

Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания к практическим занятиям

Омск – 2002

Составители: Долганов Рудольф Леонидович,
Гарифуллина Елена Владимировна,
Фирдман Александр Исаевич,
Марьина Наталья Григорьевна

Две задачи математического анализа

Первая задача состоит в отыскании производной от заданной функции $y = f(x)$. Напомним, что с помощью производной решаются многие задачи математики и физики. Так, например, если точка движется по закону $S = f(t)$, где t – время, а S – пройденный путь, то скорость движения $V = V(t)$ есть производная от пути по времени, т. е. $V(t) = S'(t) = \frac{dS}{dt}$, а ускорение $a = a(t)$ равно

$a(t) = V'(t) = S''(t) = \frac{d^2S}{dt^2}$. Если масса неоднородного стержня изменяется по закону

$m = m(x)$, то его плотность в точке x есть производная $\rho = \rho(x) = m'(x)$. В геометрии с помощью производной решается задача о проведении касательных к заданным кривым. Эти примеры можно продолжить.

Теперь обратимся к **обратной задаче**: как по заданной производной $y' = f'(x)$ восстановить саму функцию $y = f(x)$?

Как, например, зная скорость движения $V = V(t)$, найти закон изменения пройденного пути $S = S(t)$? Как найти массу стержня переменной плотности $\rho = \rho(x)$? В общем случае задача ставится следующим образом: пусть задана функция $y = F(x)$, производная от которой совпадает с заданной функцией: $F'(x) = f(x)$. Такая функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$. Так, например, если

$f(x) = x^2$, то $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x)$. Если $f(x) = \sin x$, то

$F(x) = -\cos x$, так как $F'(x) = (-\cos x)' = \sin x = f(x)$. Обратите внимание на то, что для заданной функции $f(x)$ **первообразных существует бесконечно много**, так как $F(x)$ есть некоторая первообразная $f(x)$. Любая функция вида $F(x) + C$, где $C = \text{const}$, есть также первообразная $f(x)$, так как $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$.

В силу этого **множество всех первообразных** заданной функции $f(x)$ принято обозначать символом $\int f(x)dx$ и называть **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$. Итак, по определению, $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Примеры. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, так как $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.

$\int \sin x dx = -\cos x + C$, так как $(-\cos x + C)' = \sin x$.

$\int e^x dx = e^x + C$, так как $(e^x + C)' = e^x$.

Приступая к изучению неопределенного интеграла, следует обратить внимание на то, что

1) эта операция многозначная;

2) в техническом отношении интегрирование для студентов представляется более сложным, чем отыскание производных. Чтобы научиться интегрировать, нужна практика. Только решение большого числа разнообразных примеров позволит выработать некоторые навыки в интегрировании;

3) обратите внимание на запись интеграла. Здесь под знаком интеграла стоит дифференциал аргумента функции $f(x)$. Если же задана сложная функция $y = f(x)$, где $u = \varphi(x)$, то все формулы интегрирования имеют смысл только в том случае, когда под знаком интеграла стоит дифференциал $du = \varphi'(x) \cdot dx$. Это обстоятельство нужно иметь в виду постоянно. В формуле $\int f(u)du = F(u) + C$ будем подразумевать, что ищется интеграл от сложной функции $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, x – независимая переменная;

4) существуют шесть тригонометрических функций: $y = \cos x, y = \sin x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x, y = \operatorname{sec} x, y = \operatorname{cosec} x$. Последние две функции определяются как величины, обратные по отношению к $y = \cos x$ и $y = \sin x$, т. е. $\operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}, \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

Это позволяет известные формулы тригонометрии

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ записывать в целом виде:

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{sec}^2 x, 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$.

Таблицы производных и интегралов поэтому имеют более простой вид. При интегрировании гиперболических функций $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$

$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ следует помнить основные формулы, связывающие их:

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$, а также формулы понижения

$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch} 2x), \operatorname{sh}^2 x = -\frac{1}{2}(1 - \operatorname{ch} 2x);$

5) поскольку операции дифференцирования и интегрирования тесно связаны, ниже приводятся основные свойства производной и формулы дифференцирования, а далее – аналогичный материал, касающийся неопределенного интеграла.

Основные правила дифференцирования

1. $c' = 0, c = \operatorname{const}$.
2. $x' = 1, x$ – независимая переменная.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$.
4. $(c \cdot u)' = c \cdot u', c = \operatorname{const}, u = u(x)$.
5. $(u \cdot v)' = u'v + v'u, u = u(x), v = v(x),$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + v' \cdot u \cdot w + w' \cdot u \cdot v, \quad u = u(x), \quad v = v(x), \quad w = w(x).$$

$$6. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' u}{v^2}, \quad u = u(x), \quad v = v(x).$$

7. Производная сложной функции. Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

8. Дифференциал функции. Если $y = f(x)$, то $dy = f'(x) \cdot dx$.

Таблица производных

1. Производная степенной функции $y = u^\alpha$, где $u = u(x)$

$$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'. \quad \text{Частные случаи: } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

2. Производная показательной функции $y = a^u$, $a > 0$, $a \neq 1$,

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'; \quad (e^u)' = e^u \cdot u', \quad \text{так как } \ln e = 1; \quad (e^x)' = e^x, \quad \text{так как } x' = 1.$$

3. Производная логарифмической функции $y = \log_a u$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e; \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad \text{так как } \log_e e = 1; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \text{так как } x' = 1.$$

4. Производные тригонометрических функций

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'; \quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \quad (\operatorname{tg} u)' = \sec^2 u \cdot u' = \frac{u'}{\cos^2 u};$$

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u' = -\frac{u'}{\sin^2 u}; \quad (\sec u)' = \left(\frac{1}{\cos u}\right)' = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u' = \frac{\sin u}{\cos^2 u} \cdot u';$$

$$(\operatorname{cosec} u)' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u \cdot u' = -\frac{\cos u}{\sin^2 u} \cdot u'.$$

5. Производные обратных тригонометрических функций:

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}, \quad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

6. Производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u', \quad (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u',$$

$$(\operatorname{th} u)' = \frac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}, \quad (\operatorname{cth} u)' = -\frac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}.$$

Неопределенный интеграл

Теорема существования. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в заданном промежутке (a, b) , то в этом промежутке она имеет первообразную.

Основные свойства неопределенного интеграла

- $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$.
- $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$.
- $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx, c = \text{const}$.
- $\int d \cdot f(x) = f(x) + C$.
- $\int (f(x) \pm \varphi(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx$.
- Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(x+a) dx = F(x+a) + C, a = \text{const}$.
- Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(kx) dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx) + C, k = \text{const}$.
- Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(kx+a) dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx+a) + C$.

Методы интегрирования

1. Метод замены переменной (способ подстановки)

$$\int f(x) dx = \left. \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

2. Метод интегрирования по частям: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Таблица неопределенных интегралов

1. Интеграл от степенной функции $y = u^\alpha$:

$$\int u^\alpha \cdot du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \text{где } \alpha \neq -1; \quad (1) \quad \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C \quad (\alpha = -2). \quad (2)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \quad \left(\alpha = -\frac{1}{2}\right). \quad (3)$$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.

3. Интеграл от показательной функции $y = a^u, a > 0, a \neq 1$:

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad \int e^u du = e^u + C.$$

4. Интегралы от тригонометрических функций:

$$\int \sin u \cdot du = -\cos u + C;$$

$$\int \cos u \cdot du = \sin u + C;$$

$$\int \operatorname{tg} u \cdot du = -\ln|\cos u| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg} u \cdot du = \ln|\sin u| + C;$$

$$\int \sec u \cdot du = \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C; \quad \int \operatorname{cosec} u \cdot du = \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$$

$$\int \sec^2 u \cdot du = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 u \cdot du = \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

5. Интегралы от гиперболических функций:

$$\int \operatorname{sh} u \cdot du = \operatorname{ch} u + C; \quad \int \operatorname{ch} u \cdot du = \operatorname{sh} u + C;$$

$$\int \operatorname{th} u \cdot du = \ln|\operatorname{ch} u| + C; \quad \int \operatorname{cthu} \cdot du = \ln|\operatorname{sh} u| + C.$$

6. Интегралы, содержащие выражение вида $v^2 \pm a^2$, $a^2 \pm v^2$, $a = \operatorname{const}$:

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C. \quad (5) \quad \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C. \quad (6)$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C. \quad (7) \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C. \quad (8)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C. \quad (9) \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C. \quad (10)$$

7. Часто встречающиеся интегралы:

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + \frac{u \cdot \sqrt{a^2 - u^2}}{2} + C.$$

$$\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C.$$

$$\int e^{ax} \cdot \cos bx \cdot dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \cdot \sin bx + a \cdot \cos bx) + C. \quad (11)$$

$$\int e^{ax} \cdot \sin bx \cdot dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx) + C. \quad (12)$$

$$\int \sec^3 u \cdot du = \int \frac{du}{\cos^3 u} = \frac{1}{2} \sec u \cdot \operatorname{tgu} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \quad (13)$$

$$\int \operatorname{cosec}^3 u \cdot du = \int \frac{du}{\sin^3 u} = -\frac{1}{2} \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctgu} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C. \quad (14)$$

8. Рекуррентные соотношения

$$J_k = \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^k}; \quad J_{k+1} = \frac{1}{2ka^2} \cdot \frac{u}{(u^2 + a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2} \cdot J_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

$$J_k = \int \sin^k u \cdot du; \quad J_{k+1} = \frac{1}{k} \sin^{(k+1)} u \cdot \cos u + \frac{k-1}{k} \cdot J_{k-2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$J_k = \int \cos^k u \cdot du; \quad J_{k+1} = \frac{1}{k} \cos^{(k-1)} u \cdot \sin u + \frac{k-1}{k} \cdot J_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Замечание

1. Во всех формулах подынтегральные функции предполагаются сложными, т. е. аргумент и есть некоторая функция от независимой переменной x : $u = u(x)$. Следует хорошо уяснить, что все формулы верны лишь в том случае, когда подынтегральная функция умножается строго на дифференциал аргумента u , т. е. на du . Так, например, $\int \sin x dx = -\cos x + C$, но $\int \sin x^2 dx \neq -\cos x^2 + C$, так как здесь

$u = x^2$, $du = 2x dx$, чего нет под интегралом. Аналогично $\int e^x dx = e^x + C$, но $\int e^{-x} dx \neq e^{-x} + C$, так как здесь $u = -x$, $du = -dx$, чего нет под интегралом.

