Министерство образования и науки Российской Федерации
Омский государственный технический университет

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Омск 2004

Составитель Колозова Ольга Алексеевна, старший преподаватель

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения. Они состоят из теоретической части, которая содержит определения, теоремы, формулы, примеры и практической части, в которой приводятся 30 вариантов индивидуальных заданий.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

Операционное исчисление – это один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев свести решение дифференциальных и некоторых типов интегральных уравнений к решению более простых алгебраических задач.

Операционное исчисление играет важную роль при решении прикладных задач, что особенно важно для студентов технического вуза.

С помощью операционного исчисления можно также находить решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, уравнений в частных производных, уравнений в конечных разностях (разностных уравнений); производить суммирование рядов; вычислять интегралы. При этом решение этих и других задач значительно упрощается.

1. Оригиналы и их изображения

Основными понятиями операционного исчисления являются понятия функции-оригинала и функции-изображения.

Пусть $f(t)$ – действительная функция действительного переменного t (под t будем понимать время или координату).

Функция $f(t)$ называется **оригиналом,** если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

2. $f(t)$ – кусочно-непрерывная при $t \geq 0$, т. е. она непрерывна или имеет точки разрыва 1-го рода, причем на каждом конечном промежутке оси t таких точек только конечное число, причем $f(0) = f(+0)$.

3. Существуют такие числа $M > 0$ и $s \geq 0$, что для всех t выполняется неравенство $|f(t)| \leq M \cdot e^{st}$, т. е. при возрастании t функция $f(t)$ может возрастать не быстрее некоторой показательной функции. Число $s_0 = \inf s$ (точная нижняя граница таких s) называется **показателем роста** $f(t)$.

Первое условие означает, что процесс начинается с некоторого момента времени; удобнее считать, что в момент $t = 0$. Третьему условию удовлетворяют ограниченные функции $(s_0 = 0)$, степенные $t^n (n > 0)$ и многие другие.
Не являются оригиналами, например, функции вида $f(t) = ae^{t^2}$ (не выполняется условие 3), функции $f(t) = \frac{a}{t^n}$, $n > 0$ (не выполняется условие 2).

Условия 1) – 3) выполняются для большинства функций, описывающих различные физические процессы.

Замечание. Функция $f(t)$ может быть и комплексной функцией действительного переменного, т. е. иметь вид $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$; она считается оригиналом, если действительные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются оригиналами.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\delta$, определяемая интегралом

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt. \tag{1}$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют **преобразованием Лапласа.** Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде $f(t) \doteq F(p)$ или $F(p) \doteq f(t)$, а также $F(p) = L(f(t))$ (принято оригиналы обозначать малыми буквами, а их изображения – соответствующими большими буквами).

Теорема 1 (существование изображения). Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ существует в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 – показатель роста функции $f(t)$, причем функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости $(s > s_0)$.

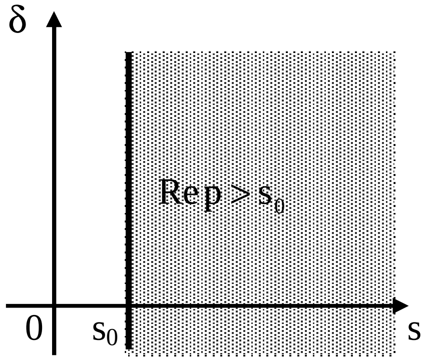

Рисунок 1

Докажем первую часть теоремы. Пусть $p = s + i\delta$ произвольная точка полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ (рис. 1). Учитывая, что $|f(t)| \le M \cdot e^{s_0 t}$, находим

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \right| \le \int_0^{\infty} \left| f(t) \cdot e^{-pt} \right| dt \le$$

$$\le M \int_0^{\infty} e^{s_0 t} \left| e^{-pt} \right| dt = = M \int_0^{\infty} e^{s_0 t} e^{-st}\, dt = M \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t}\, dt = \frac{M}{s - s_0},$$

так как $s - s_0 > 0$ и $\left| e^{-pt} \right| = \left| e^{-st} \cdot e^{-i\delta t} \right| = e^{-st} \cdot \left| \cos \delta t - i \sin \delta t \right| = e^{-st}$.

Таким образом, $$|F(p)| = \left| \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt}\, dt \right| \le \frac{M}{s - s_0}. \tag{2}$$

Отсюда вытекает абсолютная сходимость интеграла (1), т. е. изображение $F(p)$ существует и однозначно в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Следствие (необходимый признак существования изображения). Если функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, то

$$\lim_{p\to\infty} F(p)=0.$$

Это утверждение непосредственно вытекает из неравенства (2), когда $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$.

Так как $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, то $F(p)\to 0$ при $p\to\infty$ по любому направлению. Отсюда, в частности, следует, что функции $F(p)=2$, $F(p)=p^3$ не могут быть изображениями.

Отметим, что из аналитичности функции $F(p)$ следует, что все ее особые точки должны лежать левее прямой $\operatorname{Re} p = s = s_0$ или на самой этой прямой. Функция $F(p)$, не удовлетворяющая этому условию, не является изображением функции $f(t)$. Не является изображением, например, функция $F(p)=\operatorname{tg} p$ (ее особые точки расположены на всей оси s).

Теорема 2 (о единственности оригинала). Если функция $F(p)$ служит изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают друг с другом в тех точках, в которых они непрерывны.

Пример 1. Найти изображение единичной функции Хевисайда

$$1(t)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad t\ge 0,\\ 0 & \text{при} \quad t<0\end{cases}$$

(рис. 2).

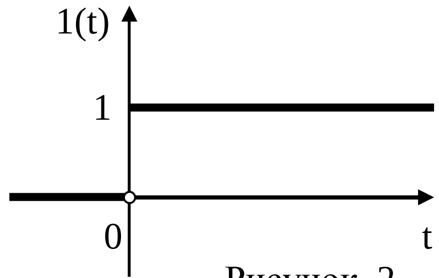

Рисунок 2

Решение. По формуле (1) при $s=\operatorname{Re} p>0$ $(s_0=0)$ находим

$$F(p)=\int_0^\infty 1\cdot e^{-pt}\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-pt}\,dt=\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{p}\cdot e^{-pt}\Big|_0^b=\frac{1}{p},$$

т. е. $F(p)=\dfrac{1}{p}$ или, в символической записи, $1(t)\doteq\dfrac{1}{p}$, или $1\doteq\dfrac{1}{p}$.

Замечание. В дальнейшем функцию-оригинал будем кратко записывать в виде $f(t)$, подразумевая, что

$$f(t)=\begin{cases}f(t) & \text{при} \quad t\ge 0,\\ 0 & \text{при} \quad t<0.\end{cases}$$

Пример 2. Найти изображение функции $f(t)=e^{at}$, где $a-$ любое число.

Решение. Данная функция является оригиналом. По формуле (1) имеем

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{at}e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-(p-a)t}\,dt=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{p-a}\cdot e^{-(p-a)t}\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{e^{-(p-a)\cdot b}}{p-a}\right)=\frac{1}{p-a},$$

если $\operatorname{Re}(p-a)>0$.

Таким образом, $$e^{at}\doteq\frac{1}{p-a}\quad(\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a). \qquad (3)$$

2. Свойства преобразования Лапласа

Свойства преобразования Лапласа облегчают задачу нахождения изображений для большого числа функций, а также задачу отыскания оригиналов по их изображениям.

Линейность.

Линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений, т. е. если $f_1(t)\doteq F_1(p)$, $f_2(t)\doteq F_2(p)$, C_1 и C_2 –

постоянные числа, то $C_1\cdot f_1(t)+C_2\cdot f_2(t)\doteq C_1\cdot F_1(p)+C_2\cdot F_2(p)$.

Используя свойства интеграла, находим

$$\int_0^{\infty}(C_1\cdot f_1(t)+C_2\cdot f_2(t))\cdot e^{-pt}\,dt==C_1\cdot\int_0^{\infty}f_1(t)\cdot e^{-pt}\,dt+C_2\cdot\int_0^{\infty}f_2(t)\cdot e^{-pt}\,dt=$$
$$=C_1\cdot F_1(p)+C_2\cdot F_2(p).$$

Пример 3. Найти изображения функций $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ (ω – любое число), C (const).

Решение. Пользуясь свойством линейности и формулой (3), находим

$$\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\doteq\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

т. е. $$\sin\omega t\doteq\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Аналогично получаем формулу $\cos\omega t \doteq \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$.

Далее, $c = c\cdot 1 \doteq c\cdot\dfrac{1}{p}$, т. е. $c \doteq \dfrac{c}{p}$.

Подобие

Если $f(t) \doteq F(p)$, >0, то $f(\lambda t) \doteq \dfrac{1}{\lambda}\cdot F\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$, т. е. умножение аргумента оригинала на положительное число λ приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

По формуле (1), полагая $\lambda t = t_1$, получим

$$f(\lambda t) \doteq \int_0^\infty f(\lambda t)\cdot e^{-pt}\cdot dt = \frac{1}{\lambda}\cdot\int_0^\infty f(t_1)\cdot e^{-\frac{p}{\lambda}t_1}\cdot dt_1 = \frac{1}{\lambda}\cdot\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-\frac{p}{\lambda}t}\,dt = \frac{1}{\lambda}\cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

(так как безразлично, какой буквой обозначена переменная интегрирования).

Например, пусть $\cos t \doteq \dfrac{p}{p^2+1}$.

Тогда $\cos\omega t \doteq \dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{p/\omega}{(p/\omega)^2+1} = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$.

Смещение изображения

Если $f(t) \doteq F(p)$, $a = \text{const}$, то $e^{at}\cdot f(t) \doteq F(p-a)$,

т. е. умножение оригинала на функцию e^{at} влечет за собой смещение переменной p.

В силу формулы (1)

$$e^{at}\cdot f(t) \doteq \int_0^\infty e^{at}\cdot f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-(p-a)t}\,dt = F(p-a)$$

$$(\operatorname{Re}(p-a) > s_0).$$

Благодаря этому свойству можно расширить таблицу соответствия между оригиналами и их изображениями:

$$e^{at}\cdot\sin\omega t \doteq \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2},$$

$$e^{at}\cdot\cos\omega t \doteq \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}.$$

Запаздывание оригинала

Если $f(t)\doteq F(p)$, $\tau>0$, то $f(t-\tau)\doteq e^{-p\tau}F(p)$, т. е. запаздывание оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на $e^{-p\tau}$.

Положив $t-\tau=t_1$, получим

$$f(t-\tau)\doteq\int_0^\infty f(t-\tau)\cdot e^{-pt}\,dt=\int_{-\tau}^\infty f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}dt_1=$$

$$=\int_0^\infty f(t_1)\cdot e^{-pt}\cdot e^{-pt_1}\,dt_1=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=e^{-p\tau}F(p).$$

Поясним термин «запаздывание». Графики функции $f(t)$ и $f(t-\tau)$ имеют одинаковый вид, но график функции $f(t-\tau)$ сдвинут на τ единиц вправо (рис. 3). Следовательно, функции $f(t)$ и $f(t-\tau)$ описывают один и тот же процесс, но процесс, описываемый функцией $f(t-\tau)$, начинается с опозданием на время τ.

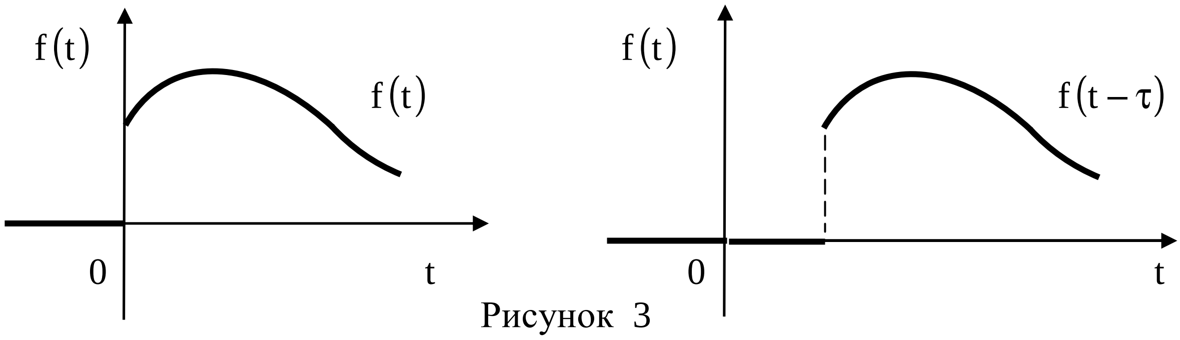

Рисунок 3

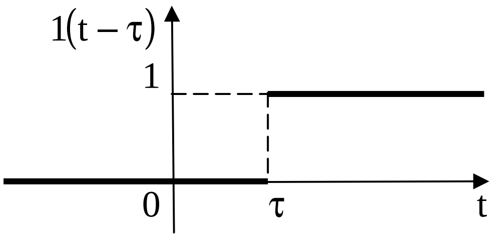

Рисунок 4

Свойство запаздывания удобно применять при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются различными аналитическими выражениями; функций, описывающих импульсные процессы.

Функция $1(t-\tau)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad t\ge\tau,\\ 0 & \text{при} \quad t<\tau\end{cases}$ называется **обобщенной единичной функцией** (рис. 4).

Так как $1(t)\doteq\dfrac{1}{p}$, $\quad 1(t-\tau)\doteq\dfrac{1}{p}\cdot e^{-p\tau}$.

Пример 4. Найти изображение функции $f(t)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<0,\\ 1 & \text{при} \quad 0\le t\le 3,\\ 0 & \text{при} \quad t>3.\end{cases}$

Решение. Данная функция описывает единичный импульс (рис. 5), который можно рассматривать как разность оригиналов единичной функции $1(t)$ и обобщенной единичной функции $1(t-3)$. Поэтому

$$f(t)=1(t)-1(t-3)\doteq\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\cdot e^{-3p}=F(p).$$

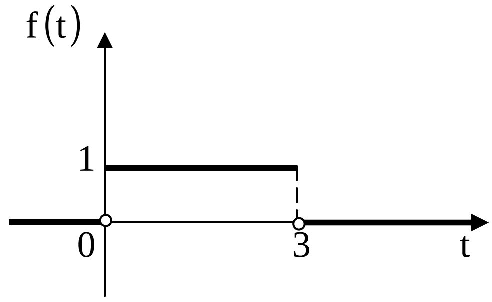

Рисунок 5

Дифференцирование оригинала

Если $f(t)\doteq F(p)$ и функции $f'(t)$, $f''(t)$, …, $f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t)\doteq p\cdot F(p)-f(0), \tag{4}$$

$$f''(t)\doteq p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-f'(0), \tag{5}$$

$$f'''(t)\doteq p^3\cdot F(p)-p^2\cdot f(0)-p\cdot f'(0)-f''(0), \tag{6}$$

… … … … … … … … … … …

$$f^{(n)}(t)\doteq p^n\cdot F(p)-p^{n-1}\cdot f(0)-\ \dots\ -f^{(n-1)}(0), \tag{7}$$

По определению изображения $f'(t)\doteq\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt.$

Возьмем интеграл по частям, полагая $u=e^{-pt}$, $du=-pe^{-pt}$, $dv=f'(t)dt$, $v=f(t)$.

