2xy^2 - 5x + 7y - 1)'_y = -12y^2 + 4xy + 7,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_A = -12 \cdot 1^2 + 4 \cdot 0 \cdot 1 + 7 = -12 + 7 = -5.$$

Найденные значения подставляем в формулу производной по направлению:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial n} \right|_A = (-3) \cdot \frac{4}{5} + (-5) \cdot \frac{3}{5} = \frac{-12 - 15}{5} = -\frac{27}{5}.$$

Вывод. Функция z убывает по направлению вектора \overline{AB} , так как полученная производная меньше нуля.

Ответ: $\left. \frac{\partial z}{\partial n} \right|_A = -\frac{27}{5}$.

7) Найти формулу вида $y = ax + b$ методом наименьших квадратов по данным опыта.

x	1	2	3	4	5
y	3,3	4,0	2,8	0,9	1,2

Решение. Нужно провести прямую $y = ax + b$ так, чтобы сумма квадратов расстояний от точек, данных в таблице, до искомой прямой была наименьшей. Для этого составляется функция S , которая зависит от двух переменных: a и b , и находится точка ее минимума.

$$S = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + (ax_3 + b - y_3)^2 + (ax_4 + b - y_4)^2 + (ax_5 + b - y_5)^2$$

Это можно записать короче: $S = \sum_{i=1}^5 (a x_i + b - y_i)^2$. Находим стационарную точку

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^5 x_i (a x_i + b - y_i) = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^5 (a x_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Перепишем эти уравнения так, чтобы потом можно было решить полученную систему линейных уравнений относительно a и b методом Крамера.

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^5 x_i^2 + b \sum_{i=1}^5 x_i = \sum_{i=1}^5 x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^5 x_i + n b = \sum_{i=1}^5 y_i. \end{cases}$$

Найдем коэффициенты при a и b . Для этого составим таблицу.

i	x_i	x_i^2	y_i	$x_i \cdot y_i$
1	1	1	3,3	3,3
2	2	4	4,0	8,0
3	3	9	2,8	8,4
4	4	16	0,9	3,6
5	5	25	1,2	6,0
Σ	15	55	12,2	29,3

Подставляем полученные в результате суммирования нужные коэффициенты в систему:

$$\begin{cases} 55a + 15b = 29,3, \\ 15a + 5b = 12,2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} = 50, \quad \Delta a = \begin{vmatrix} 29,3 & 15 \\ 12,2 & 5 \end{vmatrix} = -36,5, \quad \Delta b = \begin{vmatrix} 55 & 29,3 \\ 15 & 12,2 \end{vmatrix} = 231,5.$$

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{-36,5}{50} = -0,73, \quad b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{231,5}{50} = 4,63.$$

Ответ: $y = -0,73x + 4,63$.

Контрольная работа № 8
“НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ”

ЗАДАНИЕ. Вычислить неопределенные интегралы:

<p>1.</p> <p>1) $\int \frac{x^2 dx}{(3+2x^3)^2};$</p> <p>4) $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4};$</p> <p>7) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx;$</p> <p>10) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$</p>	<p>2) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}};$</p> <p>5) $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx;$</p> <p>8) $\int x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx;$</p>	<p>3) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx;$</p> <p>6) $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx;$</p> <p>9) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3+1}};$</p>
<p>2.</p> <p>1) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}};$</p> <p>4) $\int \frac{x dx}{x^4+1};$</p> <p>7) $\int \ln(x^2+1) dx;$</p> <p>10) $\int x^3 \sqrt{x^2-9} dx.$</p>	<p>2) $\int \frac{\ln x}{5x} dx;$</p> <p>5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x};$</p> <p>8) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx;$</p>	<p>3) $\int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$</p> <p>6) $\int \frac{5x-1}{x^2+4x-12} dx;$</p> <p>9) $\int \frac{\sqrt{1+2x}}{x} dx;$</p>
<p>3.</p> <p>1) $\int \frac{x-2}{\sqrt{3-2x^2}} dx;$</p> <p>4) $\int \frac{dx}{2x^2+9};$</p> <p>7) $\int x^2 \operatorname{arctg} 2x dx;$</p> <p>10) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$</p>	<p>2) $\int \operatorname{tg}^3 2x \cdot \sec^2 2x dx;$</p> <p>5) $\int \cos^5 \frac{x}{7} dx;$</p> <p>8) $\int \ln^2 x dx;$</p>	<p>3) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}};$</p> <p>6) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx;$</p> <p>9) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}};$</p>
<p>4.</p> <p>1) $\int 5x \sqrt{1-2x^2} dx;$</p>	<p>2) $\int \frac{2x^2 dx}{8x^3-7};$</p>	<p>3) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx;$</p>

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$;

5) $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx$;

6) $\int \frac{x-7}{x^2+4x+13} \, dx$;

7) $\int x^2 \ln(1+x) \, dx$;

8) $\int \arccos x \, dx$;

9) $\int \frac{3x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} \, dx$;

10) $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-16}}$.

5.

1) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{2 \sin x + 1}}$;

2) $\int \frac{e^x + \sin x}{e^x - \cos x} \, dx$;

3) $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} \, dx$;

4) $\int \frac{e^x \, dx}{e^{2x} + 4}$;

5) $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$;

6) $\int \frac{x-2}{x^2+x+1} \, dx$;

7) $\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$;

8) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$;

9) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}} \, dx$;

10) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \, dx$.

6.

1) $\int \frac{x^2-4}{x-3} \, dx$;

2) $\int \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx$;

3) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$;

4) $\int \frac{e^x \, dx}{\sqrt{25-16e^{2x}}}$;

5) $\int \operatorname{ctg}^4 x \, dx$;

6) $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+x-2}} \, dx$;

7) $\int x \ln(x^2+1) \, dx$;

8) $\int x^2 e^{2x} \, dx$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$;

10) $\int \sqrt{3-x^2} \, dx$.

7.

1) $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$;

2) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}} \, dx$;

3) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x}}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$;

5) $\int \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^4 x \, dx$;

6) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2} \, dx$;

7) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$;

8) $\int x^2 \sin x \, dx$;

9) $\int x \sin x^2 \, dx$

10) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$.

8. 1) $\int \frac{(3-\sqrt{x})^3}{x^2} dx;$ 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}};$ 7) $\int x^2 \cdot e^{3x} dx;$ 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$	2) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5} dx;$ 5) $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}+1};$ 8) $\int x \ln x dx;$	3) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx;$ 6) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx;$ 9) $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx;$
9. 1) $\int \frac{x^5+x+\sqrt[3]{x}}{x^2} dx;$ 4) $\int \frac{4x dx}{\sqrt{1-x^4}};$ 7) $\int (2x+3) \ln x dx;$ 10) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$	2) $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+7}};$ 5) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx;$ 8) $\int x \cdot \cos x dx;$	3) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x};$ 6) $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1} dx;$ 9) $\int \operatorname{tg}^4 x dx;$
10. 1) $\int \frac{x dx}{2x^2-1};$ 4) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}};$ 7) $\int x^2 \cos 6x dx;$ 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$	2) $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}};$ 5) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}};$ 8) $\int (2-x) \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx;$	3) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{1+\cos^2 x}} dx;$ 6) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx;$ 9) $\int \sec^4 2x dx;$
11. 1) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx;$ 4) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}};$	2) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}};$ 5) $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} dx;$	3) $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}} dx;$ 6) $\int \frac{2x-3}{x^2+2x-7} dx;$

7) $\int x^2 \cdot 5^{\frac{x}{2}} dx;$

8) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx;$

9) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx;$

10) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$

12.

1) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}};$

2) $\int \frac{x}{e^{x^2}} dx;$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$

4) $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx;$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};$

6) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx;$

7) $\int x^2 \sin 4x dx;$

8) $\int x^4 \ln(x^2+1) dx;$

9) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}};$

10) $\int \cos^5 x dx.$

13.

1) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4} dx$

2) $\int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-2)^3}};$

3) $\int \frac{2+\ln x}{2x} dx;$

4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{5+x^6}};$

5) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx;$

6) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2+6x-16}} dx;$

7) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx;$

8) $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx;$

9) $\int \sin^5 x dx;$

10) $\int 2x\sqrt{x^2+4} dx$

14.

1) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

2) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x - 7}}{x} dx;$

3) $\int x e^{x^2} dx;$

4) $\int \frac{x^2 dx}{4+x^6};$

5) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx;$

6) $\int \frac{4x+3}{\sqrt{x^2-6x+4}} dx;$

7) $\int \arcsin x dx;$

8) $\int \frac{\ln x}{x^5} dx;$

9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+9}};$

10) $\int \sqrt{4-x^2} dx.$

15.

1) $\int \frac{x dx}{e^{x^2-1}};$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+10}};$

3) $\int (2x\sqrt{x}-7x)^2 dx;$

4) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$;

5) $\int \sin^2 x dx$;

6) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+10x-21}} dx$;

7) $\int x^2 \sin(3x+5) dx$;

8) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$;

9) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$;

10) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}}$.

16.