Для упрощения записи во всех формулах независимая переменная x опущена.

Например, формула (1) имеет следующий вид: $\int (u(x))^\alpha du = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$. Такая запись затрудняет запоминание формулы.

2. Вся таблица интегралов разбита на восемь групп формул. Деление это, вообще говоря, произвольное, сделано с единственной целью, чтобы можно было быстрее и легче запомнить эти формулы. Впрочем, в большинстве случаев достаточно знать первые шесть групп формул. Седьмая группа выделена потому, что эти интегралы находятся достаточно длинным способом и встречаются на практике редко.

3. Следует научиться работать с рекуррентными соотношениями. Сущность их состоит в том, что, зная интеграл J_k , можно без труда найти интеграл J_{k+1} .

Приведем пример использования формулы (15). Полагая здесь $k = 1$, получим

$$J_1 = \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \quad (\text{табличный интеграл (5)}),$$

$$J_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot a^2} \cdot \frac{u}{u^2 + a^2} + \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1 \cdot a^2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, \quad J_2 = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{u}{u^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} \right) + C.$$

$$\text{При } k = 2 \text{ имеем } J_3 = \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot a^2} \cdot \frac{u}{(u^2 + a^2)^2} + \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2 \cdot a^2} \cdot J_2,$$

$$J_3 = \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^3} = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{u}{(u^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2a^2} \left(\frac{u}{u^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} \right) + C,$$

$$J_3 = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{u}{(u^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \cdot \frac{u}{u^2 + a^2} + \frac{3}{8a^5} \cdot \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

В заключение отметим, что существуют три способа отыскания неопределенных интегралов: интегрирование с помощью табличных формул (он называется иначе «метод подведения под знак дифференциала»), метод замены переменной (иначе: «способ подстановки») и метод интегрирования по частям. Подробно рассмотрим эти методы.

Занятие № 1. Интегрирование по формулам

Цель занятия – усвоить и запомнить формулы 1-4 групп, прежде всего формулы (1) - (3) интегралов от степенных функций. Основная формула (1)

$$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \quad \text{показывает, что при интегрировании степени ее}$$

показатель возрастает на одну единицу. Так, например, $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$,

$$\int \sqrt{x^3} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + C = \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + C.$$

Приведем более сложный пример:

$$J = \int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{\sqrt{x^3} + 3x + 3\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

Здесь воспользовались известным разложением $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
Разделив числитель на знаменатель, получим

$$\begin{aligned} J &= \int x^{7/6} dx + 3 \int x^{2/3} dx + 3 \int x^{1/6} dx + \int x^{-1/3} dx, \\ J &= \frac{x^{7/6+1}}{7/6+1} + 3 \cdot \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} + 3 \cdot \frac{x^{1/6+1}}{1/6+1} + \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + C, \\ J &= \frac{6}{13} \sqrt[6]{x^{13}} + 3 \cdot \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{x^5} + 3 \cdot \frac{6}{7} \cdot \sqrt[6]{x^7} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + C, \\ J &= \frac{6}{13} \cdot x^2 \cdot \sqrt[6]{x} + \frac{9}{5} \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7} \cdot x \cdot \sqrt[6]{x} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + C. \end{aligned}$$

Интеграл $J = \int (7x - 5)^4 dx$ можно найти двумя способами. Так как $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$,

по свойству 8 при $k=7$ и $a=-5$ находим

$$J = \int (7x - 5)^4 dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{(7x - 5)^5}{5} + C = \frac{1}{35} \cdot (7x - 5)^5 + C.$$

Другой способ. Полагая здесь $u = 7x - 5$, $u' = (7x - 5)' dx = 7 dx$, получим

$$\begin{aligned} J &= \int (7x - 5)^4 dx = \frac{1}{7} \int (7x - 5)^4 7 dx = \frac{1}{7} \int (7x - 5)^4 d(7x - 5) = \frac{1}{7} \cdot \frac{(7x - 5)^5}{5} + C = \\ &= \frac{1}{35} (7x - 5)^5 + C. \end{aligned}$$

Говорят, что **интеграл поправлен на 1/7**, иначе говоря, **под знак дифференциала подведено основание $7x - 5$** , чтобы получить точно табличную формулу (1).

Рассмотрим интеграл $J = \int \cos \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^3}$. Полагая здесь $u = \frac{1}{x^2}$,

$$du = \left(\frac{1}{x^2} \right)' dx = -\frac{2}{x^3} dx, \text{ получим } J = -\frac{1}{2} \int \cos \frac{1}{x^2} \cdot \frac{-2dx}{x^3} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \cos \frac{1}{x^2} \cdot d\left(\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \sin \frac{1}{x^2} + C. \text{ Формулы (2) и (3) суть частные случаи}$$

основной формулы (1) при $\alpha = -2$ и $\alpha = -1/2$. Их рекомендуется запомнить, так как они будут часто встречаться в последующем. Приведем примеры.

Так как $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$, $\int \frac{dx}{(x-3)^2} = -\frac{1}{x-3} + C$ (по свойству 6 неопределенного интеграла), $\int \frac{dx}{(4x+1)^2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4x+1} + C$ (свойство 8). Аналогично

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = 2\sqrt{x+2} + C, \int \frac{dx}{\sqrt{3x-1}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x-1} + C, \text{ поскольку } \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C. \text{ Во-}$$

обще свойства 6 - 8 неопределенного интеграла надо хорошо усвоить. Это позволяет находить простейшие интегралы самым коротким способом. Приведем еще несколько примеров.

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + C, \text{ так как здесь } k = -1.$$

$$J = \int \frac{dx}{(2x-1)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} + C, \text{ так как здесь } k = 2.$$

$$J = \int \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + C, \text{ так как здесь } k = 2.$$

$$J = \int \cos\left(\frac{x}{3} - 1\right) dx = 3 \sin\left(\frac{x}{3} - 1\right) + C, \text{ так как здесь } k = \frac{1}{3}.$$

Теперь обратимся к формуле (4): $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$. Она применяется в тех случаях, когда в числителе стоит дифференциал знаменателя, точнее, когда в числителе **может быть получен** дифференциал знаменателя. Приведем примеры.

$$J = \int \frac{x dx}{x^2 + 4}. \text{ Так как } d(x^2 + 4) = (x^2 + 4)' dx = 2x dx, \text{ то}$$

$$J = \int \frac{x dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| + C,$$

$$J = \int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{-\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Рассмотрим интеграл от показательной функции и ее частный, но очень важный случай - интеграл от экспоненты:

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad \int e^u du = e^u + C,$$

$$J = \int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C, \quad \int 4^{x-1} dx = \frac{4^{x-1}}{\ln 4} + C \text{ (свойство 6),}$$

$$J = \int 4^{3x-1} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{4^{3x-1}}{\ln 4} + C \text{ (свойство 8),}$$

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{(a^x - b^x)^2}{(ab)^x} dx = \int \frac{a^{2x} - 2a^x b^x + b^{2x}}{a^x b^x} dx = \int \frac{a^x}{b^x} dx - 2 \int dx = \int \frac{b^x}{a^x} dx = \\
&= \int \left(\frac{a}{b}\right)^x dx - 2x + \int \left(\frac{b}{a}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\ln \frac{a}{b}} - 2x + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln \frac{b}{a}} + C = \\
&= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\ln a - \ln b} - 2x + \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}}{\ln b - \ln a} + C = \frac{1}{\ln a - \ln b} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} \right) - 2x + C.
\end{aligned}$$

$J = \int x \cdot 5^{x^2} dx$. Здесь $u = x^2$, $du = 2x \cdot dx$, поэтому

$$J = \int x \cdot 5^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 5^{x^2} \cdot 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \int 5^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^{x^2}}{\ln 5} + C,$$

$J = \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$. Здесь $u = \frac{1}{x}$, $du = \left(\frac{1}{x}\right)' dx = -\frac{dx}{x^2}$, поэтому

$$J = \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = -\int e^{1/x} \cdot \left(-\frac{dx}{x^2}\right) = -\int e^{1/x} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{1/x} + C.$$

Замечание. Поскольку операция интегрирования является обратной по отношению к операции дифференцирования, полученный ответ всегда можно проверить. Для этого его надо продифференцировать и показать, что получится подынтегральная функция. Так, в последнем примере $(-e^{1/x} + C)' = -(e^{1/x})' = e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{e^{1/x}}{x^2}$.

Обратимся к интегрированию гиперболических функций.

Найти интеграл $J = \int \operatorname{ch}^2 x \cdot dx$.