Тогда $\quad f'(t)\doteq\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt= f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt=-f(0)+pF(p).$

Итак, $f(t) \doteq p \cdot F(p) - f(0)$. Пользуясь полученным результатом, найдем изображение второй производной:

$$f''(t) = (f'(t))' \doteq p(p \cdot F(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0).$$

Аналогично найдем изображение третьей производной:

$$f'''(t) \doteq p\left(p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)\right) - f''(0) = p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0).$$

Применяя формулу (4) $(n-1)$ раз, получим формулу (7).

Замечание. Формулы (4) – (7) просто выглядят при нулевых начальных условиях: если $f(0) = 0$, то $f'(t) \doteq p \cdot F(p)$; если $f(0) = f'(0) = 0$, то

$f''(t) \doteq p^2 \cdot F(p)$, и, наконец, если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то

$f^{(n)}(t) \doteq p^n \cdot F(p)$, т. е. дифференцированию оригинала соответствует умножение его изображения на p.

Свойство дифференцирования оригинала вместе со свойством линейности широко используется при решении линейных дифференциальных уравнений.

Дифференцирование изображения

Если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$F'(p) \doteq -t \cdot f(t),$$

$$F''(p) \doteq (-1)^2 \cdot t^2 \cdot f(t),$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots,$$

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t),$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots,$$

т. е. дифференцированию изображения соответствует умножение его оригинала на $(-t)$.

Согласно теореме 1 существования изображения, $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$. Следовательно, у нее существует производная любого порядка. Дифференцируя интеграл (1) по параметру p получим

$$F'(p)=\left(\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}\,dt\right)'_p=\int_0^\infty \left(f(t)\cdot e^{-pt}\right)'_p dt=$$

$$=\int_0^\infty f(t)\cdot(-t)e^{-pt}\,dt=\int_0^\infty (-t\cdot f(t))e^{-pt}\,dt\doteq -t\cdot f(t),$$

т. е. $F'(p)\doteq -t\cdot f(t)$.

Тогда $\quad F''(p)=(F'(p))'\doteq -t(-t\cdot f(t))=t^2\cdot f(t),$

$F'''(p)\doteq -t\left(t^2\cdot f(t)\right)=-t^3\cdot f(t)$ и вообще $F^{(n)}(p)\doteq(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t).$

Пример 5. Найти изображения функций $t^n\,(n\in N)$, $t\sin\omega t$, $t\cos\omega t$.

Решение. Так как $1\doteq\dfrac{1}{p}$, по свойству дифференцирования изображения имеем $-t\cdot 1\doteq -\dfrac{1}{p^2}$.

Далее находим $-t^2\doteq\left(\dfrac{1}{p^2}\right)'_p=-\dfrac{2}{p^3}$, т. е. $t^2\doteq\dfrac{2!}{p^3}$.

Продолжая дифференцирование, получим $\quad t^n\doteq\dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Так как $\sin\omega t\doteq\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\quad\left(\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)'_p\doteq -t\sin\omega t$,

т. е. $-\dfrac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}\doteq -t\sin\omega$, или $\quad t\sin\omega t\doteq\dfrac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$.

Аналогично находим $\quad t\cos\omega t\doteq\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$.

Интегрирование оригинала

Если $f(t) \doteq F(p)$, то $\displaystyle\int_0^t f(\tau)dt \doteq \frac{F(p)}{p}$, т. е. интегрирование оригинала от 0 до t соответствует делению его изображения на p.

Функция $\varphi(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ является оригиналом (проверьте самостоятельно). Пусть $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$. Тогда по свойству дифференцирования оригинала

$$\varphi'(t) = p\cdot\Phi(p) - \varphi(0) = p\cdot\Phi(p)$$

($\varphi(0)=0$).

А так как $\varphi'(t)=\left(\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)'_t = f(t)$, $F(p)=p\cdot\Phi(p)$.

Отсюда $\Phi(p)=\dfrac{F(p)}{p}$, т. е. $\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$.

Интегрирование изображения

Если $f(t) \doteq F(p)$ и интеграл $\int_p^\infty F(p)\,dp$ сходится, то $\displaystyle\int_0^\infty F(p) \doteq \frac{f(t)}{t}$, т. е. интегрирование изображения от p до ∞ соответствует делению его оригинала на t.

Используя формулу (1) и изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\int_p^\infty F(p)\,dp = \int_p^\infty\left(\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt\right)dp = \int_0^\infty\left(\int_p^\infty e^{-pt}\,dp\right)f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty\left(-\frac{1}{t}e^{-pt}\Big|_p^\infty\right)f(t)dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}\,dt \doteq \frac{f(t)}{t}.$$

Пример 6. Найти изображения функции $\frac{\sin t}{t}$ и интегрального синуса $\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau}\,dt.$

Решение. Так как $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1},$ функция

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{1}{p^2+1}dp = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\sin t}{t} \doteq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

Применяя свойство интегрирования оригинала, получаем

$$\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau}d\tau \doteq \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg} p}{p}.$$

Умножение изображений

Если $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $f_2(t) \doteq F_2(p)$, то

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(t)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

Интеграл в правой части формулы называется **сверткой функций** $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается символом $f_1(t) * f_2(t)$ т. е.

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

Можно убедиться (положив $t-\tau = u$), что свертывание обладает свойством коммутативности, т. е. $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$.

Итак, умножение изображений соответствует свертке их оригиналов

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \doteq f_1(t) * f_2(t).$$

Пример 7. Найти оригинал функции $F(p) = \frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}.$

Решение. Так как $F(p) = \frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)}\cdot\frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)}$ и

$$\frac{1}{p^2+\omega^2} \doteq \frac{1}{\omega}\cdot\sin\omega t, \qquad F(p)\doteq\int_0^t \frac{1}{\omega}\cdot\sin\omega t\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\sin\omega(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\omega^2}\cdot\int_0^t(\cos\omega(2\tau-t)-\cos\omega t)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{2\omega}\cdot\sin\omega\,(2\tau-t)\,\Big|_0^t-\cos\omega t\cdot\tau\,\Big|_0^t\right)=$$

$$=\frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t-t\cos\omega t\right)=\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cdot\cos\omega t),$$

т.е. $\dfrac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}\doteq\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cdot\cos\omega t).$

Следствие. Если $f_1 * f_2 \doteq F_1(p)\cdot F_2(p)$ и $f_1^{/}(t)$ также является оригиналом, то

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\doteq\int_0^t f_1^{/}(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau+f_1(0)\cdot f_2(t). \qquad (8)$$

Запишем произведение $p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)$ в виде

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)=p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)-f_1(0)\cdot F_2(p)+f_1(0)\cdot F_2(p)$$

или $\quad p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)=(p\cdot F_1(p)-f_1(0))\cdot F_2(p)+f_1(0)\cdot F_2(p).$

Первое слагаемое в правой части есть произведение изображений, соответствующих оригиналам $f_1^{/}(t)$ $\left(f_1^{/}(t)\doteq p\cdot F_1(p)-f_1(0)\right)$ и $f_2(t)$. Поэтому на основании свойства умножения изображений и линейности можно записать

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\doteq f_1^{/}(t)*f_2(t)+f_1(0)\cdot f_2(t)$$

или $\quad p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\doteq\displaystyle\int_0^t f^{/}{}_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau+f_1(0)\cdot f_2(t).$

Формула (8) называется **формулой Дюамеля.**

На основании свойства коммутативности свертки формулу Дюамеля можно записать в виде

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1'(t-\tau)\, d\tau + f_2(t) \cdot f_1(0).$$

Формулу Дюамеля можно применять для определения оригиналов по известным изображениям.

