**Министерство образования Российской Федерации**
**Омский государственный технический университет**

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.
# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Учебно-методические указания
для студентов вечерней и заочной форм обучения

Составители: Горяга Александр Васильевич
Назарук Елена Маратовна
Стратилатова Елена Николаевна

Омск-2001

## О г л а в л е н и е

## Предисловие

Эта часть учебно-методических материалов посвящена интегральному исчислению функции одной переменной. Как и предыдущие части, она состоит из трех разделов. В первом разделе изложены основные понятия и свойства интегралов, приведена таблица основных интегралов, рассмотрены основные методы интегрирования. Раздел снабжен большим количеством примеров, которые рекомендуется разобрать. Во втором разделе приведены примеры выполнения контрольных заданий, варианты которых приведены в конце пособия.

При изучении материала рекомендуется сначала разобрать тему, связанную с неопределенным интегралом и выполнить пять примеров задания 1. Наконец, работа с этой частью учебно-методических материалов предполагает знание предыдущей части №3.

## Введение

Понятие интеграла является одним из важнейших понятий математического анализа. Конструкция интеграла служит основным инструментом для расчета так называемых интегральных характеристик различных объектов, систем и процессов. Так, например, для геометрических объектов - вычисление площадей и объемов, для физических тел – массы, момента инерции, заряда и т. д., для систем и процессов – работы, энергии, потоков физических полей и т. д., в финансовой математике - накопленной стоимости. Основная формула интегрального исчисления – формула Ньютона-Лейбница сводит вычисление определенного интеграла к нахождению первообразной данной функции, т. е. к вычислению неопределенного интеграла. Одним из основных общих методов вычисления неопределенных интегралов является метод замены переменной, сводящий вычисление интеграла в конечном итоге к так называемому табличному интегралу.

Первое и второе задания пособия посвящены вычислению неопределенных и определенных интегралов соответственно, третье задание – вычислению площади фигуры с помощью определенного интеграла, четвертое – вычислению несобственных интегралов.

## Интегральное исчисление функций одной переменной

### 1. Первообразная. Неопределенный интеграл

Основная задача дифференциального исчисления состоит в нахождении дифференциала данной функции или ее производной. Интегральное исчисление решает обратную задачу: для данной функции *f(x)* найти такую функцию *F(x)*, производная которой равна *f(x)*. Например, для функции $f(x)=x^4$ этому условию удовлетворяет функция $F(x)=\frac{x^5}{5}$ ,так как $F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=\frac{1}{5}\left(x^5\right)'=x^4$. Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)*, если $F'(x)=f(x)$.

Следовательно, функция $\frac{x^5}{5}$ является первообразной для функции $x^4$. Однако, она не является единственной первообразной для $x^4$. Ими являются функции $\frac{x^5}{5}+3$, $\frac{x^5}{5}-10$ и вообще $\frac{x^5}{5}+C$, где $C$ – произвольная постоянная.

Оказывается, что все первообразные для любой функции *f(x)* даются формулой *F(x)+C, где* $F'(x)=f(x)$ и *C* – произвольная постоянная. Совокупность всех первообразных для непрерывной функции *f(x)* называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$, где функция *f(x)* – подынтегральная функция, *f(x)dx* – подынтегральное выражение, *dx* – дифференциал аргумента. Таким образом, если *F(x)* – какая-либо первообразная для *f(x)*, то $\int f(x)dx=F(x)+C$. Например, $\int x^4dx=\frac{x^5}{5}+C$. Процесс нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием этой функции.

Из определения неопределенного интеграла следует, что каждой формуле дифференциального исчисления *F'(x)=f(x)* соответствует формула $\int f(x)dx=F(x)+C$ в интегральном исчислении.

### 2. Таблица основных интегралов

Следующие формулы интегрального исчисления получены из таблицы основных производных с добавлением к ним наиболее часто встречающихся интегралов. Заметим, что правильность всех этих формул проверяется путем вычисления производных от их правых частей.

1) $\int 0\cdot dx=C,$ 2) $\int 1\cdot \mathrm{dx}=\mathrm{x}+\mathrm{C},$ 3) $\int \mathrm{x}^{\mathrm{a}}dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C \quad (\mathrm{a}\neq -1),$

$$4)\ \int \frac{1}{x}\cdot dx = \ln|x| + C, \quad 5)\ \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 6)\ \int e^x dx = e^x + C,$$

$$7)\ \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad 8)\ \int \cos x dx = \sin x + C, \quad 9)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$$

$$10)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, \quad 11)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad 12)\ \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C,$$

$$13)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad 14)\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C,$$

$$15)\ \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \qquad 16)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{a+x^2}\right| + C.$$

Интегралы из этой таблицы в дальнейшем будем называть табличными интегралами.

## 3. Основные свойства неопределенного интеграла

Из определения неопределенного интеграла вытекают следующие свойства:

$$1)\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \qquad 2)\ d\left(\int f(x)dx\right) = f(x),$$

$$3)\int f'(x)dx = f(x) + C, \qquad 4)\int df(x) = f(x) + C.$$

Важную роль при вычислении неопределенного интеграла играют следующие его свойства, которые доказываются с помощью соответствующих свойств производной:

$$5)\int k\cdot f(x)dx = k\int f(x)dx,\ k - \text{постоянная},$$

$$6)\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

## 4. Основные методы интегрирования

### 4.1. Непосредственное интегрирование.

Метод заключается в применении свойств 5 и 6 с использованием таблицы основных интегралов.

**Пример 1**

$$\int\left(2\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}+x\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)dx=\int\left(2x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^3+x^{\frac{3}{2}}-2\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=2\int x^{\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{3}\int x^3dx+\int x^{\frac{3}{2}}dx-2\int\frac{dx}{x}=\text{( по таблице основных интегралов)=}$$

$$=2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{x^{5/2}}{5/2}-2\,ln|x|+C=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^4}{12}+\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-2\,ln|x|+C.$$

**Пример 2**

$$\int\left(4\cos x-e^x+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=4\int\cos x dx-\int e^x dx+3\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=4\sin x-e^x+3\arcsin x+C.$$

**Пример 3**

$$\int\frac{(\sqrt{x}-3x)^2}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{x-6x\sqrt{x}+9x^2}{\sqrt[3]{x}}dx=\int x^{2/3}dx-6\int x^{7/6}dx+9\int x^{5/3}dx=$$

$$=\frac{3}{5}x^{5/3}-6\cdot\frac{6}{13}x^{13/6}+9\cdot\frac{3}{8}x^{8/3}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{36}{13}\sqrt[6]{x^{13}}+\frac{27}{8}\sqrt[3]{x^8}+C.$$

**Пример 4**

$$\int\frac{x^2}{x^2+4}dx=\int\frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx=\int\frac{x^2+4}{x^2+4}dx-4\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=x-4\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C=x-2arctg\frac{x}{2}+C.$$

**Пример 5**

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx = \text{(по формуле тригонометрии)}=$$

$$= \int \frac{1-2\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - 2\int 1\cdot dx = -ctgx - 2x + C.$$

### 4.2. Замена переменной

Метод заключается в переходе к новому аргументу интегрирования путем преобразования подынтегрального выражения по некоторой формуле.

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

При этом говорят, что в интеграле слева сделана замена переменной (подстановка по формуле $x = \varphi(t)$).

После вычисления интеграла справа необходимо в ответе вернуться снова к аргументу $x$, выразив $t$ в формуле $x = \varphi(t)$ через $x$.

***Замечание.*** Часто при замене переменной удобно использовать подстановку вида $t = \varphi(x)$, при этом $dt = \varphi'(x)dx$.