Так как $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch} 2x)$, получим $J = \frac{1}{2} \int (1 + \operatorname{ch} 2x) dx = \frac{1}{2} (\int dx + \int \operatorname{ch} 2x \cdot dx) =$
 $= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 2x \cdot d(2x) \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x \right) + C = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C.$

Найти интеграл $J = \int \operatorname{sh}^3 x \cdot dx$.

$$\begin{aligned}
J &= \int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{sh} x \cdot dx = \int (\operatorname{ch}^2 - 1) \operatorname{sh} x \cdot dx = \int \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh} x \cdot dx - \int \operatorname{sh} x \cdot dx = \\
&= \int \operatorname{ch}^2 x \cdot d(\operatorname{ch} x) - \operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x + C.
\end{aligned}$$

Упражнения (устно)

Дайте ответы в следующих примерах.

$$J_1 = \int (2x + 3)^3 dx, \quad J_2 = \int \frac{dx}{3x - 1}, \quad J_3 = \int \frac{dx}{(3x - 1)^2},$$

$$J_4 = \int \operatorname{tg} 3x \cdot dx, \quad J_5 = \int \cos \frac{x+1}{2} dx, \quad J_6 = \int \sec^2 \left(1 - \frac{x}{3}\right) dx,$$

$$J_7 = \int 5^{2x+1} dx, \quad J_8 = \int e^{x/2-1} dx, \quad J_9 = \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}.$$

Упражнение

Найти следующие интегралы.

$$J_1 = \int \frac{(2x-1)^2}{\sqrt{x}} dx, \quad J_2 = \int (3t^2 + 1)t \cdot dt, \quad J_3 = \int x \cdot \sin x^2 dx,$$

$$J_4 = \int x^2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - x^3\right) dx, \quad J_5 = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{5-x^4}}, \quad J_6 = \int \frac{t \cdot dt}{\sqrt{2t^2 + 1}},$$

$$J_7 = \int u \cdot 2^{3u^2-1} \cdot du, \quad J_8 = \int x \cdot e^{x^2+a^2} \cdot dx, \quad J_9 = \int (e^{x/2} + e^{-x/2}) dx$$

Задание на дом

$$J_1 = \int \frac{dx}{7x-1}, \quad J_2 = \int \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{x} dx, \quad J_3 = \int \left(\frac{1}{3}\right)^{4-5x} dx,$$

$$J_4 = \int \frac{x dx}{4-x^2}, \quad J_5 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+7}}, \quad J_6 = \int t \cdot \operatorname{tg}(3t^2-1) dt,$$

$$J_7 = \int x^2 e^{x^3-1} dx, \quad J_8 = \int 5^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad J_9 = \int \frac{e^x dx}{e^x - 1}.$$

Занятие № 2. Интегрирование по формулам. Способ подстановки

Цель занятия – усвоить шестую группу формул; овладеть методом замены переменной; научиться брать интегралы, содержащие квадратный трехчлен.

1.К шестой группе формул относятся интегралы функций

$$\frac{1}{u^2 + a^2}, \frac{1}{u^2 - a^2}, \frac{1}{a^2 - u^2}, \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}, \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}, \text{ где } a = \text{const}, u = u(x). \text{ В каждом}$$

примере надо определить, чему равно a и u , найти du и сделать необходимую поправку. Обратите внимание на форму записи.

Примеры.

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 9}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2)^2 + 3^2}} \Big|_{u = x^2, a = 3, du = 2x \cdot dx} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x dx}{\sqrt{(x^2)^2 + 3^2}} = \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + \sqrt{x^4 + 9} \right| + C \quad (\text{формула (5)}). \end{aligned}$$

$$J_2 = \int \frac{x^3 dx}{x^8 + 5} = \int \frac{x^3 dx}{(x^4)^2 + (\sqrt{5})^2} = \left| u = x^4, a = \sqrt{5}, du = 4x^3 dx \right| = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{4x^3 dx}{(x^4)^2 + (\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x^4}{\sqrt{5}} + C \quad (\text{формула (5)}).$$

$$J_3 = \int \frac{5-3x}{\sqrt{4-x^2}} dx = 5 \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} - 3 \int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} = 5 \cdot \arcsin \frac{x}{2} - 3 \int (4-x^2)^{-1/2} x \cdot dx.$$

Последний интеграл степенной, так как $du = (4-x^2)' dx = -2x \cdot dx$, если $u = 4-x^2$, поэтому

$$\int (4-x^2)^{-1/2} x \cdot dx = -\frac{1}{2} \int (4-x^2)^{-1/2} (-2x \cdot dx) = -\frac{1}{2} \int (4-x^2)^{-1/2} d(4-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(4-x^2)^{-1/2+1}}{-1/2+1} = -\sqrt{4-x^2} + C.$$

$$J_3 = 5 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + 3\sqrt{4-x^2} + C.$$

$$J_4 = \int \frac{\arcsin x + 4x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + 4 \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\int \arcsin x \cdot d(\arcsin x) + 4 \int (1-x^2)^{-1/2} x \cdot dx + \arcsin x \quad (\text{формула (8)}).$$

Первый интеграл степенной: $\int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + C$, где $u = \arcsin x$. Второй интеграл также степенной, его можно найти в примере J_3 . Поэтому

$$J_4 = \frac{(\arcsin x)^2}{2} - 2\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

$$J_5 = \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x - 3} = \int \frac{\sin 2x dx}{(\sin^2 x)^2 - (\sqrt{3})^2} = \left| u = \sin^2 x, a = \sqrt{3}, \right.$$

$$\left. du = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \sin 2x \cdot dx \right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \ln \left| \frac{\sin^2 x - \sqrt{3}}{\sin^2 x + \sqrt{3}} \right| + C \quad (\text{формула (6)}).$$

Упражнение. Решить примеры.

$$J_1 = \int \frac{dx}{4+9x^2}, \quad J_2 = \int \frac{dt}{8-5t^2}, \quad J_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{7-2t^2}}, \quad J_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}},$$

$$J_5 = \int \frac{x dx}{4+3x^4}, \quad J_6 = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}, \quad J_7 = \int \frac{t dt}{\sqrt{4-3t^4}}, \quad J_8 = \int \frac{x^3 dx}{1-x^4}.$$

Интегрирование методом замены переменной

При использовании формул $\int f(x)dx = \left| x = \varphi(t); dx = \varphi'(t)dt \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$ необходимо помнить, что все фигурирующие здесь функции $f(x)$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ должны быть непрерывными.

Успех интегрирования целиком зависит от того, насколько удачно выбрана подстановка $x = \varphi(t)$. По крайней мере, надо понимать, что после такой подстановки необходимо получить один из табличных интегралов. Например,

$$J_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} x = t^2, \\ dx = 2t \cdot dt \end{array} \right| = \int \frac{2t dt}{\sqrt{t^2+1}} = 2 \cdot \int \frac{t dt}{t+1} = 2 \cdot \int \frac{(t+1)-1}{t+1} dt = 2 \cdot \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 2 \left(\int dt - \int \frac{dt}{t+1} \right) = 2(t - \ln|t+1|) + C = 2t - 2 \ln|t+1| + C.$$

Теперь вернемся к старой переменной x . При $x = t^2$, $t = \sqrt{x}$, так как $x > 0$, $t > 0$, поэтому $J_1 = 2\sqrt{x} - 2 \ln|\sqrt{x}+1| + C$.

$$J_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} = \left| \begin{array}{l} 2x+1 = t^2, 2x = t^2 - 1, \\ x = \frac{1}{2}(t^2 - 1), dx = t \cdot dt \end{array} \right| = \int \frac{t \cdot dt}{\frac{1}{2}(t^2 - 1) \cdot t} = \int \frac{2dt}{t^2 - 1} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \quad (\text{формула (6)}).$$

Из подстановки следует, что $t = \sqrt{2x+1}$, поэтому $J_2 = \ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right| + C$.

В некоторых примерах подстановка $x = \varphi(t)$ не приводит к цели. Тогда в качестве новой переменной t выбирают часть подинтегральной функции, например,

$$J_3 = \int \frac{dx}{e^x + 1} = \left| \begin{array}{l} e^x + 1 = t, e^x = t - 1, \\ x = \ln|t-1|, dx = \frac{dt}{t-1} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t-1} = \int \frac{dt}{t(t-1)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - t} = \int \frac{dt}{(t-1/2)^2 - (1/2)^2}.$$

Полагая здесь $u = t - 1/2$, $a = 1/4$, по формуле (6) получаем

$$J_3 = \ln \left| \frac{t - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right| + C = \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| + C = \ln \left| \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} \right| + C. \quad J_3 = \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 1} \right| + C.$$

$$J_4 = \int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \, x = \arcsin t, \\ dt = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \, \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-t^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1+t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| + C \quad (\text{формула (9)}).$$

Возвращаясь к старой переменной x , получим $J_4 = \ln \left| \sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x} \right| + C$.

Интегралы, содержащие квадратный трехчлен

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + px + q}, \quad J_2 = \int \frac{(Ax + B)dx}{x^2 + px + q}$$

$$J_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}, \quad J_4 = \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}.$$

Интеграл J_1 путем выделения из трехчлена полного квадрата приводится к одному из табличных интегралов (5) - (7). Пусть, например, надо найти интеграл

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}. \quad \text{Так как } x^2 - 4x + 7 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) + 3 = (x - 2)^2 + (\sqrt{3})^2,$$

найдем

$$J_1 = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \left| \begin{array}{l} x-2=t, \, x=t+2, \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C \quad (\text{формула (5)}).$$

Замечание. Здесь использовалась известная формула $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2 \cdot x \cdot a + a^2$. Если в знаменателе стоит неприведенный трехчлен, то старый коэффициент рекомендуется вынести за знак интеграла, например:

$$J_1 = \int \frac{dx}{6x - 3x^2} = \int \frac{dx}{-3(x^2 - 2x)} = -\frac{1}{3} \cdot \int \frac{dx}{(x-1)^2 - 1^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{x-1-1}{x-1+1} \right| + C =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C.$$

В интеграле J_2 производная знаменателя равна $(x^2 + px + q)' = 2x + p$ - многочлен первой степени, как и числитель $Ax + B$. Поэтому числитель представляем в форме $Ax + B = M(2x + p) + N$, причем числа M и N находим из условий, что

$$2M + N = B. \quad \text{Тогда } J_2 = \int \frac{M(2x + p) + N}{x^2 + px + q} dx = M \cdot \int \frac{(2x + p)dx}{x^2 + px + q} + N \int \frac{dx}{x^2 + px + q}.$$

Первый из этих интегралов – табличный $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$, где $u = x^2 + px + q$. Второй интеграл – только что найденный интеграл J_1 .

Пример. $J_2 = \int \frac{(3x - 2)dx}{x^2 - 3x + 1}$.