Пример 8. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{2p^2}{(p^2+1)^2}.$$

Решение: Так как

$$\frac{2p^2}{(p^2+1)^2} = 2\,p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{p^2+1} \doteq \sin t, \qquad \frac{p}{p^2+1} \doteq \cos t,$$

на основании формулы Дюамеля (8)

$$2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \doteq 2\int_0^t \cos\tau \cdot \cos(t-\tau)\, d\tau + 0 = t \cdot \cos t + \sin t.$$

Умножение оригиналов

Если $f_1(t) \doteq F_1(p)$ и $f_2(t) \doteq F_2(p)$, то

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(z) \cdot F_2(p-z)\, dz,$$

где путь интегрирования – вертикальная прямая $\operatorname{Re} z = \gamma > s_0$ (рис. 6).

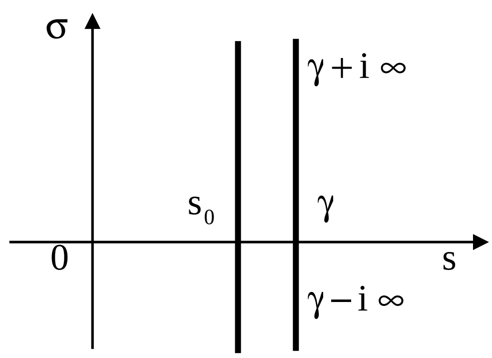

Рисунок 6

Изображение периодического оригинала с периодом, равным T, имеет вид

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T f(t) e^{-pt}\, dt.$$

Оно определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > 0$.

Пример 9. Найти изображение периодической функции $f(t)$, заданной графически (рис. 7).

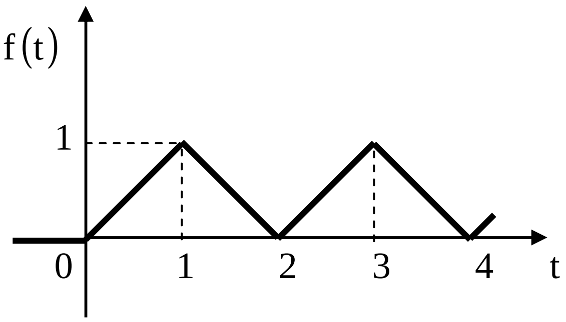

Рисунок 7

Решение. Зададим $f(t)$ аналитически

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{при} \quad 0\le t\le 1, \\ 2-t & \text{при} \quad 1<t\le 2, \end{cases}$$

учтем, что $T=2$, получим

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-2p}}\left[\int_0^1 t\,e^{-pt}\,dt+\int_1^2 (2-t)e^{-pt}\,dt\right]=\frac{1-e^{-p}}{p^2\left(1+e^{-p}\right)}.$$

Кратко перечислим рассмотренные свойства преобразования Лапласа

1. Линейность: $c_1\cdot f_1(t)+c_2\cdot f_2(t)\doteq c_1\cdot F_1(p)+c_2\cdot F(p)$.

2. Подобие: $f(\lambda t)\doteq\frac{1}{\lambda}\cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, $\lambda>0$.

3. Смещение: $e^{\alpha t}\cdot f(t)\doteq F(p-a)$.

4. Запаздывание: $f(t-\tau)\doteq e^{-p\tau}\cdot F(p)$, $\tau>0$.

5. Дифференцирование оригинала:

$$f'(t)\doteq p\cdot F(p)-f(0),$$

$$f''(t)\doteq p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-f'(0),$$

$$f'''(t)\doteq p^3\cdot F(p)-p^2\cdot f(0)-p\cdot f'(0)-f''(0),$$

$$\ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

6. Дифференцирование изображения

$$F'(p) \doteq -t \cdot f(t),$$
$$F''(p) \doteq (-1)^2 \cdot t^2 \cdot f(t),$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

7. Интегрирование оригинала: $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}.$

8. Интегрирование изображения: $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp \doteq \frac{f(t)}{t}.$

9. Умножение изображений: $F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int\limits_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)dt = f_1 * f_2.$

10. Умножение оригиналов: $f_1(t) \cdot f_2(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(z) \cdot F_2(p-z)dz.$

Приведем таблицу часто встречающихся оригиналов и их изображений:

	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$
1.	1	$1/p$
2.	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3.	t	$\frac{1}{p^2}$
4.	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5.	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6.	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
7.	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
8.	$e^{at} \cdot \sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$

	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)=\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$
9.	$e^{at}\cdot\cos\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
10.	$e^{at}\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
11.	$e^{at}\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
12.	$t^n\,(n\in N)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
13.	$e^{at}\cdot t^n$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14.	$t\cdot\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
15.	$t\cdot\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
16.	$t\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
17.	$t\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
18.	$e^{at}t\cdot\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega(p-a)}{\left((p-a)^2+\omega^2\right)^2}$
19.	$e^{at}t\cdot\cos\omega t$	$\dfrac{(p-a)^2-\omega^2}{\left((p-a)^2+\omega^2\right)^2}$
20.	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	$\dfrac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
21.	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\omega t\operatorname{ch}\omega t-\operatorname{sh}\omega t)$	$\dfrac{1}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
22.	$\sin(\omega t\pm\varphi)$	$\dfrac{\omega\cos\varphi\pm p\cdot\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
23.	$\cos(\omega t\pm\varphi)$	$\dfrac{p\cos\varphi\mp\omega\cdot\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$

Формула обращения. Теоремы разложения

Если функция действительной переменной $f(t)$ является оригиналом, то связь между нею и ее изображением взаимно однозначна:

из равенства $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$

следует формула обращения $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp$

(формула Меллина или обратное преобразование Лапласа).

В этой формуле путь интегрирования – любая прямая $\operatorname{Re} p = s$, параллельная мнимой оси, лежащая правее прямой $\operatorname{Re} p = s_0$.

Замечание. Во всякой точке t_0, являющейся точкой разрыва функции $f(t)$, правая часть формулы Меллина равна $\dfrac{1}{2}\big(f(t_0-0)+f(t_0+0)\big)$.

Теорема 3

Если функция $F(p)$, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, удовлетворяет условиям

а) $|F(p)| \to 0$ при $|p| \to \infty$ равномерно относительно $\arg p \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

б) для всех $s > s_0$ $\displaystyle\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} |F(x+iy)|\,dy \le M$,

то $F(p)$ является изображением оригинала, который определятся по формуле Меллина.

Непосредственное применение формулы обращения часто затруднительно и обычно пользуются теоремами разложения, являющимися следствиями из нее.