**Пример 6**

$$\int \cos\frac{x}{6}dx = \left| \begin{array}{c} x = 6t \\ dx = 6\cdot dt \end{array} \right| = \int \cos t\cdot 6\cdot dt = 6\int \cos t\,dt = 6\cdot\sin t + C = \left| t = \frac{x}{6} \right| = 6\sin\frac{x}{6} + C.$$

**Пример 7**

$$\int e^{-2x}dx = \left| \begin{array}{c} t = -2x \\ dt = -2\cdot dx \end{array} \right| = \int e^t\cdot\frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C.$$

**Пример 8**

$$\int \sqrt{2x+1}\cdot dx = \left| \begin{array}{c} t = 2x+1 \\ dt = 2\cdot dx \end{array} \right| = \int t^{1/2}\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{1/2}\cdot dt =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2}+C=\frac{1}{3}\sqrt{t^3}+C=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}+C.$$

**Пример 9**

$$\int\frac{1}{2x-1}\cdot dx=\left|\begin{array}{l} t=2x-1 \\ dt=2\cdot dx \end{array}\right|=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot ln|t|+C=\frac{1}{2}ln|2x-1|+C.$$

**Пример 10**

$$\int\frac{ln^2 x}{x}\cdot dx=\left|\begin{array}{c} t=ln\,x \\ dt=\frac{1}{x}\cdot dx \end{array}\right|=\int t^2\cdot dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{ln^3 x}{3}+C.$$

**Пример 11**

$$\int x\cdot e^{-x^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=-x^2 \\ dt=-2xdx \\ xdx=-\frac{dt}{2} \end{array}\right|=\int e^t\,\frac{dt}{-2}=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C\,.$$

**Пример 12**

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\left|\begin{array}{l} t=x^2+1 \\ dt=2xdx \\ xdx=\frac{dt}{2} \end{array}\right|=\int\sqrt{t}\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{1/2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}\sqrt{t^3}+C=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+C.$$

**Пример 13**

$$\int tgx\cdot dx=\int\frac{sin\,x}{cos\,x}dx=\left|\begin{array}{c} t=cos\,x \\ dt=-sin\,x\cdot dx \end{array}\right|=\int\frac{-dt}{t}=-ln|t|+C=-ln|cos\,x|+C.$$

**Пример 14**

$$\int \frac{x}{(1-x^2)^2}\cdot dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\left|\begin{array}{c} t=1-x^2 \\ dt=-2x\cdot dx\end{array}\right|=\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{dt}{-2}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}-\frac{1}{2}\int t^{-2}dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+C=$$

$$=\frac{1}{2t}+C=\frac{1}{2(1-x^2)}+C.$$

**Пример 15**

$$\int sin^4\ x\cdot cos\ xdx=\left|\begin{array}{c} t=sin\ x \\ dt=cos\ x\cdot dx\end{array}\right|=\int t^4dt=\frac{t^5}{5}+C=\frac{sin^5\ x}{5}+C.$$

***Замечание.*** Используя простейшую замену переменной, легко получить следующие формулы:

$$\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C \qquad (\text{n}\neq\text{-1}),$$

$$\int\frac{1}{ax+b}\cdot dx=\frac{1}{a}ln|ax+b|+C\ , \qquad \int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C\ ,$$

$$\int sin\,axdx=-\frac{1}{a}cos\,ax+C\ , \qquad \int cos\,ax\,dx=\frac{1}{a}sin\,ax+C\ .$$

### 4.3. Интегрирование по частям

Метод заключается в применении формулы по частям

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du.$$

Смысл этой формулы состоит в том, чтобы в результате ее применения интеграл в правой ее части оказался проще первоначального. Для применения формулы интегрирования по частям подынтегральное выражение следует разбить на два множителя. Один из них обозначается через $u$, а остальная часть, содержащая $dx$, относится ко второму множителю и обозначается через $dv$. Затем дифференцированием находится $du$ ( $du=u'\cdot dx$ ) и интегрированием – функция $v$ ($v=\int dv$ ), причем в интеграле произвольная постоянная берется равной нулю.

**Пример 16**

$$\int x\cdot e^x dx = \left| \begin{matrix} \mathrm{u}=\mathrm{x} & dv=e^x\mathrm{dx} \\ \mathrm{du}=1\cdot \mathrm{dx} & \mathrm{v}=\int \mathrm{e}^{\mathrm{x}}dx=e^x+C, v=e^x \end{matrix} \right| = x\cdot e^x - \int e^x\cdot dx = x\cdot e^x - e^x + C.$$

**Пример 17**

$$\int x\cdot\cos 2x dx = \left| \begin{matrix} \mathrm{u} = \mathrm{x} & \mathrm{dv} = \mathrm{cos2x}\ \cdot dx \\ \mathrm{du} = \mathrm{dx} & \mathrm{v} = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}x\cdot\sin 2x - \int\frac{1}{2}\sin 2x\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int\sin 2x dx = = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

**Пример 18**

$$\int x^2\ln x dx = \left| \begin{matrix} \mathrm{u}=\ln \mathrm{x} & \mathrm{dv}=\mathrm{x}^2 dx \\ \mathrm{du}=\frac{1}{x}\mathrm{dx} & \mathrm{v}=\frac{x^3}{3} \end{matrix} \right| = \frac{x^3}{3}\ln x - \int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C.$$

**Пример 19**

$$\int(1-2x)e^{-3x}dx = \left| \begin{matrix} \mathrm{u} = 1 - 2\mathrm{x} & \mathrm{dv} = e^{-3x}\mathrm{dx} \\ \mathrm{du} = -2\ \mathrm{dx} & \mathrm{v} = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3\mathrm{x}} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{(1-2x)}{3}e^{-3x} - \int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)(-2)dx =$$

$$= -\frac{1-2x}{3}e^{-3x} - \frac{2}{3}\int e^{-3x}dx = -\frac{1-2x}{3}e^{-3x} + \frac{2}{9}e^{-3x} + C.$$

**Пример 20**

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=\mathrm{arctg}\,x & dv=x\cdot dx \\ du=\frac{1}{1+x^2}\cdot dx & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\left(\int 1\cdot dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx\right)=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x+C.$$

**Пример 21**

$$\int x^2\sin x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=x^2 & dv=\sin x\cdot dx \\ du=2x\cdot dx & v=-\frac{1}{2}\cos x\end{array}\right|=-\frac{x^2}{2}\cos 2x-\int\left(-\frac{1}{2}\cdot\cos x\right)\cdot 2x dx=$$

$$=-\frac{x^2}{2}\cos 2x+\int x\cos 2x dx=\left|\begin{array}{ll} u=x & dv=\cos 2x\cdot dx \\ du=dx & v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right|=-\frac{x^2}{2}\cos 2x+\left(\frac{x}{2}\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x\cdot dx\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{2}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x dx=-\frac{x^2}{2}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Формула интегрирования по частям применяется к интегралам следующего вида:

$$\int x^n e^x dx=\left|\begin{array}{ll} u=x^n & dv=e^x dx \\ \dots & \dots\end{array}\right| \qquad \int x^n\sin x dx=\left|\begin{array}{ll} u=x^n & dv=\sin x dx \\ \dots & \dots\end{array}\right|$$

$$\int x^n\cos x dx=\left|\begin{array}{ll} u=x^n & dv=\cos x dx \\ \dots & \dots\end{array}\right| \qquad \int x^n\ln x dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x & dv=x^n dx \\ \dots & \dots\end{array}\right|$$

$$\int x^n\arcsin x dx=\left|\begin{array}{ll} u=\arcsin x & dv=x^n dx \\ \dots & \dots\end{array}\right| \qquad \int x^n\arccos x dx=\left|\begin{array}{ll} u=\arccos x & dv=x^n dx \\ \dots & \dots\end{array}\right|$$

$$\int x^n arctgx dx=\left|\begin{array}{ll} u=\mathrm{arctg}x & dv=x^n dx \\ \dots & \dots\end{array}\right| \qquad \int x^n arcctgx\, dx=\left|\begin{array}{ll} u=\mathrm{arcctg}x & dv=x^n dx \\ \dots & \dots\end{array}\right|.$$

## 5. Интегралы специального вида

*1) Интегралы вида*

$$\int f\left(\sqrt[n]{ax+b},x\right)dx$$

упрощаются с помощью подстановки $ax+b=t^n$, тогда $a\cdot dx=nt^{n-1}\cdot dt$.