1) $\int \frac{e^{3x} dx}{1-e^{3x}}$;

2) $\int \sqrt{2-\cos x} \cdot \sin x dx$; 3) $\int \frac{1-\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;

4) $\int \frac{(2x\sqrt{x}-3)^2}{x} dx$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

6) $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+4x-12}} dx$;

7) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$;

8) $\int x^3 \cdot \ln x dx$;

9) $\int \cos^2 x dx$;

10) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$.

17.

1) $\int \frac{x^3}{(1-x^4)} dx$;

2) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$;

3) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x+2}}{x} dx$;

4) $\int \frac{x dx}{x^4+9}$;

5) $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx$;

6) $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx$;

7) $\int (x+1)\cos 2x dx$;

8) $\int x^2 \cdot \ln x dx$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$;

10) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

18.

1) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-3\sin x}} dx$;

2) $\int \frac{1-\ln x}{x} dx$;

3) $\int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$;

4) $\int \frac{x^3 dx}{x^6+4}$;

5) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$;

6) $\int \frac{x-1}{x^2-x+1} dx$;

7) $\int x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$;

8) $\int x \cdot \ln(x+1) dx$;

9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+4}}$;

$$10) \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 4}} .$$

19.

1) $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 + 8}} dx;$	2) $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 3x}{\sin^2 3x} dx;$	3) $\int \frac{\operatorname{arccos}^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$
4) $\int \frac{x dx}{3x^2 - 1};$	5) $\int \sin^4 \frac{x}{2} dx;$	6) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx;$
7) $\int x^2 \cdot e^{2x} dx;$	8) $\int (x-2) \cdot \sin 3x dx;$	9) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}};$
10) $\int x^2 \cdot \sqrt{9-x^2} dx .$		

20.

1) $\int x \cdot \sqrt[3]{2-3x^2} dx;$	2) $\int \frac{x^3 dx}{2x^4 + 2};$	3) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x}} dx;$
4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-2x^3}};$	5) $\int \frac{\sin x}{\cos^6 x} dx;$	6) $\int \frac{4x+1}{x^2 - 2x + 2} dx;$
7) $\int \frac{\ln x}{x^4} dx;$	8) $\int (x-3) \cdot e^{-3x} dx;$	9) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}};$
10) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + 1}} .$		

21.

1) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[5]{\cos 3x}} dx;$	2) $\int \frac{\cos x - \sin x}{-\sin x - \cos x} dx;$	3) $\int \frac{3^{\operatorname{arcsin} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$
4) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} + 1};$	5) $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx;$	6) $\int \frac{2x-8}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} dx;$
7) $\int x^2 \cos 3x dx;$	8) $\int (2x+1) \cdot e^{\frac{x}{2}} dx;$	9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}};$
10) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} dx .$		

22.

1) $\int \frac{x^2}{(x^3 - 4)^6} dx;$	2) $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx;$	3) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[6]{\cos^5 3x}} dx;$
---------------------------------------	--	---

4) $\int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^{3x}}}$;

5) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} dx$;

6) $\int \frac{x}{x^2-4x+5} dx$;

7) $\int \frac{\ln 5x}{x^6} dx$;

8) $\int (1-x) \cdot e^x dx$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$;

10) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$.

23.

1) $\int x^2 (x^3+1)^6 dx$;

2) $\int \frac{\sqrt[6]{\operatorname{tg} x - 2}}{\cos^2 x} dx$;

3) $\int \frac{\ln 3x}{x} dx$;

4) $\int 5^{x^6} \cdot x^5 dx$;

5) $\int \sin x \cdot \cos^3 x dx$;

6) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx$;

7) $\int (x-3) \cos 2x dx$;

8) $\int x \cdot e^{5x} dx$;

9) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1} dx$;

10) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx$.

24.

1) $\int \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2}$;

2) $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x + 1)}$;

3) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$;

4) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx$;

5) $\int \cos^7 x dx$;

6) $\int \frac{3x-2}{x^2-6x+10} dx$;

7) $\int x^3 \ln x dx$;

8) $\int (x+1) \cdot e^{-x} dx$;

9) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$;

10) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

25.

1) $\int e^{\cos x} \cdot \sin x dx$;

2) $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg} 2x(1+4x^2)}$;

3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} dx$;

4) $\int \frac{e^{4x} + 1}{e^{2x}} dx$;

5) $\int \cos^4 3x dx$;

6) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-x+6}} dx$;

7) $\int x \cdot \sin 9x dx$;

8) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx$;

9) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$;

$$10) \int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

26.

$$1) \int \frac{x^5}{\sqrt[6]{x^6-1}} dx; \quad 2) \int \frac{\arcsin^5 x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad 3) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}};$$

$$4) \int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x+5}} dx; \quad 5) \int \cos^3 2x \cdot \sin 2x dx; \quad 6) \int \frac{3x-4}{x^2+2x+2} dx;$$

$$7) \int \operatorname{arctg} 2x dx; \quad 8) \int (1-3x) \cdot e^x dx; \quad 9) \int \frac{\sqrt{x+2} dx}{1+\sqrt{x+2}};$$

$$10) \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}.$$

27.

$$1) \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{4-e^{6x}}} dx; \quad 2) \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx; \quad 3) \int \frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{1+4x^2} dx;$$

$$4) \int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^4}}; \quad 5) \int \sin^5 4x dx; \quad 6) \int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx;$$

$$7) \int x \sin 5x dx; \quad 8) \int (x-2) \cdot \cos 2x dx; \quad 9) \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x+1}};$$

$$10) \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

28.

$$1) \int \frac{e^{5x}}{1+2e^{5x}} dx; \quad 2) \int \frac{x^4}{\sqrt{x^{10}-1}} dx; \quad 3) \int e^x \cdot \operatorname{cose}^x dx;$$

$$4) \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx; \quad 5) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos x}} dx; \quad 6) \int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} dx;$$

$$7) \int x^2 \sin 2x dx; \quad 8) \int x \cdot e^{\frac{x}{5}} dx; \quad 9) \int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

29.

$$1) \int e^x (2-e^x)^6 dx; \quad 2) \int \frac{x dx}{(3x^2-1)^4}; \quad 3) \int x \cdot \cos x^2 dx;$$

4) $\int \frac{6x^5 + 4}{x^6 + 4x + 1} dx;$	5) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx;$	6) $\int \frac{5x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx;$
7) $\int \frac{\ln x}{x^7} dx;$	8) $\int (2x - 1) \cdot e^x dx;$	9) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx;$
10) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{x^2} dx.$		

30.

1) $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg}^2 3x(1 + 9x^2)};$	2) $\int \frac{\ln^6 x}{x} dx;$	3) $\int \frac{x^2 dx}{\sin^2(x^3)};$
4) $\int x^4 e^{5x} dx;$	5) $\int \sin^4 5x dx;$	6) $\int \frac{x + 3}{x^2 - 2x + 2} dx;$
7) $\int x^4 \ln x dx;$	8) $\int (x - 1) \cdot \sin 5x dx;$	9) $\int \frac{x + 3}{x \cdot \sqrt{x - 4}} dx;$
10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}}.$		

**Образец выполнения контрольной работы № 8
“НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ”**

Вычислить интегралы:

1) $I = \int \frac{x^2 dx}{(5 + 4x^3)^4}.$ Делаем замену переменных. Так как x^2 – это почти про-

изводная x^3 , за t можно взять x^3 , а лучше $t = 5 + 4x^3$, тогда

$$dt = d(5 + 4x^3) = (5 + 4x^3)' dx = 12x^2 dx.$$

Выразим отсюда $x^2 dx = \frac{1}{12} dt$, получим

$$\int \frac{1}{12} \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{12} \int \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{12} \int t^{-4} dt = \frac{1}{12} \cdot \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{t^3} + C = -\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{(5 + 4x^3)^3} + C.$$

Можно проверить, что интеграл найден верно. Для этого воспользуемся формулой $(F(x))' = f(x)$.

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{(5+4x^3)^3} + c \right)' &= -\frac{1}{36} \left((5+4x^3)^{-3} \right)' = \\ &= -\frac{1}{36} \cdot (-3)(5+4x^3)^{-4} (5+4x^3)' = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{(5+4x^3)^4} \cdot 12x^2 = \\ &= \frac{x^2}{(5+4x^3)^4} - \text{получили подынтегральную функцию.} \end{aligned}$$

Ответ: $I = -\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{(5+4x^3)^3} + C$.

2) В интеграле $I = \int \frac{3x \, dx}{\sqrt{4-x^4}} = 3 \int \frac{x \, dx}{\sqrt{4-(x^2)^2}}$ в числителе стоит почти производная от x^2 . Поэтому $t = x^2 \quad dt = 2x \, dx, \quad x \, dx = \frac{1}{2} dt$.

Тогда

$$3 \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} = \frac{3}{2} \arcsin \frac{t}{2} + C = \frac{3}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C.$$

Ответ: $I = \frac{3}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C$.