Решение. Так как $(x^2 - 3x + 1)' = 2x - 3$, полагаем $3x - 2 = M(2x - 3) + N$, откуда $2M = 3$, $M = 3/2$, $-3M + N = -2$, $N = 5/2$,

$$J_2 = \int \frac{3/2 \cdot (2x - 3) + 5/2}{x^2 - 3x + 1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{(2x - 3)dx}{x^2 - 3x + 1} + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{(x - 3/2)^2 - (\sqrt{5}/2)^2}, \text{ так как}$$

$$x^2 - 3x + 1 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

$$J_2 = \frac{3}{2} \cdot \ln|x^2 - 3x + 1| + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \ln \left| \frac{x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C,$$

$$J_2 = \frac{3}{2} \cdot \ln|x^2 - 3x + 1| + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \ln \left| \frac{2x - 3 - \sqrt{5}}{2x - 3 + \sqrt{5}} \right| + C.$$

Интеграл J_3 после выделения из квадратного трехчлена полного квадрата приводится к одному из табличных интегралов (7), (9), (10) $J_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$. Так как

$$3 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 3) = -(x^2 + 2x + 1 - 1 - 3) = -((x + 1)^2 - 4) = 4 - (x + 1)^2,$$

$$J_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - (x + 1)^2}} = \arcsin \frac{x + 1}{2} + C. \text{ Интеграл } J_4 \text{ находится подобно интегралу}$$

J_2 . Выделив из трехчлена полный квадрат, получим

$$J_4 = \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} = \int \frac{M(2x + p) + N}{\sqrt{x^2 + px + q}} dx = M \int \frac{(2x + p)dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} + N \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}. \text{ Пер-}$$

вый из них – это табличный интеграл (3) $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$, а второй – только что найденный интеграл J_3 .

$J_4 = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$. Так как $(x^2 - 3x + 2)' = 2x - 3$, получим $x = M(2x - 3) + N$, откуда $2M = 1$, $-3M + N = 0$, $M = 1/2$, $N = 3/2$.

$$J_4 = \int \frac{1/2(2x - 3) + 3/2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x - 3)dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} + \frac{3}{2} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(x - 3/2)^2 - (\sqrt{5}/3)^2}}, \text{ так как}$$

$$x^2 - 3x + 2 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} \right) - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{5}{4}.$$

$$J_4 = 1/2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2 - 3x + 2} + 3/2 \cdot \ln \left| x - 3/2 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right| + C \text{ (формула (10)).}$$

Замечание. Нахождение чисел M и N основано на известном свойстве многочленов: два многочлена степени « n » тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях « x » и равны их свободные члены. Поэтому из условия $Ax + B = M(2x + p) + N$ следует, что

$$Ax + B = 2M \cdot x + (Mp + N), \text{ откуда } A = 2M, B = Mp + N, \text{ т. е. } M = \frac{A}{2}, N = B - Mp.$$

Впрочем в интегралах J_2 и J_4 выделение из числителя дифференциала трехчлена можно провести прямым путем. Пусть, например, надо найти интеграл

$$J_4 = \frac{(5x - 1)dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 7}}. \text{ Здесь } d(x^2 - 4x + 7) = (2x - 4)dx.$$

$$\text{Поэтому } 5x - 1 = 5 \cdot \left(x - \frac{1}{5} \right) = \frac{5}{2} \cdot \left(2 \cdot x - \frac{2}{5} \right) = \frac{5}{2} \cdot \left((2 \cdot x - 4) + 4 - \frac{2}{5} \right) =$$

$$= 5/2 \cdot \left((2x - 4) + \frac{18}{5} \right) = 5/2 \cdot (2x - 4) + 9,$$

$$J_4 = \int \frac{5/2 \cdot (2x - 4) + 9}{\sqrt{x^2 - 4x + 7}} dx = \frac{5}{2} \cdot \int \frac{(2x - 4) dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 7}} + 9 \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(x - 2)^2 + (\sqrt{3})^2}} =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2 - 4x + 7} + 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x - 2}{\sqrt{3}} + C.$$

$$J_4 = 5 \cdot \sqrt{x^2 - 4x + 7} + 3\sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x - 2}{\sqrt{3}} + C.$$

Упражнение

Найти интегралы

$$J_1 = \int \frac{x dx}{x^2 + 4}, \quad J_2 = \int \frac{(2x - 7) dx}{\sqrt{x^2 + 6x - 4}}, \quad J_3 = \int \frac{(x - 1) dx}{x^2 + 3x - 1},$$

$$J_4 = \int \frac{(1 + x) dx}{1 + \sqrt{x}}, \quad J_5 = \int \frac{e^x dx}{e^x + 1}, \quad J_6 = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

Занятие № 3. Интегрирование по частям

Цель занятия – научиться пользоваться формулой $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ и применять ее к каждому из рассмотренных ниже классов функций.

Если заданный интеграл $J = \int f(x) dx$ не может быть найден рассмотренными выше способами, то подынтегральное выражение $f(x) dx$ разбивают на два сомно-

жителя (u и dv) таким образом, чтобы интеграл $\int v \cdot du$ был табличным или сводился к табличному. Единого правила для этого не существует, однако можно провести некоторую классификацию интегралов, которые берутся по частям.

1. Интегралы, содержащие произведение многочлена $P_n(x)$ на тригонометрические или показательные функции. Более точно к **первому классу** относятся интегралы вида

$$J_1 = \int P_n(x) \cdot \cos bx \cdot dx, \quad J_2 = \int P_n(x) \cdot \sin bx \cdot dx,$$

$$J_3 = \int P_n(x) \cdot a^{bx} dx, \quad J_4 = \int P_n(x) \cdot e^{bx} dx.$$

Так как интегралы от $\cos bx$, $\sin bx$, a^{bx} , e^{bx} по существу табличные, то в этих примерах мешает интегрированию многочлен $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$. От него можно освободиться путем n -кратного дифференцирования, так как при каждом дифференцировании степень многочлена понижается на одну единицу. Поэтому во всех примерах в качестве функции u берут многочлен, т.е. полагают, что $u = P_n(x)$.

Приведем примеры.

$$J_1 = \int (2x - 1) \cos 3x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x - 1, \quad dv = \cos 3x \cdot dx, \\ du = 2 \cdot dx \quad \leftrightarrow \quad v = \int \cos 3x \cdot dx = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} (2x - 1) \cdot \sin 3x - \int \frac{1}{3} \cdot \sin 3x \cdot 2 dx = \frac{1}{3} (2x - 1) \cdot \sin 3x - \frac{2}{3} \int \sin 3x \cdot dx.$$

$$J_1 = \frac{1}{3} \cdot (2x - 1) \cdot \sin 3x + \frac{2}{9} \cdot \cos 3x + C,$$

$$J_2 = \int x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad du = e^{-\frac{1}{2}x} dx \\ du = 2x \cdot dx \quad \leftrightarrow \quad v = \int e^{-\frac{1}{2}x} dx = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \end{array} \right| =$$

$$= -2x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - \int \left(-2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \right) \cdot 2x \cdot dx = -2x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 4 \cdot \int x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} dx.$$

Окончательно можно записать:

$$J_4 = \int x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} dx = -2x^2 e^{-\frac{1}{2}x} + 4 \left(-2x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 4e^{-\frac{1}{2}x} \right) + C,$$

$$J_4 = -2x^2 e^{-\frac{1}{2}x} - 8x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 16 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + C = -2e^{-\frac{1}{2}x} (x^2 + 4x + 8) + C.$$

Замечание. Обратите внимание, что здесь был дан одночлен второй степени, т.е. $P_2(x) = x^2$. Поэтому формула интегрирования по частям применялась дважды.

2. Так называемые **циклические интегралы**. К ним относятся интегралы вида

$$J_1 = \int e^{ax} \cos bx dx, \quad J_2 = \int e^{ax} \sin bx dx,$$

$$J_3 = \int \sec^3 bx \, dx = \int \frac{dx}{\cos^3 bx}, \quad J_4 = \int \operatorname{cosec}^3 bx \, dx = \int \frac{dx}{\sin^3 bx}.$$

В интегралах J_1 и J_2 надо дважды применить формулу интегрирования по частям, причем разбиение подынтегрального выражения на u и dv можно выполнить по-разному. Найдем, например, интеграл J_1 .

$$J_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad dv = \cos bx \cdot dx, \\ du = a \cdot e^{ax} dx \quad \longleftrightarrow \quad v = \frac{1}{b} \sin bx \end{array} \right| = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \cdot dx.$$

Повторяем этот процесс.

$$\int e^{ax} \sin bx \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad dv = \sin bx \cdot dx, \\ du = a \cdot e^{ax} dx \quad \longleftrightarrow \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right| = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \cdot dx.$$

$$J_1 = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \left(-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \cdot dx \right).$$

Здесь в правой части находится исходный интеграл J_1 .

$$J_1 = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \cdot J_1. \text{ Решив это уравнение относительно } J_1, \text{ найдем}$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \cdot J_1 = e^{ax} \left(\frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} \cos bx \right), \quad \frac{a^2 + b^2}{b^2} J_1 = \frac{e^{ax}}{b^2} (b \cdot \sin bx + a \cdot \cos bx),$$

$$J_1 = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \cdot \sin bx + a \cdot \cos bx) + C.$$

Аналогично доказывается, что интеграл J_2 определяется формулой

$$J_2 = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx) + C. \text{ Для нахождения интегралов } J_3, J_4 \text{ достаточно}$$

один раз применить формулу интегрирования по частям, а затем воспользоваться формулами тригонометрии. Например,

$$J_3 = \int \sec^3 x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = \sec x, \quad dv = \sec^2 x \cdot dx \\ du = \sec x \cdot \operatorname{tg} x \cdot dx, \quad v = \int \sec^2 x \cdot dx = \operatorname{tg} x \end{array} \right| =$$

$$= \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec x \cdot dx.$$

Так как $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, то $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$, поэтому

$$J_3 = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \cdot dx = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \cdot dx + \int \sec x \cdot dx,$$

$$J_3 = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - J_3 + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|. \text{ Отсюда следует, что}$$

$$2J_3 = \sec x \cdot \operatorname{tg} x + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + 2C$$

$J_3 = \frac{1}{2} \sec x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$. Как видно, циклические интегралы находятся

довольно громоздким способом, поэтому они внесены в таблицу интегралов под номерами (11) – (14).