Если же в подынтегральную функцию входят радикалы с разными показателями, то следует произвести такую же подстановку, где за n нужно взять наименьшее общее кратное всех этих показателей.

**Пример 22**

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}} = \left| \begin{matrix} x+3=t^3 \\ dx=3t^2dt \end{matrix} \right| = 3\int \frac{t^2dt}{t} = 3\int tdt = 3\cdot\frac{t^2}{2} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2} + C.$$

**Пример 23**

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}} = \left| \begin{matrix} x+1=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{matrix} \right| = 6\int \frac{t^5dt}{t^2+t^3} = 6\int \frac{t^5}{t^2(t+1)}dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}dt = 6\int \frac{t^3+1}{t+1}dt - 6\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 6\int \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt - 6ln|t+1| = 6\int (t^2-t+1)dt - 6ln|t+1| = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - ln|t+1|\right) + C =$$

$$= \left(t = \sqrt[6]{x+1}\right) = 6\left(\frac{\sqrt{x+1}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x+1}}{2} + \sqrt[6]{x+1} - ln\left|\sqrt[6]{x+1}+1\right|\right) + C.$$

**Пример 24**

$$\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}} = \left| \begin{matrix} x-2=t^2 \\ dx=2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{(t^3+3)\cdot 2tdt}{(t^2+2)\cdot t} = 2\int \frac{t^2+3}{t^2+2}dt = 2\int \frac{(t^2+2)+1}{t^2+2}dt = 2\int dt + 2\int \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= 2t + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \left|t = \sqrt{x-2}\right| = 2\sqrt{x-2} + \frac{2}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}} + C.$$

*2) Интегралы вида*

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx, \qquad \int \frac{\mathrm{Ax}+\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+px+q}}dx$$

вычисляются путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена

$$x^2+px+q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q$$

и последующей подстановки

$$t = x + \frac{p}{2}, \quad \mathrm{x} = \mathrm{t} - \frac{\mathrm{p}}{2}, \quad \mathrm{dx} = \mathrm{dt}.$$

**Пример 25**

$$\int\frac{3x+2}{x^2+4x+7}dx=\int\frac{3x+2}{(x+2)^2+3}dx=\left|\begin{array}{c}t=x+2\\ dt=dx\end{array}\right|=\int\frac{3(t-2)+2}{t^2+3}dt=\int\frac{3t-4}{t^2+3}dt=3\int\frac{t}{t^2+3}dt-4\int\frac{1}{t^2+3}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{c}z=t^2+3\\ dz=2tdt\\ tdt=\dfrac{dz}{2}\end{array}\right|=3\int\frac{dz}{z}-4\int\frac{1}{t^2+(\sqrt{3})^2}dt=3ln|z|-\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C=3ln|t^2+3|-\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=3ln|(x+2)^2+3|-\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{3}}+C.$$

**Пример 26**

$$\int\frac{2x+5}{x^2+3x-4}dx=\int\frac{2x+5}{(x+3/2)^2-9/4-4}dx=\left|\begin{array}{c}t=x+3/2\\ dt=dx\end{array}\right|=\int\frac{2(t-3/2)+5}{t^2-25/4}dt=\int\frac{2t+2}{t^2-25/4}dt=$$

$$=2\int\frac{t}{t^2-25/4}dt+2\int\frac{1}{t^2-25/4}dt=\left|\begin{array}{c}u=t^2-25/4\\ du=2tdt\end{array}\right|=2\int\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{2}-2\int\frac{1}{(5/2)^2-t^2}dt=\ln|u|-$$

$$-2\cdot\frac{1}{2\cdot5/2}\ln\left|\frac{5/2+t}{5/2-t}\right|+C=\ln|t^2-25/4|-\frac{2}{5}\ln\left|\frac{5/2+x+3/2}{5/2-(x+3/2)}\right|+C=\ln|(x+3/2)^2-25/4|-$$

$$-\frac{2}{5}\ln\left|\frac{4+x}{1-x}\right|+C=\ln|x^2+3x-4|-\frac{2}{5}\ln\left|\frac{4+x}{1-x}\right|+C.$$

**Пример 27**

$$\int\frac{x+4}{\sqrt{x^2+6x+11}}dx=\int\frac{x+4}{\sqrt{(x+3)^2+2}}dx=\left|\begin{array}{c}\mathrm{t=x+3}\\ \mathrm{dt=dx}\end{array}\right|=\int\frac{t-3+4}{\sqrt{t^2+2}}dt=\int\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}dt+\int\frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\mathrm{u=t^2+2}\\ \mathrm{du=2}t\mathrm{dt}\end{array}\right|=\int\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{2}+\ln\left|\mathrm{t}+\sqrt{\mathrm{t}^2+2}\right|=\sqrt{u}+\ln\left|\mathrm{t}+\sqrt{\mathrm{t}^2+2}\right|+C=\sqrt{t^2+2}+\ln\left|\mathrm{t}+\sqrt{\mathrm{t}^2+2}\right|+C=$$

$$=\sqrt{x^2+6x+11}+\ln\left|\mathrm{x}+3+\sqrt{\mathrm{x}^2+6x+11}\right|+C.$$

**Пример 28**

$$\int\frac{3x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx=\int\frac{x+4}{\sqrt{-(x^2+4x-5)}}dx=\int\frac{3x+2}{\sqrt{-\left[(x+2)^2-9\right]}}dx=\left|\begin{matrix}\mathrm{t=x+2}\\ \mathrm{dt=dx}\end{matrix}\right|=\int\frac{3(t-2)+2}{\sqrt{9-t^2}}dt=$$

$$=\int\frac{3t-4}{\sqrt{9-t^2}}dt=3\int\frac{t}{\sqrt{9-t^2}}dt-4\int\frac{1}{\sqrt{9-t^2}}dt=\left|\begin{matrix}\mathrm{u=9-t^2}\\ \mathrm{du=-2tdt}\end{matrix}\right|=3\cdot\frac{1}{-2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot du-4arcsin\frac{t}{3}=$$

$$=-3\sqrt{u}-4arcsin\frac{t}{3}+C=-3\sqrt{9-t^2}-4arcsin\frac{t}{3}+C=-3\sqrt{9-(x+2)^2}-4arcsin\frac{x+2}{3}+C.$$

*3) Интегралы вида*

$\int sin^m x\cdot cos^n x\,\mathrm{dx}$ , где – $m$, $n$ - целые числа, упрощаются с помощью подстановки $t=sin\,x$, если $n$ – нечетное число, и $t=cos\,x$, если $m$ – нечетное число.

Если – $m,n$ - четные числа, то используют тригонометрические формулы

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ для понижения степеней.

**Пример 29**

$$\int\sin^2 x\cdot\cos^3 xdx=\int\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos xdx=\left|\sin^2 x+\cos^2 x=1\right|=$$

$$=\int\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)\cdot\cos xdx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\mathrm{t=sinx}\\ \mathrm{dt=cosx\,dx}\end{matrix}\right|=\int t^2(1-t^2)dt=\int t^2dt-\int t^4dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

**Пример 30**

$$\int sin^3 x\cdot cos^4 xdx=\int sin^2 x\cdot cos^4 x\cdot sinxdx=\left|\sin^2 x+cos^2 x=1\right|=\int(1-cos^2 x)\cdot cos^4 x\cdot sinxdx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\mathrm{t=cos\ \ x}\\ \mathrm{dt=\text{-}sinxdx}\end{matrix}\right|=\int(1-t^2)t^4\cdot(-dt)=-\int t^4dt+\int t^6dt=-\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C=-\frac{cos^5 x}{5}+\frac{cos^7 x}{7}+C.$$

**Пример 31**

$$\int sin^2 xdx=\int\left(\frac{1-cos\quad 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int cos\,2xdx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}sin\,2x+C.$$

**Пример 32**

$$\int cos^2 xdx=\int\left(\frac{1+cos\quad 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int cos\,2xdx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sin\,2x+C.$$

Аналогично получаются более общие формулы

$$\int \sin^2(ax)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4a}\sin(2ax)+C,$$

$$\int cos^2(ax)dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4a}sin(2ax)+C.$$

**Пример 33**

$$\int sin^2 x\cdot cos^2 xdx=\int\left(\frac{1-cos\quad 2x}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+cos\quad 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\int(1-cos^2 2x)dx=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{4}\int cos^2 2xdx=$$

$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}sin4x\right)+C.$$

*4) Интегралы вида*

$$\int f\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)\qquad dx$$

приводятся к интегралам от тригонометрических выражений подстановкой $x=a\,sint$.