Первая теорема разложения. Если функция $F(p)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки и ее разложение в ряд по степеням $1/p$ имеет вид

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{p+1}},$$

то функция $f(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$, $t \ge 0$ $(f(t)=0$ при $t<0)$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Вторая теорема разложения. Если изображение $F(p)$ является однозначной функцией и имеет лишь конечное число особых точек $p_1, p_2, \ldots, p_n$, лежащих в конечной части плоскости, то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[e^{pt}F(p);\ \ p_k\right].$$

Если, в частности $F(p)=\dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, где $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ – многочлены степеней m и n соответственно $(n>m)$, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ – корни многочлена $Q_n(p)$ с кратностями, соответственно равными $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_r$ $(\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_r=n)$, то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{(\ell_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{\ell_k-1}}{dp^{\ell_k-1}}\left((p-p_k)^{\ell_k}F(p)\,e^{pt}\right). \qquad (9)$$

Если все коэффициенты многочленов $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ – действительные числа, то в правой части (9) полезно объединить слагаемые, относящиеся к взаимно сопряженным комплексным корням; сумма каждой пары таких членов равна удвоенной действительной части одного из них.

В частном случае, когда все корни $p_1, p_2, \ldots, p_n$, многочлена $Q_n(p)$ простые, используя формулу для вычисления вычета относительно полюса первого порядка, получим

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}\,e^{p_k t}. \qquad (10)$$

На практике отыскание функции-оригинала обычно проводят по следующему плану: сначала по таблице оригиналов и изображений пытаются отыскать для заданного изображения $F(p)$ соответствующий ему оригинал; в более сложном случае функцию $F(p)$ стараются представить в виде суммы простейших рациональных дробей, и, пользуясь свойством линейности, найти оригинал; наконец, использовать теоремы разложения, свойство умножения изображений, формулу обращения и т. д.

Пример 10. Найти функцию-оригинал, если ее изображение задано как

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}.$$

Решение. Рассмотрим три способа.

Первый способ нахождения $f(t)$. Разложим дробь $\dfrac{1}{(p-1)(p+1)^3}$. на сумму простейших дробей:

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}=-\frac{1}{2(p+1)^3}-\frac{1}{4(p+1)^2}-\frac{1}{8(p+1)}+\frac{1}{8(p-1)}.$$

И по таблице оригиналов и изображений найдем $f(t)$:

$$f(t)=-\frac{1}{4}t^2e^{-t}-\frac{1}{4}te^{-t}-\frac{1}{8}e^{-t}+\frac{1}{8}e^{t}.$$

Второй способ нахождения $f(t)$. Представим $f(t)$ как произведение

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}=\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{(p+1)^3},\quad \text{и т. к.}\quad \frac{1}{(p+1)^3}\doteq\frac{1}{2}t^2e^{-t}$$

и $\dfrac{1}{p-1}\doteq e^{t}$, то пользуясь свойством умножения изображений, получим

$$F(p)\doteq\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)dt=\int_0^t\frac{1}{2}\tau^2e^{-\tau}\cdot e^{t-\tau}d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\tau^2e^{t-2\tau}d\tau.$$

Последний интеграл возьмем по частям, полагая

$$\tau^2=u,\quad du=2\tau d\tau,\qquad dv=e^{t-2\tau}d\tau,\qquad v=-\frac{1}{2}e^{t-2\tau}.$$

$$\frac{1}{2}\int\tau^2e^{t-2\tau}dt=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\tau^2e^{t-2\tau}\Big|_0^t+\int_0^t\tau e^{t-2\tau}d\tau\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}t^2e^{-t}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\tau e^{t-2\tau}\Big|_0^t+\frac{1}{2}\int_0^t e^{t-2\tau}d\tau\right)=-\frac{1}{4}t^2e^{-t}-\frac{1}{4}te^{-t}-\frac{1}{8}e^{t-2\tau}\Big|_0^t=$$

$$=-\frac{1}{4}t^2e^{-t}-\frac{1}{4}te^{-t}-\frac{1}{8}e^{-t}+\frac{1}{8}e^{t}=f(t).$$

$\int_0^t\tau e^{t-2\tau}d\tau$ также был взят по частям, при

$$u=\tau,\ du=d\tau,\ dv=e^{t-2\tau}d\tau,\ v=-\frac{1}{2}e^{t-2\tau}.$$

Третий способ нахождения $f(t)$. Здесь $P_m(p)=1$,

$$Q_n(p)=(p-1)(p+1)^3, \qquad Q_n'(p)=3(p+1)^2(p-1)+(p+1)^3,$$

$p_1=1$– простой корень знаменателя, $p_2=-1$– корень кратности 3 $(\ell_2=3)$.

$$f(t)=\frac{1}{8}e^t+\frac{1}{2!}\lim_{p\to -1}\left(\frac{e^{pt}(p+1)^3}{(p-1)(p+1)^3}\right)''=\frac{1}{8}e^t+\frac{1}{2}\lim_{p\to -1}\left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right)''=$$

$$=\frac{1}{8}e^t+\frac{1}{2}\lim_{p\to -1}\left(t^2\frac{e^{pt}}{p-1}-2t\frac{e^{pt}}{(p-1)^2}+\frac{2e^{pt}}{(p-1)^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}e^t+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t^2e^{-t}-\frac{1}{2}t\,e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-t}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}e^t-\frac{1}{4}t^2e^{-t}-\frac{1}{4}t\,e^{-t}-\frac{1}{8}e^{-t}.$$

Решение линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами

Для того чтобы найти решение $x(t)$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(t), \tag{11}$$

(где $f(t)$ – оригинал), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0)=x_0, \qquad x'(0)=x_0', \ldots, \quad x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}, \tag{12}$$

следует применить к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа, т. е. от уравнения (11) с условиями (12) перейти к операторному уравнению

$$\left(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n\right)X(p)+Q(p)=F(p),$$

где $X(p)$ – изображение искомого решения, $F(p)$ – изображение функции $f(t)$, а $Q(p)-$некоторый многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных данных $x_0,\ x_0',\ \dots,\ x_0^{(n-1)}$ и который тождественно равен нулю, если $x_0 = x_0' = \dots = x_0^{(n-1)} = 0.$ Решив операторное уравнение относительно

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}$$

($L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n -$ характеристический многочлен данного уравнения) и найдя оригинал для $X(p)$, получим искомое решение $x(t)$. Если считать $x_0,\ x_0',\ \dots,\ x_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными, то найденное решение будет общим решением уравнения (11). Совершенно аналогично решаются и системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отличие будет лишь в том, что вместо операторного уравнения получим систему таких уравнений, которые будут линейными относительно изображений.

Пример 11. Найти частное решение дифференциального уравнения $x'' + 4x = -e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1,\quad x'(0) = 2.$

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$, тогда

$$x'(t) \doteq p\,X(p) - 1$$

$$x''(t) \doteq p^2\,X(p) - p - 2.$$

Кроме того, $-e^t \doteq -\dfrac{1}{p-1}.$

Тогда операторное уравнение имеет вид $p^2 X(p) - p - 2 + 4X(p) = -\dfrac{1}{p-1}.$

Отсюда находим $X(p) = \dfrac{p^2 + p - 3}{(p-1)\left(p^2+4\right)}.$

Разлагая эту дробь на простейшие, получим

$$X(p) = \frac{-1}{5(p-1)} + \frac{1}{5}\cdot\frac{6p+11}{p^2+4}.$$

Используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений, находим искомое частное решение дифференциального уравнения:

$$x(t) = -\frac{1}{5}\,e^t + \frac{6}{5}\cos 2t + \frac{11}{10}\sin 2t.$$

Пример 12. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = z - y, \\ y' = z + 2e^{-t}, \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 0{,}5; \quad z(0) = 0. \\ z' = z - x; \end{cases}$$

Решение. Пусть $x = x(t) \doteq X(p) = X$; $y = y(t) \doteq Y(p) = Y$; $z = z(t) \doteq Z(p) = Z$.