3. К **третьему классу** относятся некоторые интегралы, содержащие аркусы или логарифмы в сочетании с многочленами: $J_1 = \int P_n(x) \arcsin bx \cdot dx$,

$J_2 = \int P_n(x) \ln^k bx \cdot dx, \dots$ Так как в таблице нет интегралов от аркусов или логарифмов, то эти функции надо «убить» с помощью дифференцирования. Поэтому в качестве функции u берем $u = \arcsin bx$ или $u = \ln^k bx$.

$$J_1 = \int \arcsin x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \leftarrow \rightarrow \quad v = x \end{array} \right| = x \cdot \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \cdot \arcsin x - \int (1-x)^{-1/2} x \cdot dx = x \cdot \arcsin x + 1/2 \cdot \int (1-x^2)^{-1/2} \cdot d(1-x^2) =$$

$$= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + C.$$

$$J_1 = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$J_2 = \int x \cdot \ln^2 x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad dv = x \cdot dx \\ du = 2 \ln x \frac{dx}{x} \quad \leftarrow \rightarrow \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int x \cdot \ln x \cdot dx.$$

Полученный интеграл снова берем по частям.

$$\int x \cdot \ln x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C.$$

Окончательно получаем $J_2 = \int x \cdot \ln^2 x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C,$

$$J_2 = \int x \cdot \ln^2 x \cdot dx = \frac{x^2}{4} (2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + C.$$

Замечание. Указанные три класса не исчерпывают многообразия всех случаев применения формулы интегрирования по частям. Например, интеграл

$J = \int \sin \ln x \cdot dx$ относится к числу циклических. Действительно, полагая

$u = \sin \ln x$, $dv = dx$ получим $du = \cos \ln x \frac{dx}{x}$, $v = x$,

$$J = x \cdot \sin \ln x - \int x \cdot \cos \ln x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \sin \ln x - \int \cos \ln x \cdot dx .$$

Полученный интеграл снова находим по частям

$$\int \cos \ln x \cdot dx = \left. \begin{array}{l} u = \cos \ln x, \quad dv = dx \\ du = -\sin \ln x \frac{dx}{x}, \quad v = x \end{array} \right| = x \cdot \cos \ln x + \int \sin \ln x \cdot dx .$$

$$\text{Итак, } \int \sin \ln x \cdot dx = x \cdot \sin \ln x - x \cdot \cos \ln x - \int \sin \ln x \cdot dx .$$

$$\text{Отсюда } 2 \int \sin \ln x \cdot dx = x \cdot (\sin \ln x - \cos \ln x),$$

$$\int \sin \ln x \cdot dx = \frac{1}{2} x \cdot (\sin \ln x - \cos \ln x) + C .$$

Замечание. Во многих случаях приходится применять оба способа – замену переменной и интегрирование по частям, например, $J = \int x \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot dx = \left| x = t^2, \right.$

$$dx = 2t \cdot dt \left| = \int t^2 \cdot e^t \cdot 2t \cdot dt = 2 \int t^3 \cdot e^t \cdot dt .$$

Интегрируя по частям трижды, находим, что

$$J = e^t (t^3 - 3t^2 + 6t - 6) + C, \quad \text{где } t = \sqrt{x} . \text{ После подстановки}$$

$$J = e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x}^3 - 3x + 6\sqrt{x} - 6) + C .$$

Занятие № 4. Интегрирование рациональных дробей

Цель занятия – научиться разлагать рациональные дроби на простейшие, научиться интегрировать простейшие рациональные дроби.

Изучив оба метода интегрирования: замену переменной и интегрирование по частям, перейдем к нахождению интегралов от различных классов элементарных функций.

Определение. Рациональной дробью называется отношение двух многочленов:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n} .$$

В последующем постоянно предполагается, что дробь $R(x)$ **несократима**, т.е. многочлены $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ не имеют общих корней. Рациональная дробь $R(x)$ называется **правильной**, если $m < n$, и **неправильной**, если $m \geq n$. Рассмотрим несколько примеров.

$$R_1(x) = \frac{1}{x^2 - 3}, \quad R_2(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 4x + 4}, \quad R_3(x) = \frac{x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 7}{x^3 - 2x^2 + 4x + 1} .$$

Здесь дробь $R_1(x)$ правильная, так как $m = 0$, $n = 2$; дробь $R_2(x)$ также правильная, так как $m = 1$, $n = 2$; дробь $R_3(x)$ неправильная, так как $m = 5$, $n = 3$. Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель, можно получить целую часть этой дроби – многочлен степени $m - n$, плюс некоторую правильную рациональную дробь. Таким образом, неправильная рациональная дробь представлена в виде

$R(x) = S_{m-n}(x) + R_0(x)$, где $S_{m-n}(x)$ - многочлен степени $m - n$, а $R_0(x)$ - правильная рациональная дробь.

Пример. Выделить целую часть дроби $R_3(x) = \frac{x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 7}{x^3 - 2x^2 + 4x + 1}$.

Делим числитель на знаменатель «углом»:

$$\begin{array}{r|l} -x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 7 & x^3 - 2x^2 + 4x + 1 \\ \hline x^5 - 2x^4 + 4x^3 + x^2 & x^2 + 2x - 4 \quad (\text{частное}) \\ \hline -2x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 7 & \\ \hline 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 2x & \\ \hline -4x^3 - 4x^2 - 2x - 7 & \\ \hline -4x^3 + 8x^2 - 16x - 4 & \\ \hline -12x^2 + 14x - 3 & \text{(остаток)} \end{array}$$

$$R_3(x) = \frac{x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 7}{x^3 - 2x^2 + 4x + 1} = x^2 + 2x - 4 + \frac{-12x^2 + 14x - 3}{x^3 - 2x^2 + 4x + 1}.$$

Замечание. В простейших случаях, когда, например, $m = n = 1$, эту работу можно выполнить быстрее:

$$R_1(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1},$$

$$R_2(x) = \frac{3x+5}{x-1} = \frac{(3x-3)+5+3}{x-1} = \frac{3(x-1)+8}{x-1} = 3 + \frac{8}{x-1}.$$

Поскольку интегрирование многочлена не представляет труда, то по существу, дело сводится к интегрированию правильных рациональных дробей. Для этого потребуются некоторые новые понятия.

Хорошо известно, что квадратный трехчлен с вещественными корнями x_1 и x_2 разлагается на линейные множители: $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$. В общем случае многочлен степени n разлагается на произведение линейных и квадратных множителей вида

$$P_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_2)^k \cdot (x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_2x + q_2)^e,$$

причем указанные трехчлены не имеют вещественных корней. При этом говорят, что корень $x = x_1$ - **простой**, корень $x = x_2$ имеет **кратность** k .

Примеры

Многочлен $P_3(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ имеет простые вещественные корни

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1.$

Решение. Многочлен $P_4(x) = x^2(x+2)(x^2-x+4)$ имеет вещественный простой корень $x = -2$; двукратный корень $x = 0$.

Определение. Следующие рациональные дроби называются **простейшими первого, второго, третьего и четвертого типов**:

$$R_1(x) = \frac{A}{x - x_0}, \quad R_2(x) = \frac{A}{(x - x_0)^k}$$
$$R_3(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}, \quad R_4(x) = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}.$$

Здесь A, B, p, q, k, x_0 - заданные числа, $k \in \mathbb{N}$.

В последующем постоянно предполагается, что трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней и, следовательно, не разлагается на линейные множители.

Примеры. Рассмотрим дроби

$$R_1(x) = \frac{1}{x+1}, \quad R_2(x) = \frac{3}{(x-1)^2}, \quad R_3(x) = \frac{1}{x^2-4x+8}, \quad R_4(x) = \frac{2x-1}{(x^2-4x+8)^2}.$$

Здесь $R_1(x)$ - дробь первого типа, причем $x_0 = -2$, $R_2(x)$ - дробь второго типа, где $x_0 = 1, k = 2$. $R_3(x)$ - дробь третьего типа, где $A = 0, B = 1$, причем трехчлен $x^2 - 4x + 8$ вещественных корней не имеет. Дробь $R_4(x)$ принадлежит к четвертому типу, где $A = 2, B = -1, k = 2$.

Дроби $R_1(x) = 1/x$ и $R_2(x) = 1/x^3$ принадлежат соответственно к первому и второму типам, причем $x_0 = 0$.

Теорема о разложении рациональной дроби. Всякая правильная рациональная дробь разлагается в сумму простейших дробей первого – четвертого типов. При этом если $x = x_0$ - **простой** вещественный корень знаменателя $P_n(x)$, то в разложении ему соответствует дробь первого типа

$\frac{A}{x - x_0}$; если $x = x_0$ - вещественный корень кратностью k , то в разложении ему соответствует сумма k дробей первого и второго типов:

$\frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - x_0)^k}$; если в знаменателе $P_n(x)$ имеется трехчлен

$x^2 + p_1x + q_1$ без вещественных корней, то в разложении дроби ему соответствует

дробь третьего типа $\frac{Ax + B}{x^2 + p_1x + q_1}$; если, наконец, знаменатель $P_n(x)$ содержит

множитель $(x^2 + p_2x + q_2)^k$, то в разложении ему соответствует сумма « k » дробей третьего и четвертого типов:

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + p_2x + q_2} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_c}{(x^2 + p_2x + q_2)^k}.$$

Таким образом, разложение дроби $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ существенно зависит от того, какие корни имеет знаменатель $P_n(x)$. Поэтому разложение рекомендуется проводить по следующей схеме.

1. Найти все корни знаменателя $P_n(x)$ и определить их кратность.
2. Написать разложение $P_n(x)$ на линейные и квадратные множители.
3. Написать сумму простейших дробей в соответствии с полученным разложением знаменателя.

Пример 1. Разложить дробь $R_1(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x^3 - 2x^2 + x}$.