**Пример 34**

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\left|\begin{array}{c}x=2sint\\ dx=2costdt\\ t=arcsin\quad t\end{array}\right|=\int\sqrt{4-4sin^2 t}\cdot 2costdt=\left|1-sin^2 t=cos^2 t\right|=4\int\sqrt{cos^2 t}\cdot costdt=$$

$$=4\int cos^2 tdt=(\text{пример}\,32)=4\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}sin2t\right)+C=$$

$$=2t+sin2t+C=2arcsin\frac{x}{2}+sin\left(2\cdot arcsin\frac{x}{2}\right)+C.$$

*5) Интегралы вида*

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$$

приводятся к интегралам от тригонометрических выражений подстановкой *x = a tg t* с использованием тригонометрического тождества

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}.$$

**Пример 35**

$$\int \frac{1}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} x = 5tg\,t \\ dx = 5\cdot\dfrac{1}{\cos^2 t}dt \\ t = arctg\,\dfrac{x}{5} \end{array} \right| = \int \frac{1}{\left(25+25tg^2t\right)\cdot\sqrt{25+25tg^2t}}\cdot 5\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{1}{\left(1+tg^2t\right)\cdot\sqrt{1+tg^2t}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{25}\int \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)\left(\dfrac{1}{\cos t}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \frac{1}{25}\int \cos\ t\,dt = \frac{1}{25}\sin t + C = \frac{1}{25}\sin\left(arctg\,\frac{x}{5}\right) + C.$$

## 6. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

Найдем площадь фигуры, которая ограничена осью абсцисс, отрезками прямых *x=a* и *x=b*, параллельными оси ординат, и графиком функции *y=f(x)*. Такая фигура называется *криволинейной трапецией* (рис.1). Боковые отрезки могут вырождаться в точки. Например, фигуры, изображенные на рис.2, частные случаи криволинейных трапеций.

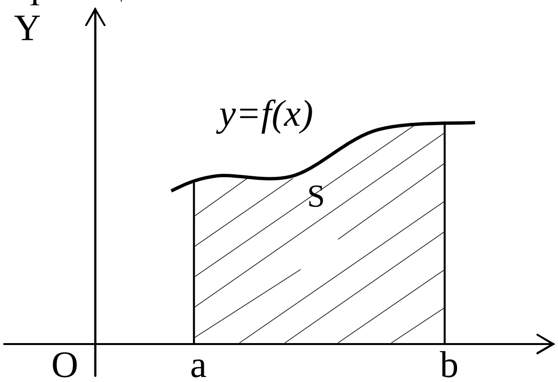



Рис.1

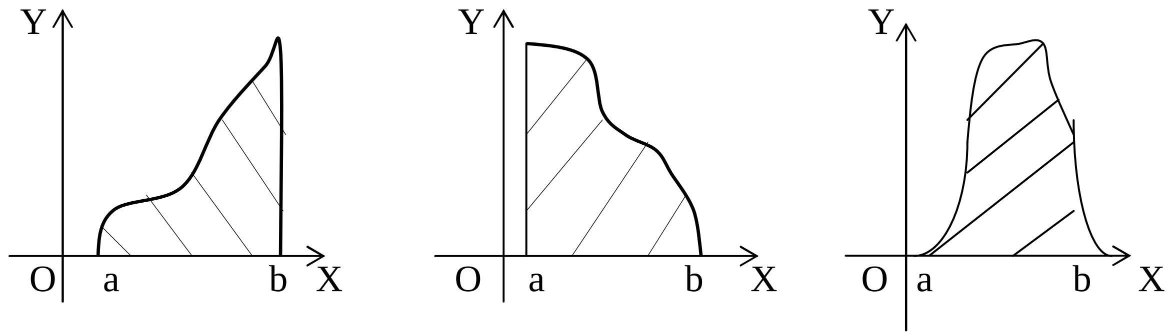



Рис.2

Разобьем отрезок $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ на $n$ (не обязательно равных) отрезков $[x_0, x_1],...,[x_i, x_{i+1}],...,[x_{n-1}, x_n]$, длины которых $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1,...,\Delta x_i = x_i - x_{i-1},...,\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Их сумма составляет отрезок $[a,b]$ . В точках деления проведем отрезки, перпендикулярные оси абсцисс до пересечения с графиком функции *f(x)*. Криволинейная трапеция разобьется на $n$ узких криволинейных трапеций (см. рис.3).

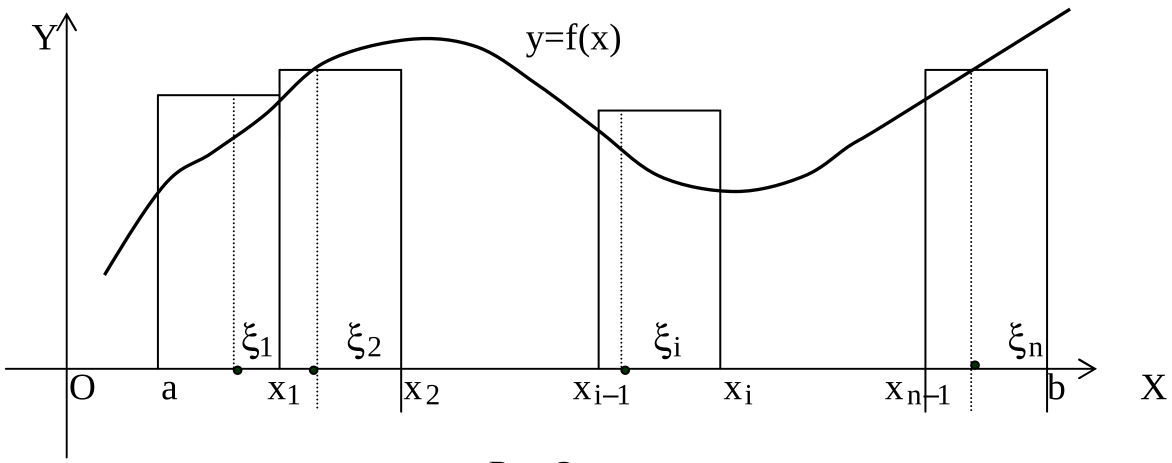



Рис.3

На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ (*i=1,2,...,n*) построим прямоугольник, основание которого $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , а высота равна значению функции *f(x)* в произвольно выбранной точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (в частных случаях она может совпадать с началом или концом данного отрезка). Площадь его равна $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ (*i=1,2,...,n*). Сумма площадей таких прямоугольников, построенных на всех отрезках и равная

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_i)\Delta x_i + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

выражает площадь ступенчатой фигуры (рис.3) или приближенно площадь криволинейной трапеции. С увеличением числа n точек деления эта сумма все точнее выражает площадь криволинейной трапеции, если длина максимального из отрезков $\Delta x_i$ (i=1,2,...,n) уменьшается. Поэтому за площадь $S$ криволинейной трапеции принимается предел суммы $S_n$, т.е.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i . \tag{1}$$

Можно доказать, что если функция непрерывна на отрезке [*a*,*b*], то этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка [*a*,*b*] на малые отрезки, ни от выбора точек $\xi_i$ на них. Следовательно, если функция *f(x)* непрерывна на [*a*,*b*], то площадь криволинейной трапеции существует.

### 7. Определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница

Выше было показано, что вычисление площади плоской фигуры свелось к нахождению предела особого рода сумм (1). Решение многих других задач математики, естествознания и техники приводит к вычислению пределов такого же рода сумм**.** Это дает основание для следующего определения.