Находим, что $x' \doteq pX$; $y' \doteq pY - 0{,}5$; $z' \doteq pZ$.
Система операторных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} pX + Y - Z = 0, \\ \qquad pY - Z = 0{,}5 + \dfrac{2}{p+1}, \\ X + (p-1)Z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим

$$X(p) = -\frac{p+5}{2(p+1)(p^2+1)},$$

$$Y(p) = \frac{(p+5)\,(p^2-p+1)}{2(p^4-1)},$$

$$Z(p) = \frac{p+5}{2(p^4-1)}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем искомые решения:

$$X(p) = -\frac{p+5}{2(p+1)\,(p^2+1)} = -\frac{1}{p+1} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{2(p^2+1)} \doteq$$

$$\doteq -e^{-t} + \cos t - \frac{3}{2}\sin t.$$

$$Y(p) = \frac{(p+5)(p^2-p+1)}{2(p^4-1)} \doteq \frac{5}{4}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p-1} \doteq$$

$$\doteq \frac{5}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin t - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}.$$

$$Z(p) = \frac{p+5}{2\left(p^4-1\right)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p-1} \doteq$$

$$\doteq -\frac{1}{4}\cos t - \frac{5}{4}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}.$$

Ответ: $x(t) \doteq -e^{-t} + \cos t - \frac{3}{2}\sin t,$

$$y(t) \doteq \frac{5}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin t - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t},$$

$$z(t) \doteq -\frac{1}{4}\cos t - \frac{5}{4}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}.$$

Приведем еще несколько примеров.

Пример 13. Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = e^{2t}\cos^2 6t + \sin 2t \sin 4t + 3.$$

Решение. В силу свойства линейности преобразования Лапласа найдем изображение каждого слагаемого:

$$\cos^2 6t = \frac{1+\cos 12t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 12t \doteq \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+12^2}.$$

Применяя теорему смещения изображения к первому слагаемому, получим

$$e^{2t}\cos^2 6t \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+144}.$$

Изображение первого слагаемого можно было найти также по таблице оригиналов и изображений, используя формулу 9.

Второе слагаемое

$$\sin 2t \sin 4t = \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\cos 6t \doteq \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+36}.$$

Третье слагаемое $3 \doteq \frac{3}{p}$. Окончательно получаем

$$f(t) \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{p-2}{2(p-2)^2+144} + \frac{p}{2(p^2+4)} - \frac{p}{2(p^2+36)} + \frac{3}{p}.$$

Пример 14. Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} + \frac{1}{2}, & t \in (1,\ 3) \\ 0, & t \notin (1,\ 3) \end{cases}$$

Решение. Из рисунка 8 видно, что $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$; $f_1(t) = f_3(t-1)$; $f_2 = f_4(t-3)$.

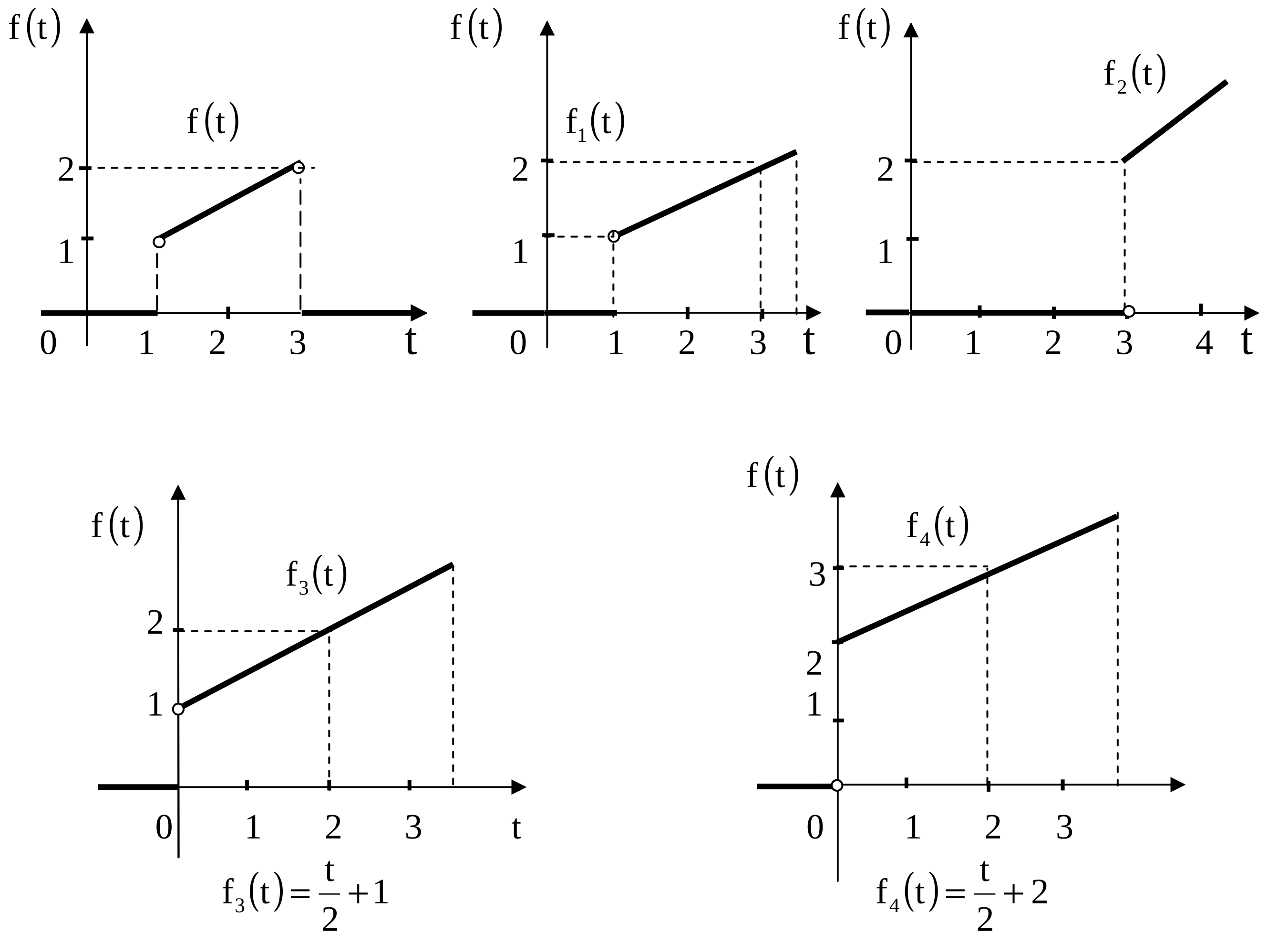

Рисунок 8

Так как $f_3(t) \doteq \dfrac{1}{2p^2} + \dfrac{1}{p}$; $f_4(t) \doteq \dfrac{1}{2p^2} + \dfrac{2}{p}$, по свойству запаздывания оригинала

получаем $$f(t) \doteq \left(\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p}\right)e^{-p} - \left(\frac{1}{2p^2} + \frac{2}{p}\right)e^{-3p}.$$

Образцы решения типовых заданий представлены примерами №№ 10 – 14.