Решение. Здесь знаменатель имеет разложение $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$. Отсюда следует, что $x_1 = 0$ - простой вещественный корень, ему соответствует дробь $\frac{A}{x}$; $x_2 = 1$ - вещественный двукратный корень, ему

соответствует сумма дробей $\frac{A}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$. Поэтому данная дробь представлена

$$\text{суммой } R_1(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Пример 2. Разложить дробь $R_2(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$.

Решение. Здесь $x^3 + 1 = (x+1) \cdot (x^2 - x + 1)$, причем трехчлен вещественных корней не имеет, поэтому $R_2(x) = \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$.

Пример 3. Разложить дробь $R(x) = \frac{2x-1}{(x^2-4) \cdot (x^2+4)}$.

Решение. Здесь знаменатель $P_4(x) = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) = (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x^2 + 4)$ имеет вещественные простые корни: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Двучлен $x^2 + 4$ вещественных корней не имеет: если $x^2 + 4 = 0$, то $x^2 = -4$, $x = \pm\sqrt{-4}$. Поэтому разложение дроби имеет вид

$$R(x) = \frac{2x-1}{(x^2-4) \cdot (x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Теперь перейдем к нахождению неопределенных **коэффициентов** разложения: A , B , C , ... Существуют **два способа** их определения. Поскольку оба способа достаточно простые, рассмотрим их на конкретных примерах.

Первый способ. Дробь $R_1(x)$ представлена в виде

$$R_1(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}.$$

Поскольку здесь знаменатели равны, то должны быть равны и числители.

$2x^2 - 3x - 3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$. Имеет место равенство двух многочленов, которое выполняется тождественно, т.е. при любых значениях «х».

Пусть, например, $x=0$, тогда $-3=A$, $A=-3$; при $x=1$ $-4=C$, $C=-4$; при $x=-1$ $2=4A+2B-C$, $B=5$. Таким образом, получили разложение дроби

$$R_1(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x^3 - 2x^2 + x} = -\frac{3}{x} + \frac{5}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2}.$$

Замечание. Нахождение неопределенных коэффициентов A, B, C, \dots упрощается, если в качестве значений «х» брать корни знаменателя.

Второй способ покажем на следующем примере:

$$R_2(x) = \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+C) \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x^2-x+1)},$$

$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$. В правой части раскроем скобки и приведем подобные члены, тогда $1 = (A+B) \cdot x^2 + (-A+B+C)x + (A+C)$ или

$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и свободные члены, получаем систему линейных уравнений относительно A, B, C : $A+B=0$, $-A+B+C=0$, $A+C=1$. Решив эту систему способом подстановки (или по формулам Крамера), получим

$B=-A$, $C=1-A$. Подставим эти значения во второе равенство: $-A-A+1-A=0$, $3A=1$, $A=1/3$, $B=-1/2$, $C=2/3$. Получаем разложение дроби

$$R_2(x) = \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{-1/3 \cdot x + 2/3}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

Замечание. Результат вычислений всегда можно проверить. Так, в последнем примере

$$R_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2-x+1-x^2-x+2x+2}{(x+1) \cdot (x^2-x+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{x^3+1} = \frac{1}{x^3+1}.$$

Упражнение. Разложить на простейшие дробь $R_3(x) = \frac{2x-1}{(x^2-4) \cdot (x^2+4)}$. Раз-

ложив дробь $R(x)$ на простейшие и проинтегрировав полученное равенство, получим в правой части (в общем случае) сумму следующих четырех интегралов:

$$J_1 = \int \frac{A}{x-x_0} dx, \quad J_2 = \int \frac{A}{(x-x_0)^k} dx,$$

$$J_3 = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx, \quad J_4 = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx$$

Первый из них по существу табличный: $J_1 = A \cdot \int \frac{dx}{x-x_0} = A \cdot \ln|x-x_0| + C$.

Второй интеграл степенной:

$$J_2 = A \cdot \int \frac{dx}{(x - x_0)^k} = A \cdot \int (x - x_0)^{-k} \cdot dx = A \cdot \frac{(x - x_0)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

Третий интеграл был рассмотрен выше.

Рассмотрим подробнее интеграл J_4 , $k \geq 2$. Так как $(x^2 + px + q)' = 2x + p$, числитель представим в виде $Ax + B = M(2x + p) + N$,

$$J_4 = \int \frac{M(2x + p) + N}{(x^2 + px + q)^k} dx = M \cdot \int \frac{(2x + p)dx}{(x^2 + px + q)^k} + N \cdot \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = M \cdot J_0^* + N \cdot J_k^*.$$

Интеграл J_0^* степенной, так как

$$J_0^* = \int (x^2 + px + q)^k \cdot d(x^2 + px + q) = \frac{(x^2 + px + q)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

Для нахождения интеграла J_k выделим из трехчлена полный квадрат:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} = u^2 + a^2, \quad u = x + \frac{p}{2}, \quad a = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

Тогда $J_k = \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^k}$. Этот интеграл находится с помощью рекуррентного соотношения (15). Впрочем интеграл может быть найден с помощью тригонометрической подстановки $u = a \cdot \operatorname{tg} t$, $du = a \sec^2 t \cdot dt$.

Пример. Найти интеграл $J = \int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$.

Решение. Так как $(x^2 + 2x + 2)' = 2x + 2$, получим $x - 1 = M \cdot (2x + 2) + N$. Тогда $2M = 1$, $2M + N = -1$, $M = 1/2$, $N = -2$, $x - 1 = 1/2 \cdot (2x + 2) - 2$.

$$J = \int \frac{(2x + 2)/2 - 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{(2x + 2)dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} - 2 \cdot \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int (x^2 + 2x + 2)^{-2} \cdot d(x^2 + 2x + 2) - 2 \cdot \int \frac{dx}{((x + 1)^2 + 1^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 2x + 2)^{-1}}{-1} - 2 \cdot \int \frac{du}{(u^2 + 1^2)^2}, \quad \text{где } u = x + 1.$$

$J = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - 2 \cdot J_2$. Полагая в формуле (15) $k = 1$, получим

$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{(u^2 + 1)} + \frac{1}{2} \cdot J_1, \quad \text{где } J_1 = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \operatorname{arctg} u,$$

$$J_2 = \frac{u}{2(u^2 + 1)} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} u = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u}{u^2 + 1} + \operatorname{arctg} u \right), \quad u = x + 1. \quad \text{Окончательно находим}$$

$$J = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} - \operatorname{arctg}(x+1) + C,$$

$$J = -\frac{2x+3}{2(x^2 + 2x + 2)} - \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Для сравнения найдем $J_2 = \int \frac{du}{(u^2 + 1)^2}$, где $u = x + 1$ с помощью подстановки

$u = \operatorname{tg} t$, $du = \sec^2 t \cdot dt$. Тогда $u^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 t + 1 = \sec^2 t$. Поэтому

$$J_2 = \int \frac{\sec^2 t \cdot dt}{\sec^4 t} = \int \frac{dt}{\sec^2 t} = \int \cos^2 t \cdot dt. \text{ Так как } 1 + \cos 2t = 2\cos^2 t, \text{ получим}$$

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}, J_2 = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \int dt + \frac{1}{2} \cdot \int \cos 2t \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{4} \sin 2t + C.$$

Из подстановки следует, что $t = \operatorname{arctg} u = \operatorname{arctg}(x+1)$,

$$\sin 2t = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t = 2 \cdot \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = 2 \cdot \frac{2u}{1 + u^2} = \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 2},$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{(x+1)}{2(x^2 + 2x + 2)} + C.$$

Решить примеры

$$J_1 = \int \frac{x^3 - 2}{x^4 - 2x^2 - 8}, \quad J_2 = \int \frac{3x - 7}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx,$$

$$J_3 = \int \frac{x^2 - x - 1}{x^4 - x} dx, \quad J_4 = \int \frac{2x + 1}{(x^2 - 4x + 5)^2}.$$

Занятие № 5. Интегрирование иррациональных функций

Цель занятия - научиться брать интегралы видов:

$$J_1 = \int f(x, \sqrt[m]{x^p}, \dots, \sqrt[n]{x^q}) \cdot dx, \quad J_2 = \int f(x, \sqrt[m]{(ax+b)^p}, \dots, \sqrt[n]{(ax+b)^q}) dx,$$

$$J_3 = \int f\left(x, \sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p}, \dots, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q}\right) \cdot dx, \quad J_4 = \int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \cdot dx,$$

$$J_5 = \int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) \cdot dx, \quad J_6 = \int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \cdot dx.$$

Здесь предполагается, что подынтегральная функция f рациональна относительно всех своих аргументов. Эти интегралы находятся по одной схеме: необходимо выбрать подстановку таким образом, чтобы все радикалы исчезли, т. е. чтобы после замены переменной были получены интегралы от рациональных функций относительно новой переменной t .

В первом случае к цели приводит подстановка $x = t^k$, где $K = \text{н.о.к}\{m_1, \dots, n\}$, $dx = k \cdot t^{k-1} \cdot dt$.

Пример. $J_1 = \int \frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt{x} + 1} dx$.