***Определение.*** Пусть на отрезке [*a*,*b*] задана функция *f(x)*. Разобьем отрезок [*a*,*b*] точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ на $n$ более мелких отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$, длины которых $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, ...,$ $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. На каждом из этих отрезков выберем по точке $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. Длину наибольшего отрезка обозначим через $\lambda$.

<u>Определенным интегралом</u> от функции *f(x)* по отрезку [*a*,*b*] называется

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx .$$

Выражение, стоящее под знаком предела, называется интегральной суммой для функции *f(x)* по отрезку [*a*,*b*]. Числа $a$ и $b$ называются нижним и верхним пределами интегрирования соответственно.

Из задачи о вычислении площади криволинейной трапеции вытекает следующий геометрический смысл определенного интеграла: если $f(x) \geq 0$ на [*a*,b], то

$$S = \int_a^b f(x)dx ,$$

где *S* – площадь криволинейной трапеции (рис.1).

Если существует интеграл от функции *f(x)* по отрезку [*a*,*b*], то функция *f(x)* называется интегрируемой на [*a*,*b*].

Справедливо следующее утверждение: если *f*(*x*) непрерывна на отрезке [*a*,*b*], то она интегрируема на [*a*,*b*].

По определению будем считать, что

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Ключевую роль в вычислении определенных интегралов играет формула Ньютона – Лейбница, называемая основной формулой интегрального исчисления.

***Теорема.*** Если $F'(x)=f(x)$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Формула (2) показывает, что вычисление определенных интегралов сводится к вычислению первообразной (т.е. к вычислению неопределенных интегралов).

Для вычислений удобна сокращенная запись

$$\mathrm{F(b)–F(a)=F(x)}\Big|_a^b.$$

С помощью этого обозначения формулу (2) записывают так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

**8.Основные свойства определенного интеграла**

1) $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, $k$ - постоянная.

2) $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Эти свойства аналогичны соответствующим свойствам неопределенного интеграла.

Следующее важное свойство определенного интеграла часто используется в приложениях:

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где $c$ – любая точка из $(a,b)$.

Это свойство имеет простой геометрический смысл: если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$ и $a<c<b$, то площадь криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. 4, равна сумме $S_1 + S_2$ площадей составляющих ее меньших криволинейных трапеций.

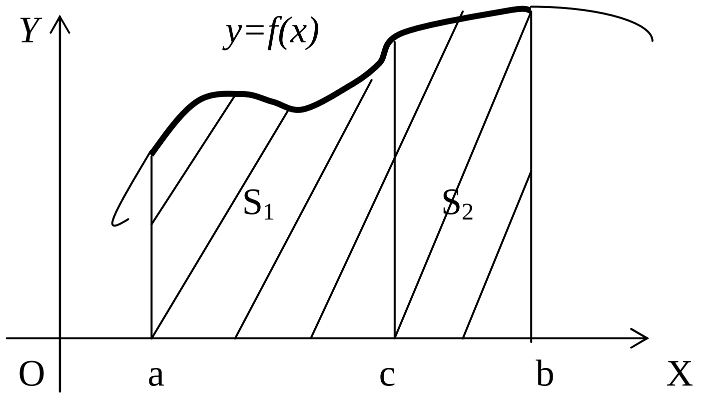



Рис. 4

4) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка $c$ из $(a,b)$, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Геометрически это означает, что между $a$ и $b$ существует такая точка $c$, что площадь криволинейной трапеции (рис. 5) равна площади прямоугольника, основанием которого является отрезок $[a,b]$, а высотой – $f(c)$.

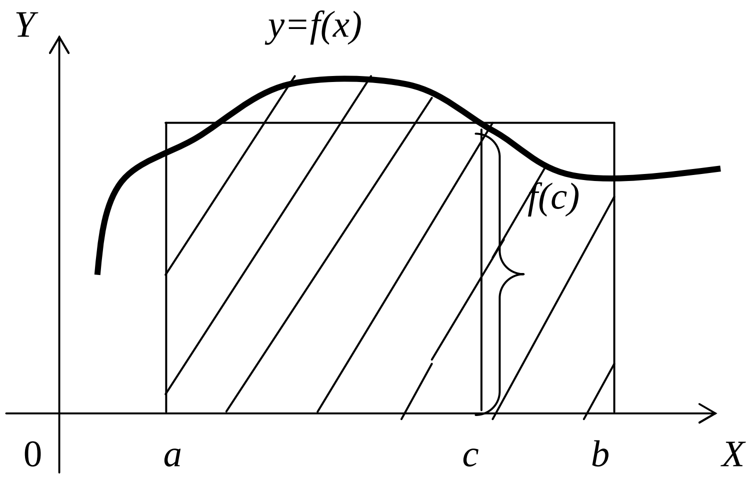



Рис. 5

5) Если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

6) Если $f(x) \leq g(x)$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Это свойство тоже имеет простой геометрический смысл: если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то площадь меньшей криволинейной трапеции *aCDb* (рис. 6) меньше площади большей криволинейной трапеции *aABb*.

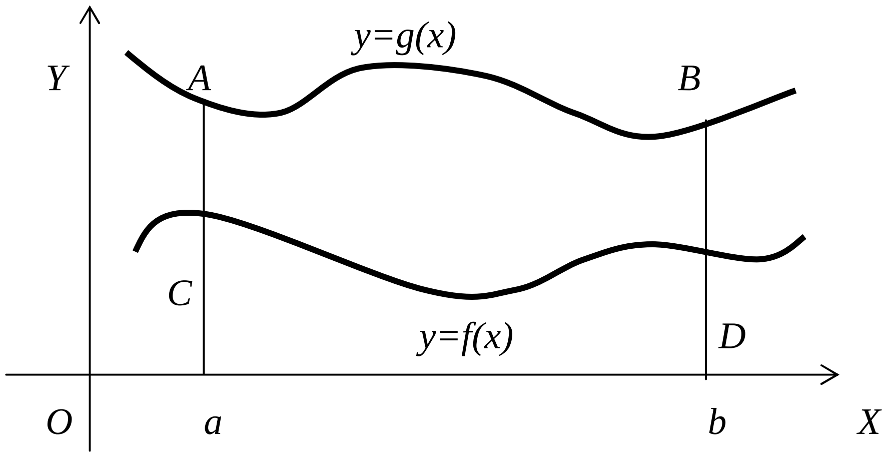



Рис. 6

7) Если $m \leq f(x) \leq M$ на $[a,b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Это свойство легко проиллюстрировать геометрически: если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то оно утверждает, что площадь криволинейной трапеции больше площади прямоугольника *aCDb* (рис. 7) и меньше площади прямоугольника *aABb*.

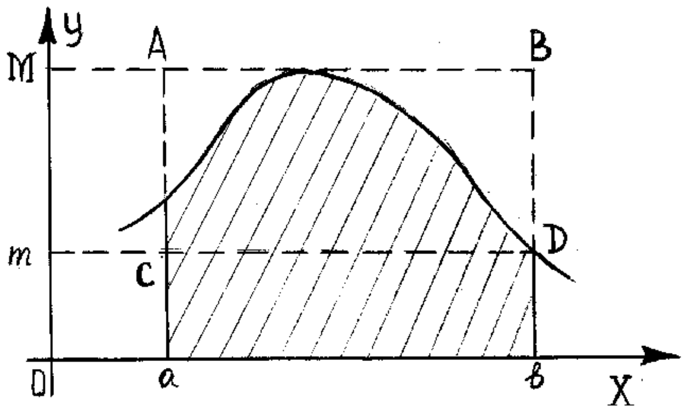



Рис.7

### 9. Основные методы вычисления определенного интеграла

#### 9.1. Непосредственное применение формулы Ньютона-Лейбница

Метод заключается в вычислении первообразной для подынтегральной функции (т.е. в вычислении неопределенного интеграла) и применении затем формулы Ньютона-Лейбница.