Варианты типовых заданий

Задание 1. Найти изображения данных оригиналов $f(t)$

1. $f(t) = te^t + 1$	**2.** $f(t) = e^{2t}\sin 3t + 2$
3. $f(t) = e^t\cos^2 3t - 3$	**4.** $f(t) = 2\sin 2t\cos 4t + 1$
5. $f(t) = 2 + \operatorname{sh} 3t$	**6.** $f(t) = 3 + 2\sin(3t+5)$
7. $f(t) = 3 + t^2 + e^{4t}\sin 2t$	**8.** $f(t) = e^{-3t}\cos 4t - 1$
9. $f(t) = e^{4t}\sin^2 3t - 6$	**10.** $f(t) = 4\cos 3t\cos 5t - 2$
11. $f(t) = 1 - 2\operatorname{ch} 4t$	**12.** $f(t) = 2 + 4\cos(2t+3)$
13. $f(t) = 1 + t + e^t\sin 2t$	**14.** $f(t) = t^3e^{4t} - 1$
15. $f(t) = e^{4t}\sin 5t - 7$	**16.** $f(t) = e^{-t/2}\cos^2 3t + 10$
17. $f(t) = 6\sin 5t\sin 7t + 3$	**18.** $f(t) = 3 + e^t\operatorname{sh} 2t$
19. $f(t) = t + 3\sin(4t+7)$	**20.** $f(t) = 7\cos 3t\sin 7t + 3$
21. $f(t) = t^4e^{-3t} + 5$	**22.** $f(t) = e^{-5t}\cos 6t - 1/2$
23. $f(t) = e^{-2t}\sin^2 5t + 5$	**24.** $f(t) = t^6e^{-t} + 2$
25. $f(t) = t^2 + 2\cos(3t+1)$	**26.** $f(t) = t + e^{2t}\operatorname{ch} 3t$
27. $f(t) = t^2e^{-2t} + 3$	**28.** $f(t) = 2 + 4t + e^{2t}\cos 3t$
29. $f(x) = e^{7t}\sin 4t - 4$	**30.** $f(t) = e^{5t}\cos^2 7t + 9$

Задание 2. Используя различные свойства преобразования Лапласа, найти изображения следующих оригиналов:`

а) дифференцирование изображения

1. $f(t) = t\sin 2t$	**2.** $f(t) = t\cos 3t$	**3.** $f(t) = t\,\mathrm{sh}\, 4t$
4. $f(t) = t\,\mathrm{ch}\, 5t$	**5.** $f(t) = t^2 e^{2t}$	**6.** $f(t) = t^2 \sin 4t$

б) интегрирование изображения

7. $f(t) = \dfrac{e^{3t} - e^{t}}{t}$	**8.** $f(t) = \dfrac{\sin 2t \sin 4t}{t}$	**9.** $f(t) = \dfrac{\cos 3t - \cos 5t}{t}$
10. $f(t) = \dfrac{\sin^2 2t}{t}$	**11.** $f(t) = \dfrac{\cos^2 4t}{t}$	**12.** $f(t) = \dfrac{1 - e^{-4t}}{t}$

в) интегрирование оригинала

13. $f(t) = \int\limits_0^t \sin 2x \cos 4x\, dx$	**14.** $f(t) = \int\limits_0^t \sin^2 2x\, dx$
15. $f(t) = \int\limits_0^t \cos^2 4x\, dx$	**16.** $f(t) = \int\limits_0^t \cos 3x \cos 5x\, dx$
17. $f(t) = \int\limits_0^t e^{2x} \sin 4x\, dx$	**18.** $f(t) = \int\limits_0^t e^{3x} \cos 6x\, dx$

г) запаздывание оригинала

19. $f(t) = \begin{cases} t-1, & t \in (1, 3) \\ 0, & t \notin (1, 3) \end{cases}$	**20.** $f(t) = \begin{cases} 2t-2, & t \in (1, 2) \\ 0, & t \notin (1, 2) \end{cases}$
21. $f(t) = \begin{cases} t, & t \in (2, 4) \\ 0, & t \notin (2, 4) \end{cases}$	**22.** $f(t) = \begin{cases} 2t+1, & t \in (2, 3) \\ 0, & t \notin (2, 3) \end{cases}$
23. $f(t) = \begin{cases} 2-t, & t \in (1, 3) \\ 0, & t \notin (1, 3) \end{cases}$	**24.** $f(t) = \begin{cases} 3-t, & t \in (1, 4) \\ 0, & t \notin (1, 4) \end{cases}$

д) найти оригиналы следующих изображений, используя свойство умножения изображений:

25. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}$	**26.** $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+9)(p^2+16)}$
27. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)(p^2+9)}$	**28.** $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p+3)}$
29. $F(p)=\dfrac{p}{(p+2)(p^2+9)}$	**30.** $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p^2+4)}$

Задание 3. Найти оригиналы по данным изображениям

1. $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$	**2.** $F(p)=\dfrac{4p^3+75p-17p^2-36}{p(p-2)(p^2+9)}$
3. $F(p)=2\cdot\dfrac{3p^3+10p+4p^2+120}{p\cdot(p+5)(p^2+16)}$	**4.** $F(p)=\dfrac{5p^3+14p-34p^2+98}{p(p+2)(p^2+49)}$
5. $F(p)=\dfrac{p^3+85p-22p^2-300}{p(p-6)(p^2+25)}$	**6.** $F(p)=\dfrac{11p^3-6p+68p^2+648}{p(p+8)(p^2+9)}$
7. $F(p)=\dfrac{9p^3+80p+9p^2+300}{p(p+3)(p^2+25)}$	**8.** $F(p)=\dfrac{-(2p^3-112p-11p^2-49)}{p(p+1)(p^2+49)}$
9. $F(p)=\dfrac{4p^3-6p+7p^2+18}{p(p+2)(p^2+9)}$	**10.** $F(p)=2\cdot\dfrac{7p^3+192p-17p^2-252}{p(p-2)(p^2+36)}$
11. $F(p)=2\cdot\dfrac{2p^3+13p^2+24p-75}{p(p-2)(p^2+6p+25)}$	**12.** $F(p)=\dfrac{-(p^3+65p-12p^2-78)}{p(p+3)(p^2-4p+13)}$
13. $F(p)=\dfrac{3p^2+19p+50}{p(p^2+6p+25)}$	**14.** $F(p)=2\cdot\dfrac{p^2-6p+12}{p(p^2-4p+8)}$
15. $F(p)=\dfrac{-11p^2+16+3p^3+12p}{(p-2)^2(p^2+16)}$	**16.** $F(p)=\dfrac{-7p^2-196+80p}{(p-5)^2(p^2+4)}$