3) $I = \int x \ln x \, dx$. Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du, \quad u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = x \, dx, \quad v = \int dv = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}.$$

После подстановки получим

$$\ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Ответ: $I = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

4) Выделим в знаменателе интеграла $\int \frac{5x-3}{x^2+x+1} dx$ полный квадрат:

$$x^2 + x + 1 = \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] - \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = t^2 + \frac{3}{4},$$

где $t = x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = t - \frac{1}{2}, dx = dt, 5x - 3 = 5\left(t - \frac{1}{2}\right) - 3 = 5t - \frac{5}{2} - 3 = 5t - \frac{11}{2}.$

В конечном счете после подстановки получаем

$$\int \frac{\left(5t - \frac{11}{2}\right) dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = 5 \int \frac{t dt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{11}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}}. \quad (1)$$

Найдем отдельно интегралы.

$$\int \frac{t dt}{t^2 + \frac{3}{4}}. \text{ После подстановки: } z = t^2 + \frac{3}{4}, dz = 2t \cdot dt, t dt = \frac{1}{2} dz \text{ получим}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \ln |z| = \frac{1}{2} \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{2} \ln (x^2 + x + 1),$$

$$\int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя найденные выражения в (1), получим

$$5 \cdot \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{11}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{5}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{11\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Ответ: $I = \frac{5}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{11\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

5) $\int \frac{\sqrt[4]{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} - 1} dx.$ Делая подстановку: $t^4 = x + 1, 4t^3 dt = dx, t = \sqrt[4]{x+1},$

$t^2 = \sqrt{x+1},$ получим $\int \frac{(t+2) \cdot 4t^3 dt}{t^2 - 1} = 4 \int \frac{t^4 + 2t^3}{t^2 - 1} dt = I.$

Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель так же, как число 231 на 8, столбиком,

$$\begin{array}{r} \underline{231} \quad \underline{8} \\ \underline{16} \quad \underline{28} \\ \underline{71} \end{array}$$

целая часть, результат записывается смешанной дробью:

$$\begin{array}{r} \underline{64} \\ 7 - \text{остаток} \end{array}$$

$$\frac{231}{8} = 28\frac{7}{8} = 28 + \frac{7}{8}.$$

Аналогично делим многочлены.

$$\begin{array}{r} \underline{t^4 + 2t^3} \quad \left| \begin{array}{l} t^2 - 1 \\ \underline{t^2 + 2t + 1} \\ \hline 2t^3 + t^2 \end{array} \right. \\ \underline{2t^3 + t^2} \\ \underline{2t^3 - 2t} \\ \underline{t^2 + 2t} \\ \underline{t^2 - 1} \\ (2t + 1) - \text{остаток} \end{array}$$

Берем степень t^4 , делим на t^2 , получаем t^2 .
Затем t^2 умножаем на $(t^2 - 1)$, получаем $t^4 - t^2$ и отнимаем от $t^4 + 2t^3$. t^4 взаимно уничтожаются, $2t^3$ сносим вниз, а $(-t^2)$ при вычитании становится $(+t^2)$. Затем $2t^3$ делим на t^2 , получаем $2t$. Затем умножаем $2t$ на $(t^2 - 1)$, получаем $2t^3 - 2t$ и это отнимаем и т. д.

Записываем результат деления: $\frac{t^4 + 2t^3}{t^2 - 1} = t^2 + 2t + 1 + \frac{2t + 1}{t^2 - 1}$ и подставляем

его под знак интеграла $I = 4 \int \left(t^2 + 2t + 1 + \frac{2t + 1}{t^2 - 1} \right) dt$. Последнее слагаемое пред-

ставляет собой правильную дробь, которую можно разложить в сумму простейших дробей.

$$\frac{2t + 1}{t^2 - 1} = \frac{t+1}{t-1} \cdot A + \frac{t-1}{t+1} \cdot B. \text{ Приравниваем числители дробей}$$

$$2t + 1 = A(t + 1) + B(t - 1)$$

$$\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 3 = A \cdot 2 \Rightarrow A = \frac{3}{2} \\ -1 = B(-2) \Rightarrow B = \frac{1}{2} \end{array} \right. , \quad \frac{2t + 1}{t^2 - 1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t - 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t + 1}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} I &= \frac{4\sqrt[4]{(x+1)^3}}{3} + 4\sqrt{x+1} + 4\sqrt[4]{x+1} + 6\ln \left| \sqrt[4]{x+1} - 1 \right| + 2\ln \left| \sqrt[4]{x+1} + 1 \right| + C = \\ &= \frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3} + 4\sqrt{x+1} + 4\sqrt[4]{x+1} + 2\ln \left| \left(\sqrt[4]{x+1} - 1 \right)^3 \cdot \left(\sqrt[4]{x+1} + 1 \right) \right| + C = \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt[4]{(x+1)^3} + 4\sqrt{x+1} + 4\sqrt[4]{x+1} + 2\ln \left| \left(\sqrt[4]{x+1} - 1 \right)^2 \left(\sqrt{x+1} - 1 \right) \right| + C.$$

Ответ: $I = \frac{4}{3} \sqrt[4]{(x+1)^3} + 4\sqrt{x+1} + 4\sqrt[4]{x+1} + 2\ln \left| \left(\sqrt[4]{x+1} - 1 \right)^2 \left(\sqrt{x+1} - 1 \right) \right| + C.$

6) $I = \int \sin^5 x \, dx = \int \sin^4 x (\sin x \, dx) = \int (\sin^2 x)^2 (-d(\cos x)) = -\int (1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x).$

Делая подстановку: $t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx$, получим

$$\begin{aligned} -\int (1 - t^2)^2 dt &= -\int (1 - 2t^2 + t^4) dt = \int (2t^2 - 1 - t^4) dt = \\ &= -t - \frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C. \end{aligned}$$

Ответ: $I = \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C.$

Так находятся интегралы, если есть хотя бы одна нечетная степень $\sin x$ или $\cos x$. В случае, если имеются только четные степени, интегралы находят с помощью понижения степени по формулам тригонометрии.

$$\begin{aligned} 7) I &= \int \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 + \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} + \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \frac{1}{8} \int (3 + 2\cos 2x + \cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \left(3x + 2 \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} \right) + C = \frac{1}{8} \left(3x + \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C. \end{aligned}$$

Ответ: $I = \frac{1}{8} \left(3x + \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C.$

Контрольная работа № 9
“ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ”

ЗАДАНИЕ 1. Вычислить интегралы:

<p>1.</p> <p>1) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$;</p> <p>2) $\int_0^1 x^2 e^x dx$.</p>	<p>2.</p> <p>1) $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2+3}} dx$;</p> <p>2) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$.</p>	<p>3.</p> <p>1) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$;</p> <p>2) $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos 2x dx$.</p>
<p>4.</p> <p>1) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;</p> <p>2) $\int_1^3 x \ln x dx$.</p>	<p>5.</p> <p>1) $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$;</p> <p>2) $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x dx$.</p>	<p>6.</p> <p>1) $\int_{-0,25}^{0,5} \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}$;</p> <p>2) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$.</p>
<p>7.</p> <p>1) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$;</p> <p>2) $\int_0^1 x e^{1-x} dx$.</p>	<p>8.</p> <p>1) $\int_1^9 x \cdot \sqrt[3]{1-x} dx$;</p> <p>2) $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx$.</p>	<p>9.</p> <p>1) $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx$;</p> <p>2) $\int_{-\pi}^0 x \cdot \cos x dx$.</p>
<p>10.</p> <p>1) $\int_2^{10} \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$;</p> <p>2) $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x dx$.</p>	<p>11.</p> <p>1) $\int_0^5 x \sqrt{x+4} dx$;</p> <p>2) $\int_0^1 \ln(x+5) dx$.</p>	<p>12.</p> <p>1) $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$;</p> <p>2) $\int_0^1 x e^{-x} dx$.</p>
<p>13.</p> <p>1) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$;</p> <p>2) $\int_0^3 \ln(x+3) dx$.</p>	<p>14.</p> <p>1) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$;</p> <p>2) $\int_1^e \ln x dx$.</p>	<p>15.</p> <p>1) $\int_0^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$;</p> <p>2) $\int_1^2 x \ln(x+1) dx$.</p>

16. 1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$; 2) $\int_0^{1/2} \arcsin x dx$.	17. 1) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$; 2) $\int_1^2 x \cdot \log_2 x dx$.	18. 1) $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx$; 2) $\int_0^{\sqrt{3}} \arctg x dx$.
19. 1) $\int_0^5 \frac{x+1}{\sqrt{3x+1}} dx$; 2) $\int_1^e \lg^2 x dx$.	20. 1) $\int_2^5 \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}} dx$; 2) $\int_0^{\pi} (x+2) \cos x dx$.	21. 1) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} (x-1) \sin x dx$.
22. 1) $\int_{-1}^2 \frac{x-2}{\sqrt{x+2}} dx$; 2) $\int_{-1}^1 x^2 \cdot e^{-x} dx$.	23. 1) $\int_2^7 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$; 2) $\int_0^{\pi} (x+3) \cos 2x dx$.	24. 1) $\int_1^6 \frac{3x-1}{\sqrt{x+3}} dx$; 2) $\int_0^1 \arcsin x dx$.
25. 1) $\int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}}$; 2) $\int_0^{\pi/2} (x+1) \cdot \sin 2x dx$	26. 1) $\int_0^4 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x+1}}$; 2) $\int_0^{e^2} x^3 \ln x dx$.	27. 1) $\int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} (2x+1) \sin x dx$.
28. 1) $\int_0^1 \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$; 2) $\int_1^e x^2 \cdot \ln x dx$.	29. 1) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$; 2) $\int_0^{\pi} (x+1) \cos 3x dx$.	30. 1) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1+\ln x}}$; 2) $\int_1^{e^2} x^4 \ln x dx$.