**Пример 36**

Вычислить $\int\limits_0^1 (2x+1)^3 dx.$

$$\int (2x+1)^3 dx = \begin{vmatrix} t = 2x+1 \\ dt = 2 \cdot dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int t^3 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{(2x+1)^4}{8} + C.$$

$$\int\limits_0^1 (2x+1) dx = \left. \frac{(2x+1)^4}{8} \right|_0^1 = \frac{3^4}{8} - \frac{1}{8} = 10.$$

**Пример 37**

Вычислить $\int\limits_1^{e^2} \frac{1}{x} dx.$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C,$$

$$\int\limits_1^{e^2} \frac{1}{x} = ln|x| \Big|_1^{e^2} = ln\,e^2 - ln1 = 2\,ln\,e = 2.$$

**Пример 38**

Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} sin\,2xdx.$

$$\int sin\,2xdx = -\frac{1}{2} cos\,2x + C,$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} sin\,2xdx = -\frac{1}{2} cos\,2x \Big|_0^{\pi/2} = \left(-\frac{1}{2} cos\,\pi\right) - \left(-\frac{1}{2} cos\,0\right) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

## 9.2. Замена переменной в определенном интеграле

Метод заключается в переходе к новому аргументу интегрирования путем преобразования подынтегрального выражения по некоторой формуле, при этом пределы интегрирования изменяются, и при вычислении интеграла возврат к старому аргументу не проводится.

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \\ a=\varphi(\alpha) \\ b=\varphi(\beta) \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

**Пример 39**

$$\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}dx = \left| \begin{array}{l} t=2x+1 \\ dt=2dx \\ t=2\cdot 0+1=1 \\ t=2\cdot 1+1=3 \end{array} \right| = \int_1^3 \frac{1}{t^2}\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_1^3 t^{-2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}\Bigg|_1^3 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\Bigg|_1^3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

**Пример 40**

$$\int_1^e \frac{ln\,x}{x}dx = \left| \begin{array}{l} t=ln\,x \\ dt=\frac{1}{x}dx \\ y=ln1=0 \\ t=ln\,e=1 \end{array} \right| = \int_0^1 tdt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

**Пример 41**

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x=2\sin t \\ dx=2\cos tdt \\ 0=2\sin t, t=0 \\ 2=2\sin t \\ 1=\sin t, t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = 2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-0-\sin 0\right) = \pi.$$

### 9.3. Интегрирование по частям для определенного интеграла

Метод заключается в применении формулы интегрирования по частям для определенного интеграла:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

**Пример 42**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{matrix} \right| = x(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}(-\cos\frac{\pi}{2}) - 0(-\cos 0) + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

**Пример 43**

$$\int_1^e ln x dx = \left| \begin{matrix} u = ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = x \end{matrix} \right| = x ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e ln e - 1 ln 1 - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1.$$

### 10. Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла

Из геометрического смысла определенного интеграла вытекает: если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx = S$, где $S$ - площадь криволинейной трапеции (рис.1).

Рассмотрим теперь случай, когда $f(x) \leq 0$ на $[a,b]$. Тогда $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$.

Графики этих функций симметричны относительно оси $Ox$, и потому площадь $aABb$ равна площади $aA,B,b$ (рис.8), а следовательно:

$$\mathrm{S} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \left(-f(x)\right) dx \quad \text{или} \quad \mathrm{S} = -\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x) dx.$$

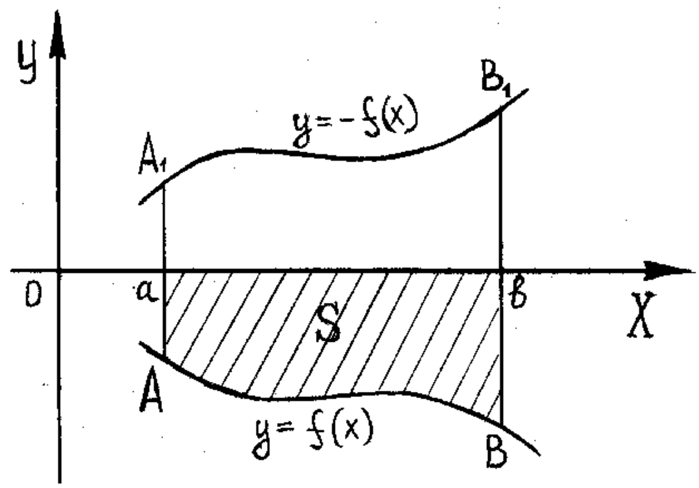



Рис.8

Тогда в общем случае, когда функция $f(x)$ меняет знак на $[a,b]$, как, например, на рис.9, имеем: $S_1+S_2+S_3=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^e f(x)dx$.

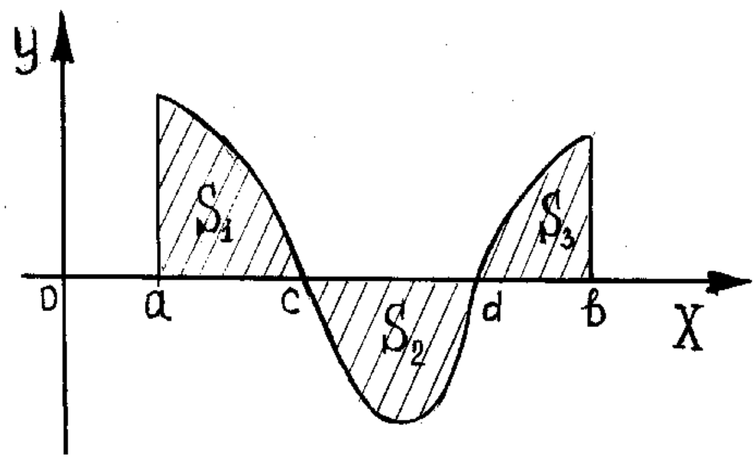



Рис.9

Пусть теперь фигура ограничена графиком функции $f(x)$ (сверху) и $q(x)$(снизу), прямыми $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$ (рис.10). Найдем ее площадь. Для этого перенесем параллельно оси ординат фигуру вверх на расстояние $m$ так, чтобы она оказалась выше оси абсцисс (рис.11). После этого переноса ее ограничивают графики функций $f(x)+m$ и $q(x)+m$.

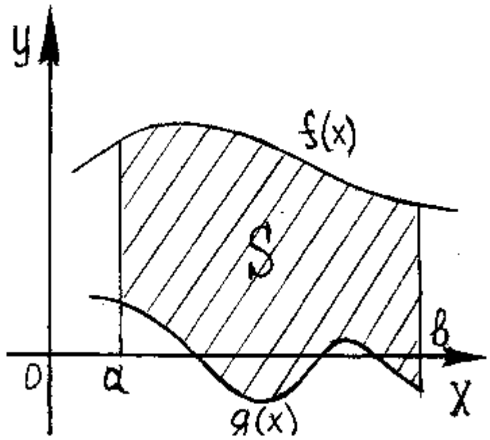


Рис.10

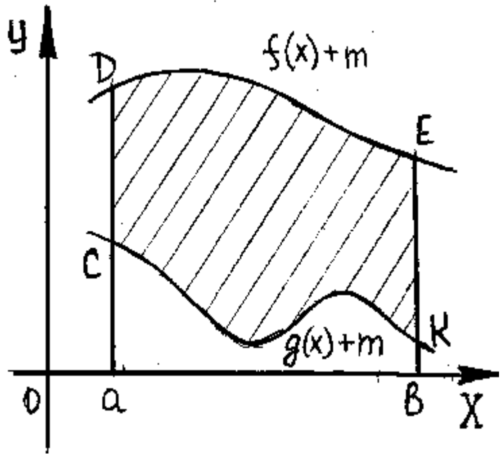


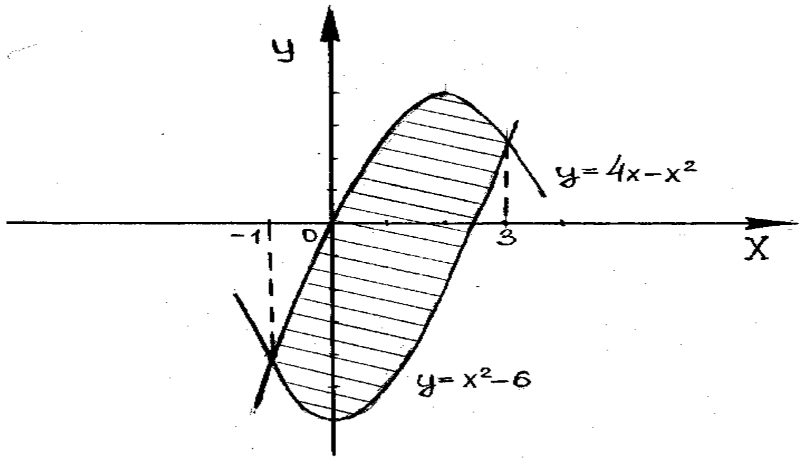
Рис.11

При переносе площадь не меняется, и поэтому $S =$ площ.(aDEb) –площадь

$$(\text{aCKb}) = \int_c^b \left( f(x)+m \right)dx - \int_c^b \left( q(x)+m \right)dx = \int_c^b \left( f(x)+m-q(x)-m \right)dx = \int_c^b \left( f(x)-q(x) \right)dx;$$