Решение. Здесь $K = \text{н.о.к}\{3, 2\} = 6$, поэтому $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$. После замены получим

$$J_1 = \int \frac{\sqrt[3]{t^6} - 1}{\sqrt{t^6} + 1} \cdot t^5 \cdot dt = 6 \cdot \int \frac{(t^2 - 1) \cdot t^5}{t^3 + 1} \cdot dt = 6 \cdot \int \frac{(t - 1) \cdot (t + 1) \cdot t^5}{(t + 1) \cdot (t^2 - t + 1)} \cdot dt =$$

$$= 6 \cdot \int \frac{t^6 - t^5}{t^2 - t + 1} \cdot dt$$

Это интеграл от неправильной рациональной дроби. Разделив числитель на знаменатель, получим

$$J_1 = 6 \cdot \int \left(t^4 - t^2 - t + \frac{t}{t^2 - t + 1} \right) \cdot dt = 6 \cdot \frac{t^5}{5} - 6 \cdot \frac{t^3}{3} - 6 \cdot \frac{t^2}{2} + 6 \cdot \int \frac{t dt}{t^2 - t + 1}.$$

Так как $(t^2 - t + 1)' = 2t - 1$, получим

$$t = M(2t - 1) + N, \quad 2M = 1, \quad -M + N = 0, \quad M = 1/2, \quad N = 1/2.$$

$$\text{Тогда } J_1 = \frac{6}{5}t^5 - 2t^3 - 3t^2 + 6 \cdot \int \frac{(2t - 1)/2 + 1/2}{t^2 - t + 1} \cdot dt =$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - 2t^3 - 3t^2 + 3 \cdot \left(\int \frac{(2t - 1) dt}{t^2 - t + 1} + \int \frac{dt}{(t - 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \right).$$

$$J_1 = \frac{6}{5}t^5 - 2t^3 - 3t^2 + 3 \ln|t^2 - t + 1| + 2\sqrt{3} \cdot \arctg \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Так как $x = t^6$, $t = \sqrt[6]{x}$, находим

$$J_1 = \frac{6}{5} \cdot \sqrt[6]{x^5} - 2 \cdot \sqrt[6]{x^3} - 3 \cdot \sqrt[6]{x^2} + 3 \cdot \ln|\sqrt[6]{x^2} - \sqrt[6]{x} + 1| + 2\sqrt{3} \cdot \arctg \frac{2\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{3}} + C,$$

$$J_1 = \frac{6}{5} \cdot \sqrt[6]{x^5} - 2 \cdot \sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt{x} + 3 \cdot \ln|\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1| + 2\sqrt{3} \cdot \arctg \frac{2 \cdot \sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Интеграл J_2 берется аналогично: $ax + b = t^k$, где $k = \text{н.о.к}\{m, \dots, n\}$. Тогда $x = 1/a(t^k - b)$, $dx = k/a \cdot t^{k-1} \cdot dt$.

Пример. Найти интеграл $J_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$.

Решение. Здесь полагаем, что $2x - 1 = t^4$, $x = \frac{t^4 + 1}{2}$, $dx = 2t^3 dt$.

$$J_2 = \int \frac{2t^3 dt}{t^2 - t} = 2 \cdot \int \frac{t^3 dt}{t(t-1)} = 2 \cdot \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t-1} \cdot dt = 2 \cdot \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) \cdot dt,$$

$$J_2 = 2 \cdot (t^2 / 2 + t + \ln|t-1|) + C, \text{ где } t = \sqrt[4]{2x-1},$$

$J_2 = \sqrt{2x-1} + 2 \cdot \sqrt[4]{2x-1} + \ln|\sqrt[4]{2x-1}-1| + C$. Для интеграла J_3 берем подстановку

$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где $k = \text{нок} \{m, \dots, n\}$. Из подстановки находим x и затем dx . После

замены переменных получим снова интеграл от рациональной дроби.

Пример. Найти интеграл $J_3 = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$.

Решение. $\frac{1-x}{1+x} = t^2$. Отсюда находим x и dx : $1-x = t^2 + t^2x$, $-x - t^2x = t^2 - 1$,

$$-x(t^2 + 1) = t^2 - 1, \quad x = -\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

$$dx = -\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right)' \cdot dt = -\frac{2t \cdot (t^2 + 1) - 2t \cdot (t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} \cdot dt = -\frac{4t^2 dt}{(t^2 + 1)^2}.$$

После замены переменных получим интеграл от рациональной дроби

$$J_3 = -4 \cdot \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 1)(t^2 + 1)}. \text{ Разлагаем дробь на простейшие:}$$

$$\frac{t^2}{(t-1) \cdot (t+1) \cdot (t^2 + 1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1},$$

$$t^2 = A \cdot (t+1) \cdot (t^2 + 1) + B \cdot (t-1) \cdot (t^2 + 1) + (Ct + D)(t^2 - 1).$$

$$t=0, \quad \begin{cases} 0 = A - B - D \\ 1 = 4A \end{cases} \quad \begin{cases} A - B - D = 0 \\ A = 1/4 \end{cases}$$

$$t=1, \quad \begin{cases} 1 = 4A \end{cases}$$

$$t=-1, \quad \begin{cases} 1 = -4B \end{cases} \quad \begin{cases} B = -1/4 \end{cases}$$

$$t=2 \quad \begin{cases} 4 = 15A + 5B + 6C + 3D \\ 15A + 5B + 6C + 3D = 4 \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим $A = 1/4$, $B = -1/4$, $C = 0$, $D = 1/2$,

$$\frac{t^2}{(t^2 - 1) \cdot (t^2 + 1)} = \frac{1/4}{t-1} - \frac{1/4}{t+1} + \frac{1/2}{t^2 + 1}.$$

Интегрируя почленно, найдем

$$J_3 = -4 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + 1} \right), \quad J_3 = -\ln|t-1| + \ln|t+1| - 2 \cdot \arctg t + C,$$

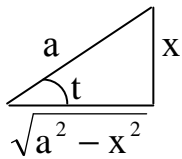
$$J_3 = \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - 2 \cdot \arctg t + C. \text{ Из подстановки следует, что } t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}},$$

$$J_3 = \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} + 1}{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} - 1} \right| - 2 \cdot \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C. \quad J_3 = \ln \left| \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}} \right| - 2 \cdot \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

Тригонометрические подстановки

Интегралы J_4, J_5, J_6 удобно находить с помощью тригонометрических подстановок. При этом часто используются тригонометрические тождества $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$, $1 + \operatorname{ctg}^2 t = \operatorname{cosec}^2 t$.

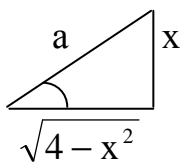
В интеграле $J_4 = \int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ к цели приводит подстановка $x = a \cdot \sin t$, $dx = a \cdot \cos t \cdot dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cdot \cos t$. В итоге получаем интеграл $J_4 = \int f(a \cdot \sin t, a \cdot \cos t) \cdot a \cdot \cos t \cdot dt$, не содержащий иррациональностей.



При этом возврат к старой переменной « x » проще выполнить с помощью прямоугольного треугольника. Так как $\sin t = x/a$, то получаем треугольник со сторонами (теорема Пифагора). Отсюда находится любая тригонометрическая функция.

Пример. Найти $J_4 = \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. $x = 2 \sin t, dx = 2 \cos t \cdot dt, \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = \sqrt{4(1-\sin^2 t)} = 2 \cos t$,



$$J_4 = \int \frac{2 \cos t \cdot dt}{2 \sin t \cdot 2 \cos t} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C, \quad \sin t = x/2,$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1 + \cos t} = \frac{x}{2 + \sqrt{4-x^2}},$$

$$J_4 = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{x}{2 + \sqrt{4-x^2}} \right| + C.$$

Интеграл $J_5 = \int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ находится с помощью подстановки $x = a \cdot \operatorname{tg} t$. Тогда $dx = a \cdot \sec^2 t \cdot dt$, $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2 t)} = \sqrt{a^2 \cdot \sec^2 t} = a \cdot \sec t$.

$J_5 = \int f(a \cdot \operatorname{tg} t, a \cdot \sec t) \cdot a \cdot \sec^2 t \cdot dt$. В качестве **упражнения** найдите интеграл

$J_5 = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. Наконец, в интеграле $J_6 = \int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ цель достигается

с помощью подстановки $x = a \cdot \sec t$. Тогда $dx = a \cdot \sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt$, $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cdot \sec^2 t - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 t - 1)} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 t} = a \cdot \operatorname{tg} t$. Здесь использовалось тождество $1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$, откуда $\sec^2 t - 1 = \operatorname{tg}^2 t$. Возврат к старой переменной « x » выполняется также с помощью прямоугольного треугольника.

Пример. Найти интеграл $J_6 = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$.

Решение. Полагаем $x = \sec t$, $dx = \sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt$, $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 t} = \operatorname{tg} t$.

После замены переменных получим

$$J_6 = \int \frac{\sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt}{\sec^2 t \cdot \operatorname{tg} t} = \int \frac{dt}{\sec t} = \int \cos t \cdot dt = \sin t + C.$$

Так как $x = \frac{1}{\cos t}$, находим $\cos t = 1/x$, $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$.

$$J_6 = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C.$$

Решить самостоятельно

Найти интегралы

$$J_1 = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}, \quad J_2 = \int \frac{x + \sqrt[4]{3-x}}{\sqrt{3-x}} dx, \quad J_3 = \int \sqrt{x^2 - 4} \cdot dx,$$

$$J_4 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9+x^2}}, \quad J_5 = \int \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot dx}{x^2}, \quad J_6 = \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+1}} dx.$$

Занятие № 6. Интегрирование тригонометрических функций

Цель занятия - научиться брать интегралы вида $J = \int R(\cos x, \sin x) \cdot dx$, где R -рациональная функция относительно $\cos x, \sin x$.

Интегралы вида J находили в конце прошлого занятия в примерах J_4, J_5, J_6 где использовались тригонометрические подстановки. Разобранные там примеры были достаточно простые. В общем же случае вопрос решает следующая теорема.

Теорема. Всякий интеграл J с помощью подстановки $\operatorname{tg} x/2 = t$ приводится к интегралу от рациональной дроби.

Доказательство. Из подстановки следует, что $x/2 = \operatorname{arctg} t$, $x = 2 \cdot \operatorname{arctg} t$,

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Кроме того, используем известные формулы тригонометрии:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

После замены $\cos x, \sin x$ и dx их значениями получим интеграл от рациональной дроби относительно t . Подстановка $\operatorname{tg} x/2 = t$ в силу ее всеобщности называется **универсальной тригонометрической подстановкой**.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$.

Решение. После замены $\sin x, \cos x, dx$ их значениями, получим

$$J = \int \frac{2dt/(1+t^2)}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C, \text{ где } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, J = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + C.$$

Пример. Найти самостоятельно интеграл $J = \int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$.

Универсальная подготовка (в силу ее всеобщности) зачастую приводит к рациональным дробям, интегрирование которых достаточно сложно и громоздко. Кроме того, во многих случаях к цели приводят более простые методы. Приведем некоторую классификацию частных случаев.