ЗАДАНИЕ 2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1.	1) $y = 6x - x^2, y = 0;$	2) $y^2 = x^3, x = 0, y = 4.$
2.	1) $y = x^2 + 4x, x - y + 4 = 0.$	2) $xy = 6, y = 7 - x.$
3.	1) $y = x^3, y = x;$	2) $y = x^2 - 6x + 10, y = x.$
4.	1) $y = x^3, y = 2x;$	2) $x^2 = 9y, x = 3y - 6.$
5.	1) $y^2 = 4x, y = x;$	2) $y = 2 - x^2, y^3 = x^2.$
6.	1) $y^2 = 4x, y = (1/4)x^2;$	2) $x = 2 - y - y^2, x = 0.$
7.	1) $3y = x^2, 3x = y^2;$	2) $y = 6x - x^2 - 5, y = 0.$
8.	1) $y = x^2 - 3x, y = 4 - 3x;$	2) $y = x^2 - 5x + 6, x = 0, y = 0.$
9.	1) $y = 2x - x^2, y = x;$	2) $y^2 = x^3, x = 0, y = 1.$
10.	1) $y = 0,5x^2, y = 4 - x;$	2) $y^3 = x^2, y = 1.$
11.	1) $x = y^2, x = \frac{3}{4}y^2 + 1;$	2) $y = \ln x, x = e, y = 0.$
12.	1) $y = x^2, 2x - y + 3 = 0;$	2) $xy = 6, x = 1, x = e, y = 0.$
13.	1) $y = 4 - x^2, y = 0;$	2) $y^2 = 9x, y = 3x.$
14.	1) $y = 0,5x^2, x + 2y - 6 = 0;$	2) $y = x^2, y^2 = x.$
15.	1) $4x = y^2, 4y = x^2;$	2) $y = -0,5x^2 + 3, y = 1.$
16.	1) $y = x^2, y = x + 2;$	2) $x = 8y - y^2 - 7, x = 0.$
17.	1) $y = x^2 - 8x, y = 0;$	2) $y = x^3, x + y = 2.$
18.	1) $y = x^2 - 6x, y = -x;$	2) $xy = 4, y = 3 - x.$
19.	1) $y = x^2, y = -x^2, x = 1;$	2) $y = 4 - x^2, y = 0.$
20.	1) $y^2 = x + 1, x = 0;$	2) $y = x^2, x + y = 2.$
21.	1) $y = x^3, x + y = 2, y = 0;$	2) $y = x^2 - 4x + 3, y = 0.$
22.	1) $xy = 6, y = 1 - x;$	2) $x = y^3, y = 0, x = 1.$
23.	1) $y = x^2, x + y = 2, y = 0;$	2) $y = (x + 1)^2, x = 0, y = 0.$
24.	1) $y = (x - 1)^2, x = 0, y = 0;$	2) $y = -x^2 + 2x + 3, y = 0.$

25. 1) $y = 9x - y^2, 9y = x^2;$	2) $y = (x - 1)^2, x + y = 1.$
26. 1) $y = 2x - x^2, y = x;$	2) $y = -x^3, y = -x.$
27. 1) $y = 2x - x^2, x + y = 2, x = 0;$	2) $y = x^2 - 4x, y = x - 4.$
28. 1) $y = y^2 - 2y, y = 2 + x;$	2) $y = 2x - x^2, x + y = 2.$
29. 1) $y = x^3, y = x;$	2) $y = -x^2 - 2x, y = -x.$
30. 1) $y = -x^2 - 2x, y = 2 + x;$	2) $xy = 2, x = 1, y = 1.$

ЗАДАНИЕ 3. Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями:

1. 1) $x y = 5, y = 0, x = 1, x = 5;$	2) $y^2 = x^3, x = 1, y = 0.$
2. 1) $y = 9 - x^2, y = 0;$	2) $2x + 3y - 6 = 0, x = 0, y = 0.$
3. 1) $y = 2x - x^2, y = 0;$	2) $x y = 2, x = 2, x = 4, y = 0.$
4. 1) $y = \sqrt{5 - x}, x = -5, y = 0;$	2) $y = x^2, 2x - y + 3 = 0.$
5. 1) $y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0;$	2) $y = x^2 - 9, y = 0.$
6. 1) $y = \ln x, y = 0, x = 1, x = 2;$	2) $y = 4x - x^2, y = 0.$
7. 1) $y = -x^2 + 8, y = x^2;$	2) $x y = 4, x = 1, x = 4, y = 0.$
8. 1) $2y^2 = x^3, x = 4;$	2) $y = e^x, x = 0, y = 0, x = 1.$
9. 1) $y^2 = 2x, x = 3, y = 0;$	2) $y^2 = x^3, y = 0, x = 1.$
10. 1) $y^2 = 2x, 2x = 3;$	2) $y = 8x - x^2, y = 0.$
11. 1) $y^2 = 9x, y = 3x;$	2) $x y = 1, x = 1, x = 5, y = 0.$
12. 1) $y = \sin x, x = 0, x = \pi, y = 0;$	2) $y^2 = 4x, x = 4, y = 0.$
13. 1) $y = x^2 + 1, y = 0, x = -2, x = 2;$	2) $x y = 2, y = 0, x = 1, x = 2.$
14. 1) $x y = 4, 2x + y - 6 = 0;$	2) $y^2 = 2x, x^2 = 2y.$
15. 1) $y = 3x - x^2, y = 0;$	2) $x y = 1, y = 0, x = 1, x = 3.$
16. 1) $y = e^{2x}, y = 0, x = 0, x = 1;$	2) $5x + 3y - 15 = 0, y = 0, x = 0.$
17. 1) $x y = 2, y = 0, x = 1, x = 2;$	2) $y = (x - 2)^2, x = 0, y = 0.$

18. 1) $y = 4 - x^2, y = 0;$	2) $y = (x + 1)^2, x = 0, y = 0.$
19. 1) $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0;$	2) $x = y^2, x = 2.$
20. 1) $y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \pi/2;$	2) $y = 2x^3, y = 0, x = 2.$
21. 1) $y = 2e^x, y = 0, x = 0, x = 1;$	2) $y = (x - 1)^2, x = 0, y = 0.$
22. 1) $y = 2x - x^2, y = 0;$	2) $y = e^{3x}, y = 0, x = 0, x = 1.$
23. 1) $y = x^2, y = 0, x = 1;$	2) $y = -5x^2 + 4x + 1, y = 0.$
24. 1) $y = x^3, y = 0, x = 1;$	2) $xy = 3, y = 0, x = 1, x = 2.$
25. 1) $y = \sin x, y = 0, x = \pi/2, x = \pi;$	2) $y = x^2, y = x.$
26. 1) $y^2 = x, x = y;$	2) $y = -2x^2 - x + 1, y = 0.$
27. 1) $y = x^2, y = -x;$	2) $y = \sqrt{x - 2}, y = 0, x = 6.$
28. 1) $y = e^{2x}, x = 0, y = 0, x = 2;$	2) $y = 3x - x^2, y = 0.$
29. 1) $y = x^2 - 4, y = 0;$	2) $y = \sqrt{x - 1}, y = 0, x = 3.$
30. 1) $y = \ln x, y = 0, x = 3;$	2) $x + 2y = 2, x = 0, y = 0.$

**Образец выполнения контрольной работы № 9
“ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ”**

1) Вычислить интегралы.

а) $I = \int_2^{28} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 + 4}}$. Чтобы избавиться от кубического корня, заменим

$t^3 = x - 1$, тогда $t = \sqrt[3]{x - 1}$, $t^2 = \sqrt[3]{(x - 1)^2}$, $3t^2 dt = dx$, заменим пределы интегрирования $x = 2 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2 - 1} = 1$, $x = 28 \Rightarrow t = \sqrt[3]{28 - 1} = 3$.

После подстановок получим

$$\int_1^3 \frac{t^2 \cdot 3t^2 dt}{t^2 + 4} = 3 \int_1^3 \frac{t^4 dt}{t^2 + 4}.$$

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Делим столбиком.

$$\begin{array}{l} \frac{-t^4}{t^4 + 4t^2} \Big| \frac{t^2 + 4}{t^2 - 4} \\ - -4t^2 \\ \frac{-4t^2 - 16}{16} \end{array} \Rightarrow \frac{t^4}{t^2 + 4} = t^2 - 4 + \frac{16}{t^2 + 4}.$$

$$\begin{aligned} I &= 3 \int_1^3 \left(t^2 - 4 + \frac{16}{t^2 + 4} \right) dt = 3 \left(\frac{t^3}{3} - 4t + 16 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right) \Big|_1^3 = \\ &= 3 \left[\left(\frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3 + 8 \operatorname{arctg} \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 4 \cdot 1 + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= 3 \left[9 - 12 + 8 \operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 - 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right] = 3 \left[\frac{2}{3} + 8 \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= 2 + 24 \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \approx 2 + 24(0,983 - 0,464) = 14,46. \end{aligned}$$

Ответ: $I = 2 + 24 \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right).$

б). Интеграл $I = \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x \, dx$ находим по частям с помощью подстановок:

$$u = x, \quad du = dx, \quad dv = \cos x \, dx, \quad v = \int dv = \int \cos x \, dx = \sin x.$$

После преобразований получим

$$x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} - 0 \cdot \sin 0 \right) -$$

$$- \left(-\cos x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Ответ: $I = \frac{\pi - 2}{2}.$

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 5x + 6$ и прямой $y = x + 1$.