$$S = \int_a^b \left( f(x)-q(x) \right)dx\,.$$

**Пример 44** Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = 4x - x^2$ и $y = x^2 - 6$.




Сначала найдем точки пересечения парабол, для чего решим систему уравнений $\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = x^2 - 6 \end{cases}$ (эти точки принадлежат и той, и другой параболе, и поэтому их координаты удовлетворяют одновременно уравнениям обеих парабол).

Из этой системы получаем: $x^2 - 2x - 3 = 0$, откуда $x_1 = -1, x_2 = 3$. Тогда искомая площадь:

$$S=\int_{-1}^{3}\Big((4x-x^2)-(x^2-6)\Big)dx=\int_{-1}^{3}(6+4x-2x^2)dx=(6x+2x^2-\frac{2}{3}x^3)\Big|_{-1}^{3}=$$

$$=(6\cdot 3+2\cdot 3^2-\frac{2}{3}\cdot 3^3)-(6\cdot(-1)+2\cdot(-1)^2-\frac{2}{3}(-1)^3)=21\frac{1}{3}.$$

## 11. Несобственные интегралы

При введении понятия определенного интеграла мы предполагали, что отрезок интегрирования является конечным. Если промежуток интегрирования бесконечен, то требуется специальное определение таких интегралов – они называются **несобственными.**

**Определение.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,+\infty)$. Тогда полагают: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$ Если этот предел равен числу, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется **сходящимся**. Если этот предел равен бесконечности или не существует, то – **расходящимся**.

**Пример 45**

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\lim_{x\to+\infty}\int_1^b x^{-3}dx=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\Bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2},$$

то есть интеграл сходится.

**Пример 46**

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{1}{x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^b\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\big(\ln|b|-\ln 1\big)=+\infty$, то есть интеграл расходится. Есть и другие варианты несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования – они определяются аналогично:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \quad .$$

**Пример 47**

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{0} e^x dx = \lim_{a \to -\infty} \left( e^x \Big|_a^0 \right) = \lim_{a \to -\infty} \left(1 - e^a\right) = 1.$$

**Пример 48**

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left( arctgx \Big|_a^b \right) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left(arctgb - arctga\right) = (\text{см.график}$$

$$arctgx \text{ п. 3)} = \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \pi .$$

**Замечание.** Геометрический смысл интеграла сохраняется и для несобственных интегралов – это «площадь» криволинейной трапеции, «уходящей в бесконечность», ограниченной графиком подынтегральной функции и промежутком интегрирования.

## Примеры выполнения контрольных заданий по разделу «Интегральное исчисление функций одной переменной»

**Задание 1.** Вычислить неопределенные интегралы.

а)

$$\int \frac{\left(2x - \sqrt[3]{x}\right)^2}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{4x^2 - 4x\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{4x^2 - 4x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int \left( \frac{4x^2}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{4x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}} \right) dx =$$

$$= \int \left( 4x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{5}{6}} \right) dx = 4 \cdot \int x^{\frac{1}{2}} dx - 4 \cdot \int x^{-\frac{1}{6}} dx + \int x^{-\frac{5}{6}} dx = 4 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 4 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1} + \frac{x^{-\frac{5}{6}+1}}{-\frac{5}{6}+1} + C =$$

$$= \frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{24}{5} x^{\frac{5}{6}} + 6x^{\frac{1}{6}} + C.$$

б) Метод замены переменной.

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} = \int \frac{1}{1+t^2} dt = (\text{табличный интеграл}) =$$

$$= arctgt + C = arctg(\sin x) + C.$$

$$\int \frac{x^2}{1-2x^3}dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-2x^3 \\ dt = -6x^2dx \\ x^2dx = \dfrac{dt}{-6} \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{-6} = -\frac{1}{6}\int\frac{1}{t}dt = \quad \text{(табличный интеграл)} =$$

$$= -\frac{1}{6}ln|t| + C = -\frac{1}{6}ln\left|1-2x^3\right| + C.$$

в) Метод интегрирования по частям.

$$\int (2-3x)cos3xdx = \left| \begin{array}{ll} u = 2-3x & \mathrm{dv} = \cos 3xdx \\ du = -3xdx & \mathrm{v} = \int \cos 3xdx = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right| =$$

$$= (2-3x)\cdot\frac{1}{3}\sin 3x - \int\frac{1}{3}\sin 3x\cdot(-3)dx = = (2-3x)\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

г) Интегралы специального вида (см.5.1).

$$\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-x}}dx = \left| \begin{array}{l} 1-x = t^3 \\ x = 1-t^3 \\ dx = -3t^2dt \\ t = \sqrt[3]{1-x} \end{array} \right| = \int\frac{1}{1+t}(-3t^2)dt = -3\int\frac{t^2}{t+1}dt = -3\int\frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt =$$

$$= -3\int\frac{(t-1)(t+1)+1}{t+1}dt = -3\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt = -3\left(\int tdt - \int 1\cdot dt + \int\frac{1}{t+1}dt\right) =$$

$$= -3\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C = -3\left(\frac{(\sqrt[3]{1-x})^2}{2} - \sqrt[3]{1-x} + \ln\left|\sqrt[3]{1-x}+1\right|\right) + C.$$

д) Интегралы специального вида (см. 5.2.).

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+10}dx = \int \frac{x+2}{(x+2)^2+6}dx = \begin{vmatrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int \frac{t}{t^2+6}dt = \begin{vmatrix} z = t^2+6 \\ dz = 2+dt \\ tdt = \dfrac{dz}{2} \end{vmatrix} = \int \frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}dz = \frac{1}{2}ln|z| + C = \frac{1}{2}ln\left|t^2+6\right| + C = \frac{1}{2}ln\left|x^2+4x+10\right| + C.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x^2+2x-1)}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x^2+2x+1-2)}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{-\left((x+1)^2-2\right)}}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2-(x+1)^2}}dx = \begin{vmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}^2-t^2}}dt = (\text{ табличный интеграл}) = arcsin\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

**Задание 2.** Вычислить определенные интегралы.

а) Замена переменной в определенном интеграле

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx = \begin{vmatrix} t = 2x+1 \\ dt = 2\cdot dx \\ t = 2\cdot 0+1 = 1 \\ t = 2\cdot 1+1 = 3 \\ x = \dfrac{t-1}{2} \end{vmatrix} = \int_1^3 \frac{\left(\dfrac{t-1}{2}\right)}{\sqrt{t}}\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\int_1^3 \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{4}\left(\int_1^3\left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_1^3 - \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2}\Bigg|_1^3 = \frac{1}{6}\cdot t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^3 - \frac{1}{2}\cdot t^{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^3 = \frac{1}{6}\left(3^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(3^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{6}\left(3\sqrt{3}-1\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

б) Замена переменной в определенном интеграле специального вида ( см. 5.4 и 5.5.).