Интегралы вида $J_{m,n} = \int \sin^m kx \cdot \cos^n kx \cdot dx$.

Здесь возможны следующие случаи.

1. Оба показателя степени: m и n – **четные положительные числа** (один из них может быть нулем). Тогда к цели приводят так называемые **формулы понижения степени**:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

Пример. Найти интеграл $J = \int \sin^4 3x \cdot dx$.

Так как $\sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2}$, находим $\sin^4 3x = \frac{1 - 2 \cos 6x + \cos^2 6x}{4}$ и заменяем

$$\cos^2 6x = \frac{1 + \cos 12x}{2}.$$

После упрощений получим $\sin^4 3x = (3 - 4 \cos 6x + \cos 12x)/8$,

$$J = 1/8 \cdot \int (3 - 4 \cos 6x + \cos 12x) \cdot dx = 3/8 \cdot x - \sin 6x / 12 + \sin 12x / 96 + C.$$

2. Хотя бы одно из чисел m или n – **нечетное положительное число**. Тогда применяем **метод отщепления** от нечетной степени $\sin x$ или $\cos x$ и используем формулы $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.

Пример. Найти интеграл $J = \int \sin^3 x \cos^2 x \cdot dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } J &= \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\sin x dx) = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x \cdot (\sin x dx) = \\ &= \int (\cos^2 x - \cos^4 x) \cdot (\sin x dx) = \int \cos^2 x \cdot (\sin x dx) - \int \cos^4 x \cdot (\sin x dx) = \\ &= -\int \cos^2 x \cdot d(\cos x) + \int \cos^4 x \cdot d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

Пример. Решите самостоятельно $J = \int \sin^3 2x \cdot dx$.

3. Если m и n – **целые отрицательные числа одинаковой четности**, то к цели приводит метод отщепления.

Пример. $J = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^4 x \cdot dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x \cdot dx$.

Решение.

$$J = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x \cdot dx = \int \sec^2 x \cdot dx + \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x \cdot dx = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

4. В некоторых случаях эффективно использование тождества $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ или даже $1 = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2$.

Пример. Найти интеграл $J = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$.

Решение.

$$J = \int \frac{1}{\cos x \cdot \sin^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x \cdot \sin^3 x} dx = \int \frac{\cos x \cdot dx}{\sin^3 x} + \int \frac{2dx}{2 \cos x \cdot \sin x},$$

$$J = \int (\sin x)^{-3} \cdot d(\sin x) + \int \frac{2dx}{\sin 2x} = \frac{(\sin x)^{-2}}{-2} + x \cdot \ln |\operatorname{tg} x| + C,$$

$$J = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} + 2 \cdot \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$

Интегралы вида $J_1 = \int \operatorname{tg}^m k \cdot x \cdot dx$, $J_2 = \int \operatorname{ctg}^m k \cdot x \cdot dx$, где m – целое положи-

тельное число, находятся с помощью тождеств $\operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1$, $\operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha - 1$.

Пример. $J = \int \operatorname{tg}^4 3x \cdot dx = \int \operatorname{tg}^2 3x \cdot \operatorname{tg}^2 3x \cdot dx = \int \operatorname{tg}^2 3x \cdot (\sec^2 3x - 1) dx =$
 $= \int \operatorname{tg}^2 3x \cdot (\sec^2 3x \cdot dx) - \int \operatorname{tg}^2 3x \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \int \operatorname{tg}^2 3x \cdot d(\operatorname{tg} 3x) - \int (\sec^2 3x - 1) dx =$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{tg}^3 3x}{3} - \int \sec^2 3x \cdot dx + \int dx = \frac{1}{9} \cdot \operatorname{tg}^3 3x - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg} 3x + x + C.$

Пример. Найти интеграл $J = \int \operatorname{ctg}^3 x \cdot dx$.

Решение. $J = \int \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg}^2 x \cdot dx = \int \operatorname{ctg} x (\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx = \int \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec}^2 x \cdot dx -$
 $- \int \operatorname{ctg} x \cdot dx = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\sin x| + C.$

Следующие три интеграла берутся с помощью известных формул тригонометрии $J_1 = \int \sin mx \cdot \cos nx \cdot dx$, $\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} (\sin (m+n)x + \sin (m-n)x)$,

$$J_2 = \int \sin mx \cdot \sin nx \cdot dx, \quad \sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} \cdot (\cos (m-n)x - \cos (m+n)x),$$

$$J_3 = \int \cos mx \cdot \cos nx \cdot dx, \quad \cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} \cdot (\cos (m-n)x + \cos (m+n)x).$$

Пример. Найти интеграл $J = \int \sin 2x \cdot \cos 5x \cdot dx$.

Решение. $J = \frac{1}{2} \cdot \int (\sin 7x + \sin(-3x)) dx = \frac{1}{2} \cdot \int \sin 7x \cdot dx - \frac{1}{2} \cdot \int \sin 3x \cdot dx =$
 $= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{7} \right) \cdot \cos 7x - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \cos 3x + C, \quad J = -\frac{1}{14} \cdot \cos 7x + \frac{1}{6} \cdot \cos 3x + C.$

Подстановка $\operatorname{tg} x = t$ рекомендуется для нахождения интеграла $J = \int R(\operatorname{tg} x) dx$, а также в тех случаях, когда в интеграле $J = \int \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx$ числа m и n - четные (положительные или отрицательные). Здесь используются известные формулы тригонометрии: $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}.$

Пример. Найти интеграл $J = \int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

Решение. $\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}, \quad \sin^4 t = \frac{t^4}{(1 + t^2)^2},$

$$J = \int \frac{dt / (1 + t^2)}{t^4 / (1 + t^2)^2} = \int \frac{(1 + t^2)^2}{(1 + t^2)t^4} dt = \int \frac{1 + t^2}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2},$$

$$J = \int t^{-4} dt + \int t^{-2} dt = \frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + C. \text{ Так как } t = \operatorname{tg} x, \text{ то окончательно}$$

получим $J = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x + C.$

Замечание. Для интегралов $J_k = \int \sin^k x dx, \quad J_k = \int \cos^k x dx,$ где k - натуральное число, методом интегрирования по частям можно получать рекуррентные соотношения, приведенные в таблице интегралов.

Решить самостоятельно

$$J_1 = \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}, \quad J_2 = \int \frac{dx}{3 \cdot \sin^2 x + 5 \cos^2 x}, \quad J_3 = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x},$$

$$J_4 = \int \frac{\sin^3 x dx}{1 + \cos^2 x}, \quad J_5 = \int \sin^5 3x dx, \quad J_6 = \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx.$$

Выше были рассмотрены основные приемы и формулы для нахождения неопределенных интегралов. Следует отметить, что многие функции не интегрируются в **конечном** виде. Так, например, функция $y = \frac{\sin x}{x}$ непрерывна в промежутке

$(0, +\infty),$ однако, интеграл от нее $\int \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{si} x$ (интегральный синус) не выра-

жается в конечном виде через элементарные функции. То же самое относится к интегралам $\int \frac{\cos x}{x} dx = \operatorname{ci} x$ (интегральный косинус), $\int \frac{dx}{\ln x} = \operatorname{li} x$ (интегральный логарифм).

Замечание. Во многих случаях заданный интеграл $\int f(x)dx$ может быть найден различными способами. Так, например, интеграл $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ с помощью под-

становки $x = a \cdot \sin t, dx = a \cdot \cos t \cdot dt$ дает $J = \int \frac{a \cdot \cos t \cdot dt}{a \cdot \cos t} = \int dt = t + C$, где

$t = \arcsin \frac{x}{a}, J = \arcsin \frac{x}{a} + C$. С другой стороны, если возьмем подстановку

$$\sqrt{a^2 - x^2} = t(a - x), \text{ то } x = a \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, dx = \frac{4at \cdot dt}{(t^2 + 1)^2}, \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2 + 1}.$$

Поэтому $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2 \cdot \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2 \cdot \operatorname{arctg} t + C, t = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

Окончательно $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$. Этот результат лишь формой отличается от предыдущего, так как

$$\left(2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C \right)' = \left(\arcsin \frac{x}{a} + C \right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Занятие № 7. Контрольная работа

Вариант 1	Вариант 2
1. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 dx}{\sqrt[3]{x}}$	1. $\int \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)^2 dx}{\sqrt{x}}$
2. $\int \left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x} dx$	2. $\int 5^{2x+1} dx$
3. $\int t(t^2 - 1)^3 dt$	3. $\int x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) dx$
4. $\int x \cdot \sin 3x dx$	4. $\int (x + 2) \cdot e^{-x} dx$
5. $\int \frac{dx}{x^4 + x^3 + x^2 + x}$	5. $\int \frac{xdx}{(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)}$
6. $\int \frac{(x - 7) \cdot dx}{x^2 + 4x + 13}$	6. $\int \frac{(x + 1) dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$
7. $\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x}$	7. $\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}$

8. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.	8. $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4} dx$.
9. $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$.	9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Библиографический список

1. Гусак А. А. Пособие к решению задач по высшей математике. - Минск: Изд-во БГУ, 1973.
2. Математический анализ в примерах и задачах / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук и др.. - Киев: Вища школа, 1975.
3. Запорожцев Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. - М.: Высш. школа, 1966.
4. Графики функций: Справочник / Н. А. Вирченко, И. И. Ляшко и др. - Киев: Наук. думка. 1979.
5. Высшая математика / Под ред. Г. Н. Яковлева - М.: Просвещение, 1988.
6. Щипачев В.С. Основы высшей математики. М.: Высш. школа, 1989.
7. Сборник задач по математике для втузов / Под ред. А. В. Ефимова, Б.П. Демидовича. - М.: Наука, 1981.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01

Подписано в печать 27.06.02. Формат 60x84x1/16 Бумага офсетная.

Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л.2,25 Уч.-изд. л.2,25

Тираж 500 экз. Заказ 665

Издательство ОмГТУ. 644050, г.Омск, пр-т Мира,11
Типография ОмГТУ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания

Омск – 2002