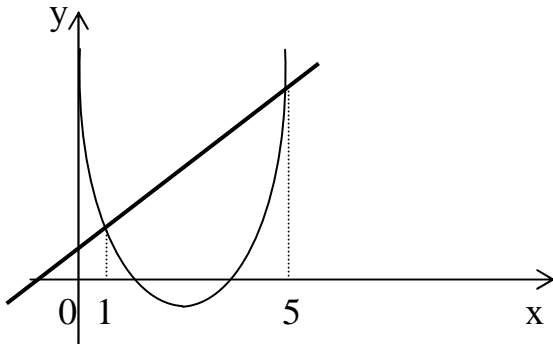


Рисунок 8

Найдем точки пересечения графиков этих линий (рис. 8):

$$x^2 - 5x + 6 = x + 1, \quad x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2},$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5.$$

Так как $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$, то

площадь данной фигуры

$$S = \int_1^5 [(x+1) - (x^2 - 5x + 6)] dx = \int_1^5 (6x - 5 - x^2) dx = \left(6 \frac{x^2}{2} - 5x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^5 =$$

$$= \left(6 \cdot \frac{5^2}{2} - 5 \cdot 5 - \frac{5^3}{3} \right) - \left(6 \cdot \frac{1^2}{2} - 5 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} \right) = \left(75 - 25 - \frac{125}{3} \right) - \left(3 - 5 - \frac{1}{3} \right) =$$

$$= 50 - \frac{125}{3} + 2 + \frac{1}{3} = 52 - \frac{124}{3} = \frac{156 - 124}{3} = \frac{32}{3} = 10 \frac{2}{3}.$$

Ответ: $S = \frac{32}{3}$ кв.ед.

3) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2x$; $y = 3 - x^2$, $x = 0$ ($x \geq 0$).

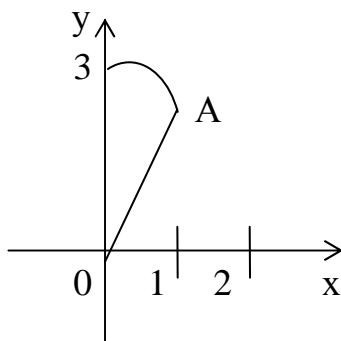


Рисунок 9

Найдем точки пересечения параболы $y = 3 - x^2$ и прямой $y = 2x$ (рис. 9).

$$2x = 3 - x^2,$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2},$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1.$$

Выбираем, как дано, x больше нуля, значит, $x = 1$. Так как объем тела

вращения $V = \pi \int_a^b y^2 dx$, а в данном случае $V = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx$, объем

$$V = \pi \int_0^1 \left[(3-x^2)^2 - (2x)^2 \right] dx = \pi \int_0^1 (9 - 6x^2 + x^4 - 4x^2) dx = \pi \int_0^1 (9 - 10x^2 + x^4) dx =$$

$$= \pi \left[9x - 10 \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right] \Big|_0^1 = \pi \left(9 - \frac{10}{3} + \frac{1}{5} \right) = \pi \frac{135 - 50 + 3}{15} = \pi \frac{88}{15} \approx 18,43.$$

Ответ: $V \approx 18,43$ куб.ед.

Контрольная работа № 10 “ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ”

ЗАДАНИЕ. Решить дифференциальные уравнения:

<p>1. 1) $4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2x y^2 dx$;</p> <p>3) $y' - \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 1$;</p> <p>5) $y y'' - (y')^2 = 0$;</p> <p>7) $y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x)$.</p>	<p>2) $x \sqrt{1+y^2} + y y' \sqrt{1+x^2} = 0$;</p> <p>4) $y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$;</p> <p>6) $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17$;</p>
<p>2. 1) $\sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$;</p> <p>3) $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \cos^2 x$;</p> <p>5) $y y'' + (y')^2 + 1 = 0$;</p> <p>7) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \cdot \sin 6x$.</p>	<p>2) $x \sqrt{3+y^2} dx + y \sqrt{2+x^2} dy = 0$;</p> <p>4) $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$;</p> <p>6) $y'' - 3y' = x^2, y(0) = 1, y'(0) = -\frac{2}{7}$;</p>
<p>3. 1) $\sqrt{3+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$;</p> <p>3) $y' - \frac{1}{x+1} \cdot y = e^x (x+1)$;</p> <p>5) $x y'' - y' = 0$;</p> <p>7) $y'' + 2y' = -2e^x (\sin x + \cos x)$.</p>	<p>2) $6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3x y^2 dx$;</p> <p>4) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x, y(\pi) = 2\pi$;</p> <p>6) $y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}$;</p>
<p>4. 1) $(e^{2x} + 5) dy + y e^{2x} dx = 0$;</p>	<p>2) $y' y \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$;</p>

<p>3) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$;</p> <p>5) $3y \cdot y'' + (y')^2 = 0$;</p> <p>7) $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.</p>	<p>4) $y' + \frac{y}{2x} = x^2$, $y(1) = \frac{2}{7}$;</p> <p>6) $y'' - 6y' - 7y = 32e^{3x}$;</p>
<p>5. 1) $6x dx - 6y dy = 3x^2 y dy - 2x y^2 dx$;</p> <p>3) $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = 2$;</p> <p>5) $y y'' + (y')^2 = 0$;</p> <p>7) $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.</p>	<p>2) $x \sqrt{5+y^2} dx + y \sqrt{4+x^2} dy = 0$;</p> <p>4) $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot e^x$;</p> <p>6) $y'' - 2y' = 6x^2 - 10x + 12$;</p>
<p>6. 1) $y(4+e^x) dy - e^x dx = 0$;</p> <p>3) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$, $y(1) = 5$;</p> <p>5) $2y y'' = 1 + (y')^2$;</p> <p>7) $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$.</p>	<p>2) $\sqrt{4-x^2} \cdot y' + x y^2 + x = 0$;</p> <p>4) $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$;</p> <p>6) $y'' - 4y' + 3y = x - 1$;</p>
<p>7. 1) $2x dx - 2y dy = x^2 y dy - 2x y^2 dx$;</p> <p>3) $y' + \frac{2}{x} y = x^3$;</p> <p>5) $y'' x \ln x = y'$;</p> <p>7) $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$.</p>	<p>2) $x \sqrt{4+y^2} dx + y \sqrt{1+x^2} dy = 0$;</p> <p>4) $y' - \frac{2}{x+1} y = e^x(x+1)^2$, $y(0) = 2$;</p> <p>6) $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$;</p>
<p>8. 1) $(e^x + 8) dy - y e^x dx = 0$;</p> <p>3) $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 3$;</p> <p>5) $y y'' + 2(y')^2 = 0$;</p> <p>7) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdot \sin 3x$.</p>	<p>2) $6x dx - y dy = y x^2 dy - 3x y^2 dx$;</p> <p>4) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$;</p> <p>6) $y'' - 2y' + y = e^x$;</p>
<p>9. 1) $y \ln y + x y' = 0$;</p> <p>3) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 2$;</p> <p>5) $2x y'' = y'$;</p> <p>7) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cdot \cos 4x$.</p>	<p>2) $\sqrt{1-x^2} \cdot y' + x y^2 + x = 0$;</p> <p>4) $y' + 2x y = x \cdot e^{-x^2} \cdot \sin x$;</p> <p>6) $y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}$;</p>

10. 1) $(1+e^x)y' = ye^x$; 3) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$; 5) $2(y')^2 = y''(y-1)$; 7) $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.	2) $6x dx - 2y dy = 2y x^2 dy - 3x y^2 dx$; 4) $y' + y = \frac{1}{e^x}$, $y(0) = 1$; 6) $y'' + 4y' - 5y = x$;
11. 1) $y(1 + \ln y) + xy' = 0$; 3) $y' + \frac{y}{x} = x^2$; 5) $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$; 7) $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.	2) $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2} \cdot y \cdot y' = 0$; 4) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 2$; 6) $2y'' + y' - y = 2e^x$;
12. 1) $(3+e^x)y y' = e^x$; 3) $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}$, $y(0) = 4$; 5) $2y y'' = (y')^2$; 7) $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$.	2) $x dx - y dy = y x^2 dy - x y^2 dx$; 4) $x y' - y = x^3$; 6) $y'' - 3y' + 2y = e^x$;
13. 1) $\sqrt{5+y^2} dx + 4(x^2 y + y) dy = 0$; 3) $y' + \frac{x}{1-x^2} \cdot y = 1$; 5) $x y'' - y' = 0$; 7) $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$.	2) $(1+e^x)y y' = e^x$; 4) $y' - \frac{y}{x} = 2$, $y(1) = -1$; 6) $y'' - 2y' + 2y = 6e^{2x}$;
14. 1) $3(x^2 y + y) dy + \sqrt{2+y^2} dx = 0$; 3) $y' - 4y = e^{2x}$; 5) $y'' + 2y(y')^3 = 0$; 7) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdot \sin 5x$.	2) $2x dx - y dy = y x^2 dy - x y^2 dx$; 4) $y' - \frac{xy}{x^2+1} = x$, $y(0) = 1$; 6) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$;
15. 1) $\sqrt{5+y^2} + y' \cdot y \sqrt{1-x^2} = 0$; 3) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = -2$; 5) $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$; 	2) $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2} \cdot y' = 0$; 4) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x + 1}{x}$; 6) $y'' - y' - 2y = e^{2x}$;