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} x=\sqrt{3}sint \quad dx=\sqrt{3}costdt \\ 0=\sqrt{3}sint \Rightarrow sint=0 \Rightarrow t=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}sint \Rightarrow sint=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{6} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{(3-3sin^2 t)\sqrt{3-3sin^2 t}} \cdot \sqrt{3}costdt =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{(1-\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 t \cdot \cos t} \cos t dt = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 t} dt =$$

$$= (\text{табличный интеграл}) = \frac{1}{3} tgt \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\left( tg\frac{\pi}{6} - tg0 \right) = \frac{tg\frac{\pi}{6}}{3} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{(2+x^2)\sqrt{2+x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} x=\sqrt{2}\cdot tgt \quad dx=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt \\ 0=\sqrt{2}\cdot tgt \Rightarrow tgt=0 \Rightarrow t=0 \\ \sqrt{2}=\sqrt{2}tgt \Rightarrow tgt=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(2+2tg^2 t)\sqrt{2+2tg^2 t}} \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt =$$

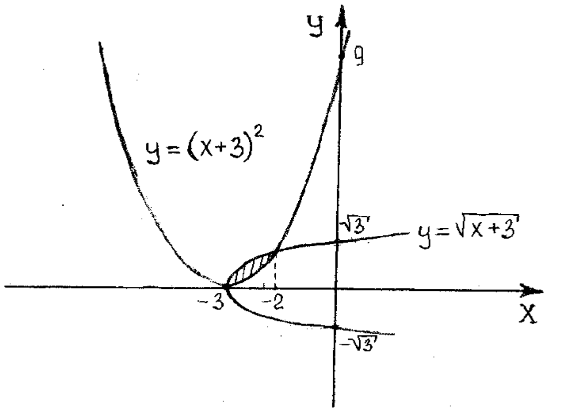
$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+tg^2 t)\sqrt{1+tg^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin 0\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

**Задание 3.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями (сделать рисунок): $y=(x+3)^2$; $y^2 = x+3$.

Найдем точки пересечения линий (парабол).

$$\begin{cases} y=(x+3)^2 \\ y^2 = x+3 \end{cases} \Rightarrow y=(y^2)^2 = y^4 \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -3, \quad x_2 = -2.$$




$$S=\int_{-3}^{-2}\left(\sqrt{x+3}-(x+3)^2\right)dx=\int_{-3}^{-2}\sqrt{x+3}\,dx-\int_{-3}^{-2}x^2dx-6\int_{-3}^{-2}xdx-9\int_{-3}^{-2}dx=\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-3}^{-2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{-2}-6\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{-2}-$$

$$-9x\Big|_{-3}^{-2}=\frac{2}{3}(1-0)-\frac{1}{3}\left((-2)^3-(-3)^3\right)-3\left((-2)^2-(-3)^2\right)-9\left((-2)-(-3)\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot19-3\cdot(-5)-9=\frac{1}{3}.$$

**Задание 4.** Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+6x+11}dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\frac{1}{x^2+6x+11}dx.$$

$$\int\frac{1}{x^2+6x+11}dx=\int\frac{1}{(x^2+6x+9)+2}dx=\int\frac{1}{(x+3)^2+2}dx=\left|\begin{matrix}t=x+3\\ dt=dx\end{matrix}\right|=\int\frac{1}{t^2+(\sqrt{2})^2}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{x+3}{\sqrt{2}}+C.$$

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\frac{1}{x^2+6x+11}dt=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+3}{\sqrt{2}}\Big|_a^b\right)=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{b+3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{a+3}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=(\text{см. п. 3, график функции } y=\mathrm{arctgx})=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

## Варианты контрольных заданий по разделу «Интегральное исчисление функций одной переменной»

**Задание 1.** Вычислить неопределенные интегралы.

1. а) $\int\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^2}dx$, б) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$, в) $\int(1-x)sin\,xdx$,

г) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx,$ д) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+13}dx.$

2. а) $\int \frac{(1-3x)^2}{x\sqrt{x}}dx,$ б) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx,$ в) $\int (x+2)e^{3x}dx,$

г) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+3}}dx,$ д) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$

3. а) $\int \frac{3x^2-5x\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}}dx,$ б) $\int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x}dx,$ в) $\int (4x-1)\sin 2x dx,$

г) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{(3x+1)^3}}dx,$ д) $\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx.$

4. а) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x\sqrt{x}}{x^3}dx,$ б) $\int \frac{x^2}{5+x^3}dx,$ в) $\int (1-2x)e^{-x}dx,$

г) $\int (x-1)\sqrt{x+1}\,dx,$ д) $\int \frac{1}{\sqrt{11+5x-x^2}}dx.$

5. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}+5}{\sqrt{x}}dx,$ б) $\int xe^{2x^2}dx,$ в) $\int (2x-1)\cos 4x dx,$

г) $\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x}}dx,$ д) $\int \frac{x}{x^2+8x+7}dx.$

6. а) $\int \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x}}dx,$ б) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx,$ в) $\int (3x-1)e^{2x}dx,$

г) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{x+1}}dx,$ д) $\int \frac{x}{x^2+4x+8}dx.$

7. а) $\int \frac{(2-\sqrt[3]{x})^2}{x\sqrt{x}}dx,$ б) $\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{5+e^x}}dx,$ в) $\int x\cos 3x dx,$

г) $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx,$ д) $\int \frac{1}{x^2-4x+1}dx.$

8. а) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx,$ б) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx,$ в) $\int (1-x)e^{2x}dx,$

г) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}dx,$ д) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+13}dx.$

9. а) $\int \frac{1-\sqrt{x}e^x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx,$ б) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx,$ в) $\int x^3 \ln x dx,$

г) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx,$ д) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx.$

10. а) $\int \frac{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt{x}}dx,$ б) $\int \frac{x^3}{1-2x^4}dx,$ в) $\int (2x-1)e^{2x}dx,$

г) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}dx,$ д) $\int \frac{2x-1}{x^2-2x+10}dx.$

**Задание 2.** Вычислить определенные интегралы.

1. а) $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx,$ б) $\int_0^5 \frac{1}{\left(25+x^2\right)\sqrt{25+x^2}}dx.$

2. а) $\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{3x-1}}dx,$ б) $\int_0^3 \frac{1}{\left(9+x^2\sqrt{9+x^2}\right)}dx.$

3. а) $\int_2^3 \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}dx,$ б) $\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{1}{\left(5-x^2\right)\sqrt{5-x^2}}dx.$

4. а) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}dx,$ б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}dx.$

5. а) $\int_0^1 \frac{x-2}{\sqrt{x+2}}dx,$ б) $\int_0^4 \frac{1}{\left(16+x^2\right)\sqrt{16+x^2}}dx.$

6. а) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx,$ б) $\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{1}{\left(64-x^2\right)\sqrt{64-x^2}}dx.$

7. а) $\int_0^1 \frac{3x-1}{\sqrt{x+3}}dx,$ б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}dx.$

8. а) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx,$ б) $\int_0^2 \frac{1}{\left(16-x^2\right)\sqrt{16-x^2}}dx.$

9. а) $\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{2x-1}}dx,$ б) $\int_0^2 \frac{1}{\left(4+x^2\right)\sqrt{4+x^2}}dx.$

10. а) $\int\limits_0^1 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}dx,$ б) $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx.$

**Задание 3.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями (сделать рисунок).

1. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x.$
2. $y=(x+1)^2$, $y^2=x+1.$
3. $y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3.$
4. $y=(x-1)^2$, $y^2=x-1.$
5. $y=7-x^2$, $y=x^2-1.$
6. $y=x-x^2+2$, $y=x^2+3x+2.$
7. $y=(x+2)^2$, $y^2=x+2.$
8. $y=6-x^2$, $y=x^2-4x.$
9. $y=(x-2)^2$, $y^2=x-2.$
10. $y=2-x^2$, $y=x^2-6.$

**Задание 4.** Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+5}dx.$
2. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+8}dx.$
3. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}dx.$
4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}dx.$
5. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx.$
6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+10}dx.$
7. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4x+8}dx.$
8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+8}dx.$
9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+13}dx.$
10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+10}dx.$