17. $F(p)=\dfrac{3p^3-12p+p^2-6}{p(p+1)^2(p-3)}$	**18.** $F(p)=\dfrac{4p^3+3p+6p^2+3}{p(p+3)(p^2+1)}$
19. $F(p)=\dfrac{p^2+3p^3-4}{(p^2+4)p^2}$	**20.** $F(p)=\dfrac{-10p^2-p-6+2p^3}{p^2(p+2)(p-3)}$
21. $F(p)=\dfrac{p^3-3p^2+7p-3}{p^2(p-1)^2}$	**22.** $F(p)=\dfrac{6p^3-p^2+17p+4}{(p^2+4)(p+1)(p-3)}$
23. $F(p)=\dfrac{2(p^3+16p+6p^2+54)}{(p^2+9)(p^2+16)}$	**24.** $F(p)=\dfrac{2p^2+50+3p^3}{(p^2+25)p^2}$
25. $F(p)=2\cdot\dfrac{2p^2+34-9p}{(p-3)(p^2+16)}$	**26.** $F(p)=\dfrac{6p^3+55p+100}{p(p+2)(p^2+25)}$
27. $F(p)=\dfrac{p^3-p^2-4p+8}{p^2(p-2)^2}$	**28.** $F(p)=4\,\dfrac{p^3+20p+p^2+24}{p(p+2)(p^2+16)}$
29. $F(p)=\dfrac{3p^2-19p+20+4p^3}{p^3(p-5)}$	**30.** $F(p)=\dfrac{5p^2+30-12p}{(p-2)^2(p^2+9)}$

Задание 4. Решить данные дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

1.	$x''+2x'-3x=e^{-t}$,	$x(0)=0,\quad x'(0)=1.$
2.	$x'''+x'=1$,	$x(0)=x'(0)=x''(0)=0$
3.	$x''+2x'=t\sin t$,	$x(0)=0,\quad x'(0)=0.$
4.	$x''+2x'+x=\sin t$,	$x(0)=0,\quad x'(0)=-1.$
5.	$x'''-x''=\sin t$,	$x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$
6 .	$x'''+x'=t$,	$x(0)=0,\ x'(0)=-1,\ x''(0)=0.$
8.	$x'''+2x''+5x'=0$,	$x(0)=-1,\ x'(0)=2,\ x''(0)=0.$
9.	$x''-2x'+2x=1$,	$x(0)=x'(0)=0.$

10.	$x'' + x' = \cos t,$	$x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$
11.	$x'' + 2x' + x = t^2,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
12.	$x''' + x'' = \sin t,$	$x(0) = x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$
13.	$x''' + x'' = t,$	$x(0) = -3, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$
14.	$x'' + 2x' + 5x = 3,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
15.	$x'' + 2x' + 2x = 1,$	$x(0) = x'(0) = 0.$
16.	$x'' + x = 1,$	$x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$
17.	$x'' + 4x = t,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
18.	$x'' - 2x' + 5x = 1 - t,$	$x(0) = x'(0) = 0.$
19.	$x'' + 3x' + 2x - 3 = 0,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 4.$
20.	$x'' + 6x' + 8x - 1 = 0,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$
21.	$x'' + 6x' + 5x - 2 = 0,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 3.$
22.	$x'' + 7x' + 10x - 4 = 0,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 5.$
23.	$x'' + 8x' + 12x - 5 = 0,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$
24.	$x'' + 9x' + 20x - 1 = 0,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 3.$
25.	$x'' + 4x' + 4x - 1 = 0,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 6.$
26.	$x'' + 6x' + 9x - 2 = 0,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 4.$
27.	$x'' + 8x' + 16x - 1 = 0,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 7.$
28.	$x'' + 10x' + 25x - 2 = 0,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 3.$
29.	$x'' + 12x' + 36x - 4 = 0,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 5.$
30.	$x'' + 14x' + 49x - 2 = 0,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 8.$

Задание 5. Данные системы дифференциальных уравнений решить операционным методом при указанных начальных условиях. В некоторых вариантах в скобках указан один из корней характеристического уравнения. $\dot{x}$ означает $\dfrac{dx}{dt}$.

1. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^{t}, \\ \dot{y} = x + t^{2}. \end{cases}$ $x(0) = 2,\ \ y(0) = 1.$	**2.** $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$ $x(0) = -2,\ \ y(0) = 1.$
3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$ $x(0) = 3,\ \ y(0) = 4.$	**4.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$ $x(0) = 3,\ \ y(0) = 2.$
5. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = 2.$	**6.** $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = 1.$
7. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = 0.$	**8.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{t}, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$ $x(0) = 3,\ \ y(0) = -3.$
9. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$ $x(0) = 2\ ,\ \ y(0) = 2\,.$	**10.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^{t}. \end{cases}$ $x(0) = 2,\ \ y(0) = 0.$
11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$ $x(0) = -2,\ \ y(0) = 3.$	**12.** $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^{t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$ $x(0) = 1\ ,\ \ y(0) = 1.$
13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x + 6y. \end{cases}$ $x(0) = 9,\ \ y(0) = 0.$	**14.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$ $x(0) = 3\ ,\ \ y(0) = 0.$

15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^{t}. \end{cases}$ $x(0)=2, \quad y(0)=0.$	**16.** $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$ $x(0)=2, y(0)=-7, z(0)=-10.$ $(\lambda_1 = 1).$
17. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$ $x(0)=4, \ y(0)=0, \ z(0)=-2.$	**18.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$ $x(0)=5, \ y(0)=3, \ z(0)=6.$ $(\lambda_1 = 1).$
19. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$ $x(0)=6, \ y(0)=0, \ z(0)=2.$ $(\lambda_1 = 1).$	**20.** $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$ $x(0)=3, \ y(0)=0, \ z(0)=-4.$ $(\lambda_1 = 1).$
21. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$ $x(0)=2, \ y(0)=1, \ z(0)=-5.$ $(\lambda_1 = 1).$	**22.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x \end{cases}$ $x(0)=4, \ y(0)=3, \ z(0)=3.$ $(\lambda_1 = 2).$
23. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$ $x(0)=2, \ y(0)=4, \ z(0)=4.$ $(\lambda_1 = 1).$	**24.** $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$ $x(0)=6, \ y(0)=3, \ z(0)=4.$ $(\lambda_1 = 2).$
25. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$ $x(0)=3, \ y(0)=8, \ z(0)=-3.$	**26.** $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$ $x(0)=5, \ y(0)=1, \ z(0)=-8.$ $(\lambda_1 = 3).$

27. $\begin{cases}\dot{x}=3x-2y-z,\\ \dot{y}=3x-4y-3z,\\ \dot{z}=2x-4y\end{cases}$ $x(0)=3,\ \ y(0)=6,\ z(0)=-2.$ $(\lambda_1=-5)$.	**28.** $\begin{cases}\dot{x}=x-y+z,\\ \dot{y}=x+y-z,\\ \dot{z}=2z-y\end{cases}$ $x(0)=4,\ y(0)=-3,\ z(0)=2$. $(\lambda_1=2)$.
29. $\begin{cases}\dot{x}=y-2z-x,\\ \dot{y}=4x+y,\\ \dot{z}=2x+y-z\end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=-1,\ z(0)=0.$ $(\lambda_1=1)$.	**30.** $\begin{cases}\dot{x}=2x+y,\\ \dot{y}=2y+4z,\\ \dot{z}=x-z\end{cases}$ $x(0)=13,\ y(0)=12,\ z(0)=2.$

Библиографический список

1. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учеб. пособие. М.: Наука, 1981. 304 с.

2. Письменный Д. Г. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис-пресс, 2003. Ч. 2. 256 с.

3. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. М.: Наука, 1981. 368 с.

4. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 176 с.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01.
Сводный темплан 2004 г.
Подписано в печать 14.05.04. Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,25. Уч. – изд. л. 2,25 .
Тираж 100 экз. Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