7) $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$.	
16. 1) $(x y^2 + y^2) dx + (x^2 - x^2 y) dy = 0$; 2) $x^2 y' + y = 0$;	
3) $y' + 2y = 4x$;	4) $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = -3$;
5) $y'' \cdot \operatorname{tg} y = 2(y')^2$;	6) $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$;
7) $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$.	
17. 1) $3e^x \operatorname{tgy} + \frac{2 - e^x}{\cos^2 y} y' = 0$;	
2) $6x dx + 5y dy = 5x^2 y dy - 3xy^2 dx$;	
3) $y' + xy = (1 + x)e^x$, $y(0) = 1$;	4) $y' - \frac{y}{x} = 2\ln x$;
5) $xy'' = (1 + 2x^2)y'$;	6) $y'' + 3y' + 2y = 1 - x^2$;
7) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x$.	
18. 1) $(1 + y^2) + xy \cdot y' = 0$;	
2) $\sqrt{2 + y^3} dx - y dy = x^2 y^2 dy$;	
3) $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{4x}$, $y(0) = 1$;	4) $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{3x}$;
5) $y'' = \sqrt{1 - (y')^2}$;	6) $y'' - y = x^2 + x$;
7) $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$.	
19. 1) $(1 + y^2) = xy'$;	
2) $8x dx - 6y^2 dy = 3x^2 y^2 dy - 2xy^3 dx$;	
3) $y' + \frac{1}{2} y \cos x = \cos x$, $y(0) = 1$;	4) $y' + \frac{2}{3} xy = e^{-2x^2}(4x + x^2)$;
5) $y'' = \sqrt{1 + y'}$;	6) $y'' + 2y' + y = x^2 + x - 1$;
7) $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$.	
20. 1) $y \ln y + xy' = 0$;	
2) $\sqrt{1 + y^2} x dx + y dy = x^3 y dy$;	
3) $y' - \frac{y}{x} = 2x$, $y(0) = \frac{1}{2}$;	4) $y' - 3\frac{y}{x} = 5x^2 + 3$;
5) $y'' = (y')^2$;	6) $y'' + y' = 5x^2 - 1$;
7) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x$.	
21. 1) $e^y(1 + x^2)y' - 2x(7 + e^y) = 0$;	
2) $9x dx - 9y^3 dy = 3x^2 y^3 dy - 3xy^4 dx$;	

<p>3) $y' + 5\frac{y}{x} = 7x - 6, \quad y(1)=1;$</p> <p>5) $yy'' + (y')^2 = 0;$</p> <p>7) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x.$</p>	<p>4) $y' - 3\frac{y}{x} = 10x + 6;$</p> <p>6) $y'' - y' = 3x^2 - 2x + 1;$</p>
<p>22. 1) $2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2);$</p> <p>3) $y' + 4x^3y = 4x^3, \quad y(0)=2;$</p> <p>5) $yy'' = y' + (y')^2;$</p> <p>7) $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x.$</p>	<p>2) $(e^{3x} + 2)dy - 2ye^{3x}dx = 0;$</p> <p>4) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x};$</p> <p>6) $y'' - 13y' + 12y = x - 1;$</p>
<p>23. 1) $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x})\cos y \cdot y' = 0;$</p> <p>3) $y' + x^3y = (x^3 + 2)e^{2x}, \quad y(0)=1;$</p> <p>5) $y''y^3 = 1;$</p> <p>7) $y'' + 2y' + 5y = -\cos x.$</p>	<p>2) $3xdx + 6y^2dy = 2x^2y^2dy - 3xy^3dx;$</p> <p>4) $y' - 3\frac{y}{x} = -(5x^2 + 3);$</p> <p>6) $y'' - y' = 6x + 5;$</p>
<p>24. 1) $y' \sin x = y \cos x;$</p> <p>3) $y' + y = \frac{x^2}{2}, \quad y(0)=2;$</p> <p>5) $(y'')^2 = y';$</p> <p>7) $y'' - 4y' + 8y = e^x(2\sin x - \cos x).$</p>	<p>2) $x^2\sqrt{2-y^3}dx + 3y^3\sqrt{1+x^3}dy = 0;$</p> <p>4) $y' + xy = (x+1)e^x;$</p> <p>6) $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 + 2x - 5;$</p>
<p>25. 1) $y \ln y - (x+3)y' = 0;$</p> <p>3) $y' - 3\cos x \cdot y = (2 + 3\cos x)e^{2x}, \quad y(0)=1;$</p> <p>5) $y'' = 2yy';$</p> <p>7) $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x).$</p>	<p>2) $x^5dx - ydy = yx^6dy + 3x^5y^2dx;$</p> <p>4) $y' - 2xy = x;$</p> <p>6) $y'' - y' = 2x + 3;$</p>
<p>26. 1) $(1 + y^2) + 2xy' = 0;$</p> <p>3) $y' - y \operatorname{tg} x = -2\sin x, \quad y(0)=1;$</p> <p>5) $2xy'' = y';$</p> <p>7) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 4x.$</p>	<p>2) $4x^3dx - 2ydy = 2yx^4dy + 3x^3y^2dx;$</p> <p>4) $y' + \frac{y}{x} = 1;$</p> <p>6) $y'' - y' = 6x^2 + 3x;$</p>

27. 1) $y' \sin x = y \ln y$; 3) $y' + 2xy = 2x$, $y(0) = 1$; 5) $\operatorname{tg} x \cdot y'' = y'$; 7) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x$.	2) $\sqrt{6 - y^8} - \sqrt{1 - x^2} y^7 y' = 0$; 4) $y' - 2xy = e^{x^2}$; 6) $y'' + 2y' + y = 4x^2$;
28. 1) $y' = \frac{1 + y^2}{5 + x^2}$; 3) $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \cos x$, $y(0) = 1$; 5) $y'' \cdot \operatorname{tg} x = y' + 1$; 7) $y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x$.	2) $x^3 dx - y^2 dy = x^4 y^2 dy + x^3 y^3 dx$; 4) $y' - y \cos x = -\cos x$; 6) $y'' + 4y' + 4y = x - x^2$;
29. 1) $\sin y \cdot \cos x \cdot y' = \cos y \cdot \sin x$; 3) $y' + \frac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 1$; 5) $y'' \cdot \operatorname{tg} 5x = 5y'$; 7) $y'' + y = 2 \cos 4x + 3 \sin 4x$.	2) $2\sqrt{9 + y^5} dx + 3(x^2 y^4 + y^4) dy = 0$; 4) $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{1}{x-1}$; 6) $y'' + 3y' + 2y = 3x^2 + 2x$;
30. 1) $y' \sqrt{1 + x^2} = \sqrt{4 + y^2}$; 3) $y' + 2y \cdot \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$; 5) $y''(4x + 1)^7 = 24$; 7) $y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2 \cos x)$.	2) $(e^{-x} + 5) dy + y e^{-x} dx = 0$; 4) $y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x$; 6) $y'' - y' = 4x^2 - 3x + 2$;

Образец выполнения контрольной работы № 10 “ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ”

Решить дифференциальные уравнения:

1) $2x\sqrt{y^2 - 2} dx - x^2 y dy = 3y dy$.

Переносим второе слагаемое в правую часть и выносим $y dy$ за скобку:
 $2x\sqrt{y^2 - 2} dx = y(3 + x^2) dy$. Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Делим обе части уравнения на множители, «лишние» при дифференциалах. При dx «лишним», т. е. не зависящим от x , является $\sqrt{y^2 - 2}$, а при dy «лишним» будет $(3 + x^2)$.

$$\frac{2x\sqrt{y^2-2} dx}{\sqrt{y^2-2}(3+x^2)} = \frac{y(3+x^2)dy}{\sqrt{y^2-2}(3+x^2)} \Rightarrow \frac{2x dx}{3+x^2} = \frac{y dy}{\sqrt{y^2-2}}.$$

Теперь можно интегрировать обе дроби, так как левая часть зависит только от x , а правая зависит только от y :

$$\int \frac{2x dx}{3+x^2} = \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2-2}}.$$

Находим интегралы по отдельности.

$$\int \frac{2x dx}{3+x^2}. \text{ Делая подстановку } t = 3+x^2, \quad dt = 2x dx, \text{ получим}$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + \ln c = \ln tc = \ln c(3+x^2).$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{y^2-2}}. \text{ Делая подстановку } t = y^2-2, \quad dt = 2y dy, \quad \frac{dt}{2} = y dy, \text{ получим}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{y^2-2}.$$

$$\text{Подставляем найденные интегралы в } \int \frac{2x dx}{3+x^2} = \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2-2}} \text{ и получаем}$$

$$\ln c(x^2+3) = \sqrt{y^2-2}.$$

Получили общий интеграл данного дифференциального уравнения. Можно его записать по-другому: $\ln(3+x^2) + c_1 = \sqrt{y^2-2} \Rightarrow \sqrt{y^2-2} - \ln(3+x^2) = c$.

Ответ: $\sqrt{y^2-2} = \ln c(x^2+3)$.

$$2) \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x e^x}, \quad y(1) = 0.$$

Так как y и y' присутствуют в дифференциальном уравнении только в первых степенях, то это линейное ДУ. Так как даны начальные условия, после нахождения общего решения ДУ следует найти частное решение, удовлетворяющее этому начальному условию, т. е. решить так называемую задачу Коши.

Находим общее решение ДУ методом Бернулли, т. е. в виде $y = u \cdot v \Rightarrow \Rightarrow y' = u' v + v' u$. Подставляем в исходное уравнение: $u' v + v' u + \frac{u v}{x} = \frac{1}{x e^x}$.

Группируем первое и третье слагаемые и выносим за скобки v , получаем

$$v \left(u' + \frac{u}{x} \right) + v' u = \frac{1}{x e^x}.$$

Находим такую функцию $u = u(x)$, чтобы скобка была равна нулю.

$u' + \frac{u}{x} = 0$ – это ДУ с разделяющимися переменными. Заменяем $u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$, $du = -\frac{u}{x} dx$. Здесь «лишний» множитель u при dx , делим на

него обе части уравнения $\frac{du}{u} = -\frac{u}{u} \cdot \frac{dx}{x}$, $\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$, $\ln u = -\ln x \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln u = \ln x^{-1} \Rightarrow u = \frac{1}{x}$.

Нашли функцию u , при которой выражение в скобках равно нулю. Подставляем найденное u в $v \left(u' + \frac{u}{x} \right) + v' u = \frac{1}{x e^x}$, получаем

$v \cdot 0 + v' \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x e^x} \Rightarrow \Rightarrow \frac{v'}{x} = \frac{1}{x e^x}$. Умножаем обе части уравнения на x и полу-

чаем $v' = e^{-x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^{-x} \Rightarrow \Rightarrow dv = e^{-x} dx$. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int dv = \int e^{-x} dx, \quad v = -e^{-x} + c.$$

Получили общее решение ДУ: $y = u \cdot v = \frac{1}{x} \cdot (c - e^{-x})$;

$y = \frac{c}{x} - \frac{1}{x e^x}$ – общее решение.

Замечание. Здесь первое слагаемое $\frac{c}{x}$ является общим решением линейного однородного уравнения $y' + \frac{y}{x} = 0$, а второе слагаемое $\left(-\frac{1}{x e^x} \right)$ является част-

ным решением исходного линейного неоднородного уравнения $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x e^x}$.

Сделаем проверку общего решения линейного однородного дифференциального уравнения y_0 . $y_0 = \frac{c}{x} \Rightarrow y_0' = c(x^{-1})' = -\frac{c}{x^2}$. Подставляем в $y' + \frac{y}{x} = 0$,

получаем $-\frac{c}{x^2} + \frac{c}{x \cdot x} = 0$, т. е. верное равенство $\Rightarrow y_0 = \frac{c}{x}$ – общее решение ли-

нейного однородного (с нулевой правой частью) дифференциального уравнения. Теперь сделаем проверку частного решения

$$\tilde{y} = -\frac{1}{x e^x} = -x^{-1} e^{-x}, \quad \tilde{y}' = -(x^{-1} e^{-x})' = -\left(-\frac{1}{x^2} e^{-x} - \frac{1}{x} e^{-x}\right) = \frac{1}{x^2 e^x} + \frac{1}{x e^x}.$$

Подставляем в исходное ДУ $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x e^x}$:

$$\frac{1}{x^2 e^x} + \frac{1}{x e^x} + \left(-\frac{1}{x e^x}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x e^x}, \quad \frac{1}{x^2 e^x} + \frac{1}{x e^x} - \frac{1}{x^2 e^x} = \frac{1}{x e^x}.$$

Получили верное равенство, т. е. именно такая функция $y = -\frac{1}{x e^x}$ при прохождении через данное дифференциальное уравнение дала правую часть $\frac{1}{x e^x}$, что и доказывает, что найденное \tilde{y} является частным решением исходного дифференциального уравнения.

Теперь приступим к решению задачи Коши. Подставим данное начальное условие в полученное общее решение: $y = \frac{c}{x} - \frac{1}{x e^x}$, $y(1) = 0$, $0 = \frac{c}{1} - \frac{1}{1 \cdot e^1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = c - \frac{1}{e} \Rightarrow c = \frac{1}{e}$. Найденное c подставляем в общее решение:

$y = \frac{1}{x e} - \frac{1}{x e^x}$ – решение задачи Коши. Можно его записать по-другому

$$y = \frac{1}{x} (e^{-1} - e^{-x}).$$

Ответ: $y = \frac{1}{x} (e^{-1} - e^{-x})$.

3) Решить ДУ, допускающие понижение порядка.

а) $x y''' + y'' = 1$. Это ДУ третьего порядка. В этом уравнении отсутствуют неизвестная функция $y = y(x)$ и ее первая производная y' . Понижаем порядок дифференциального уравнения заменой $y'' = z$, тогда $y''' = z'$. Исходное уравнение теперь запишется как $x z' + z = 1 \Rightarrow x z' = 1 - z$ – дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными.

$x \frac{dz}{dx} = 1 - z$ – умножаем обе части уравнения на dx . Получаем $x dz = (1 - z) dx$.

Теперь обе части уравнения делим на $x(1 - z)$. Отсюда следует

$$\frac{dz}{1-z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{1-z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\ln|z-1| + \ln c_1 = \ln|x|, \quad \ln \frac{c_1}{z-1} = \ln|x| \Rightarrow \frac{c_1}{z-1} = x \Rightarrow z = \frac{c_1}{x} + 1.$$

Подставляем $z = y''$, получаем $y'' = \frac{c_1}{x} + 1$. Так как $y' = \int y'' dx$, производная

$$y' = \int \left(\frac{c_1}{x} + 1 \right) dx = c_1 \ln|x| + x + c_2.$$

Так как $y = \int y' dx$, $y = \int (c_1 \ln|x| + x + c_2) dx$. Найдем интеграл с помощью формулы интегрирования по частям: $\int u dv = u v - \int v du$: $\int \ln|x| dx$. Делая подстановку: $u = \ln|x|$, $du = \frac{dx}{x}$, $dv = dx$, $v = x$, получаем

$$x \ln|x| - \int x \frac{dx}{x} = x \ln|x| - \int dx = x \ln|x| - x.$$

$$y = c_1 \int \ln|x| dx + \int x dx + c_2 \int dx = c_1 (x \ln|x| - x) + 0,5x^2 + c_2 x + c_3 =$$

$$= c_1 x \ln|x| + 0,5x^2 - c_1 x + c_2 x + c_3 = c_1 x \ln|x| + 0,5x^2 + (c_2 - c_1) x + c_3$$

Обозначим $(c_2 - c_1)$ другой константой, пусть это будет c_2 , тогда

$$y = c_1 x \ln|x| + 0,5x^2 + c_2 x + c_3.$$

Ответ: $y = c_1 x \ln|x| + 0,5x^2 + c_2 x + c_3.$

Замечание. Так как исходное уравнение было 3-го порядка, то и найденная функция содержит три произвольные константы c_1, c_2, c_3 .

б) $y'' = 18y^3$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 3$.

В этом уравнении отсутствует аргумент x в явном виде, поэтому новым аргументом будем считать y , а новой неизвестной функцией будем считать $p = y'$, причем $p = p(y)$, а $y = y(x)$, т.е. $p \rightarrow y \rightarrow x$. Найдем

$$y'' = (y')'_x = (p)'_x = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p. \text{ Подставляем в исходное уравнение}$$

$p' \cdot p = 18y^3$. Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = 18y^3 \cdot dy \Rightarrow \int p \cdot dp = 18 \int y^3 dy \cdot 2,$$

$$\int 2p \, dy = 9 \int 4y^3 dy,$$

$$p^2 = 9y^4 + c_1.$$

Целесообразно здесь подставить начальные данные и найти c_1 . Учитывая $p = y'$, т. е. $p(1) = 3$, $y(-1) = 1$. Получаем $3^2 = 9 \cdot 1 + c_1 \Rightarrow 9 = 9 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$, т. е. $p^2 = 9y^4 \Rightarrow p = \pm 3y^2$, выбираем \oplus , т. к. при $x = -1$, $p = y' = 3 > 0$, $\Rightarrow p = 3y^2$, т. е. $y' = 3y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3y^2 \cdot dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = 3 \int dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = 3x + c_2$.

Опять подставляем начальные данные:

$$-\frac{1}{1} = 3(-1) + c_2 \Rightarrow -1 = -3 + c_2 \Rightarrow c_2 = 2. \text{ Подставляем } c_2 \text{ в общее решение и}$$

получаем частное решение $-\frac{1}{y} = 3x + 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{3x + 2}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{3x + 2}$ - решение задачи Коши.

4) Решить линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: а) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4x + 1$.

Так как общее решение линейного дифференциального уравнения имеет вид $y = y_0 + \tilde{y}$, то находим его в два этапа.

В начале решается уравнение с нулевой правой частью:

$$I. \quad y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Пишем характеристическое уравнение, заменяя y'' на r^2 , y' на r , вместо

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

у пишем единицу $r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2},$

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 1.$$

Запишем фундаментальные решения $y_1 = e^{r_1 x} = e^{2x}$, $y_2 = e^{r_2 x} = e^x$. Общее решение ОУ имеет вид $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$.

Теперь находим частное решение \tilde{y} исходного уравнения.

$$II. \quad y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4x + 1.$$

Находим $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$, т. к. правая часть представляет собой многочлен второго порядка. Ищем A, B, C , «прогоняя» функцию \tilde{y} через исходное диф-

дифференциальное уравнение.

$$\text{Находим } y' = (\tilde{y})' = (Ax^2 + Bx + C)' = 2Ax + B, \quad y'' = (y')' = (2Ax + B)' = 2A.$$

Подставляем все в уравнение $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4x + 1$:

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 4x + 1,$$

$$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 2x^2 - 4x + 1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x .

$$\begin{array}{l} x^2 : \\ x^1 : \\ x^0 : \end{array} \left| \begin{array}{l} 2A = 2 \Rightarrow A = 1 \\ -6A + 2B = -4 \Rightarrow -6 + 2B = -4 \Rightarrow 2B = 2 \Rightarrow B = 1 \\ 2A - 3B + 2C = 1 \Rightarrow 2 - 3 + 2C = 1 \Rightarrow 2C = 2 \Rightarrow C = 1. \end{array} \right.$$

Подставляем в $\tilde{y} \Rightarrow \tilde{y} = x^2 + x + 1$. Складываем найденные решения y_0 и \tilde{y} получаем общее решение ДУ $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + x^2 + x + 1$.

Ответ: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + x^2 + x + 1$.

б) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}(\cos x + 3\sin x)$.

$$y(x) = y_0 + \tilde{y}.$$

I. $y'' + 2y' + y = 0$,

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1 = r - \text{ кратный корень.}$$

Корень I является корнем характеристического уравнения два раза.

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = e^{rx} = e^{-x} \\ y_2 = x e^{rx} = x e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

II. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}(\cos x + 3\sin x)$

Находим $\tilde{y} = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$.

$$y' = -e^{-x}(A \cos x + B \sin x) + e^{-x}(-A \sin x + B \cos x)$$

$$y'' = e^{-x}(B \cos x - A \sin x - A \cos x - B \sin x)$$

$$\begin{aligned}
y'' &= -e^{-x} (B \cos x - A \sin x - A \cos x - B \sin x) + \\
&+ e^{-x} (-B \sin x - A \cos x + A \sin x - B \cos x) = \\
&= e^{-x} (2A \sin x - 2B \cos x).
\end{aligned}$$

Подставляем все в уравнение $y'' + 2y' + y = 2e^{-x} (\cos x + 3\sin x)$:

$$\begin{aligned}
e^{-x} (2A \sin x - 2B \cos x) + 2e^{-x} (B \cos x - A \sin x - A \cos x - B \sin x) + \\
+ e^{-x} (A \cos x + B \sin x) = 2e^{-x} (\cos x + 3\sin x) \Big| : e^{-x} \neq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2A \sin x - 2B \cos x + 2B \cos x - 2A \sin x - 2A \cos x - \\
- 2B \sin x + A \cos x + B \sin x = 2 \cos x + 6 \sin x.
\end{aligned}$$

При упрощении получаем $-A \cos x - B \sin x = 2 \cos x + 6 \sin x$.

Приравниваем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$.

$$\begin{aligned}
\cos x: & \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = 6 \end{cases} \Rightarrow A = -2 \\
\sin x: & \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = 6 \end{cases} \Rightarrow B = -6
\end{aligned}$$

Подставляем найденные A и B в $\tilde{y} = e^{-x} (A \cos x + B \sin x)$:

$$\tilde{y} = e^{-x} (-2 \cos x - 6 \sin x) = -2e^{-x} (\cos x + 3 \sin x).$$

Запишем общее решение $y = y_0 + \tilde{y}$: $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - 2e^{-x} (\cos x + 3 \sin x)$,
 $y = e^{-x} (c_1 + c_2 x - 2 \cos x - 6 \sin x)$.

Ответ: $y(x) = e^{-x} (c_1 + c_2 x - 2 \cos x - 6 \sin x)$.

в) $y'' - y' = x^2 + 1$.

$$y(x) = y_0 + \tilde{y}.$$

$$\begin{aligned}
\text{I. } & \left. \begin{aligned} y'' - y' = 0 \\ r^2 - r = 0 \\ r(r-1) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} r_1 = 0 \\ r_2 = 1 \end{aligned} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y_1 = e^{0x} = 1 \\ y_2 = e^x \end{aligned} \right\} y_0 = c_1 + c_2 e^x
\end{aligned}$$

II. $y'' - y' = (x^2 + 1) e^{0x}$ (нуль является простым корнем характеристического уравнения). Так как $e^0 = 1$, то, если в правой части отсутствует e^{ax} , это означает, что $a = 0$. Поэтому нужно множитель e^0 дописывать и проверять, является ли ноль решением характеристического уравнения. В данном случае ноль является корнем характеристического уравнения, поэтому будем искать решение в виде произведения $(A x^2 + B x + C)$ на x^1 .

$$\tilde{y} = (A x^2 + B x + C) x = A x^3 + B x^2 + C x$$

$$y' = 3A x^2 + 2B x + C$$

$$y'' = 6A x + 2B$$

Подставляем найденные производные в исходное ДУ $y'' - y' = x^2 + 1$:

$$6A x + 2B - 3A x^2 - 2B x - C = x^2 - 1.$$

Приравниваем коэффициенты при равных степенях x .

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \left| \begin{array}{l} -3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \\ 6A - 2B = 0 \Rightarrow 2B = 6A = 6\left(-\frac{1}{3}\right) = -2 \Rightarrow B = -1 \\ 2B - C = 1 \Rightarrow C = 2B - 1 = -3 \end{array} \right.$$

Получаем частное решение $\tilde{y} = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$. Сделаем проверку частного

решения: $\tilde{y} = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$, $y' = -x^2 - 2x - 3$, $y'' = -2x - 2$.

Подставляем значения y' и y'' в уравнение: $y'' - y' = x^2 + 1$,

$$-2x - 2 + x^2 + 2x + 3 = x^2 + 1$$

$$x^2 + 1 = x^2 + 1 \quad (\text{верно})$$

Записываем общее решение: $y = y_0 + \tilde{y}$, $y = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$.

Ответ: $y(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$.

Библиографический список

1. Николаева, Наталья Ивановна. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной [Текст]: конспект лекций / Н. И. Николаева. - Омск: Изд-во ОмГТУ, 2008. Ч. 2. - 2008. - 67 с. 67 с.
2. Николаева, Наталья Ивановна. Функции нескольких переменных [Текст] : конспект лекций / Н. И. Николаева ; ОмГТУ. - Омск : Изд-во ОмГТУ, 2009. Ч. 3. - 2009. - 34 с.
3. Николаева, Наталья Ивановна. Интегральное исчисление [Текст] : конспект лекций / Н. И. Николаева ; ОмГТУ. - Омск : Изд-во ОмГТУ, 2010. Ч. 4. - 2010. - 118 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 частях. Ч. 1. – М.: Айрис-Пресс, 2009. – 279 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 частях. Ч. 2. – М.: Айрис-Пресс, 2008. – 251 с.
6. Шипачев В.С. Курс высшей математики. Учебник для вузов / под ред. А. Н. Тихонова. – М.: Оникс, 2009. – 599 с.
7. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : метод. указания к практ. занятиям для студентов вечерней и заоч. форм обучения / ОмГТУ ; Сост.: Н. И. Васильева, Р. Ш. Минабудинова. - Омск : Изд-во ОмГТУ, 2004. - 55 с.
8. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл [Текст] : метод. указания к типовому расчету / ОмГТУ ; сост. И. Д. Макарова [и др.]. - Омск : Изд-во ОмГТУ, 2009. - 68 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Контрольная работа № 6 “Приложение дифференциального исчисления”..	3
Контрольная работа № 7 “Функции нескольких переменных”	13
Контрольная работа № 8 “Неопределенный интеграл”	32
Контрольная работа № 9 “Определенный интеграл и его приложения”	45
Контрольная работа № 10 “Дифференциальные уравнения”	52
Библиографический список	66

Редактор
Сводный темплан 2011 г.

ИД от

Подписано в печать Бумага офсетная. Формат .

Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 4,25.

Уч.-изд. л.

Тираж 100 экз.

Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