МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Омский государственный технический университет»

О. С. Дюндик, И. П. Згонник, М. А. Федорова

КИНЕТОСТАТИКА МЕХАНИЗМОВ В МАШИНОВЕДЕНИИ

Учебное пособие

Омск
Издательство ОмГТУ
2020

УДК 621.01(075)
ББК 34.4я73
Д96

Рецензенты:

С. А. Макеев, д.т.н., профессор кафедры «Строительные конструкции» ФГБОУ ВО «СибАДИ»;

Г. В. Редреев, к.т.н., доцент, зав. кафедрой «Технический сервис, механика и электроника» факультета технического сервиса ФГБОУ ВО «Омский ГАУ»

Дюндик, О. С.

Д96 Кинетостатика механизмов в машиноведении : учеб. пособие / О. С. Дюндик, И. П. Згонник, М. А. Федорова ; Минобрнауки России, ОмГТУ. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2020. – 128 с. : ил.

ISBN 978-5-8149-3087-3

В пособии приведены краткие положения раздела прикладной механики – кинетостатики механизмов.

Предназначено для студентов бакалавриата и магистратуры механико-машиностроительных направлений подготовки. Будет полезным для закрепления теоретических положений механики, выполнения курсовых работ и проектов по разделам прикладной механики.

УДК 621.01(075)
ББК 34.4я73

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

ISBN 978-5-8149-3087-3

© ОмГТУ, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5
1. ХАРАКТЕРИСТИКА СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЗВЕНЬЯ МЕХАНИЗМА 8
2. РАСЧЕТ СИЛ ИНЕРЦИИ ПРИ КИНЕТОСТАТИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ МЕХАНИЗМА 13
Расчет сил инерции методом теоретической механики 14
Определение сил инерции при поступательном движении звена 14
Определение сил инерции при вращательном движении звена вокруг неподвижной оси 15
Определение сил инерции звена в сложном плоскопараллельном движении 18
Расчет сил инерции методом замещающих масс 19
3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ В КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ 22
Условие статической определимости кинематической цепи 24
4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СИЛОВОГО РАСЧЕТА 26
4.1. Примеры силового исследования плоских механизмов с низшими кинематическими парами, содержащих группы Ассура II класса различных модификаций 27
Силовой расчет механизма, содержащего группу Ассура II класса, 2-го порядка, 1-й модификации (вида), методами теоретической механики 27
Силовой расчет механизма, содержащего группу Ассура II класса, 2-го порядка, 1-й модификации (вида), с использованием метода замещающих масс 32
Силовой расчет механизма, содержащего группу Ассура II класса, 2-го порядка, 2-й модификации (вида), методом теоретической механики 35
Силовой расчет механизма, содержащего группу Ассура II класса, 2-го порядка, 3-й модификации (вида), методом теоретической механики 39
4.2. Силовой расчет ведущего звена механизма 43
4.3. Определение уравновешивающей силы методом «жесткого» рычага Н. Е. Жуковского 48
4.4. Силовой расчет механизмов, содержащих высшие кинематические пары 52
Выводы по разделам 1–4 54
Вопросы по разделам 1–4 55
5. ОСОБЕННОСТИ СИЛОВОГО РАСЧЕТА МЕХАНИЗМОВ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ В СОЕДИНЕНИЯХ 56
Трение в механизмах. Общие сведения 56
5.1. Трение в кинематических парах 62
Трение в поступательной кинематической паре 62
Трение в желобе 64

Трение в винтовой паре ... 66
Трение во вращательной кинематической паре ... 69
Трение в плоской пяте ... 71
5.2. Учет сил трения в высших кинематических парах ... 73
Определение сил трения в передаче с гибким звеном ... 73
5.3. Силовой анализ механизма с учетом сил трения ... 78
Пример силового анализа кривошипно-ползунного механизма ... 78
Выводы по разделу 5 ... 81
Вопросы по разделу 5 ... 82
6. МЕХАНИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ КАЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ РАБОТЫ МЕХАНИЗМОВ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР ... 83
Определение механического коэффициента полезного действия механизмов ... 83
6.1. Пример определения коэффициента полезного действия механизма, содержащего низшие кинематические пары ... 86
6.2. Пример определения коэффициента полезного действия зубчатых передач ... 90
6.3. Определение коэффициента полезного действия сложных механизмов при различных способах соединения источников потерь ... 92
Параллельное соединение элементов в кинематической цепи ... 92
Последовательное соединение элементов в кинематической цепи ... 94
Смешанное соединение элементов в кинематической цепи ... 95
6.4. Явления самоторможения и заклинивания ... 96
Выводы по разделу 6 ... 98
Вопросы по разделу 6 ... 98
7. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МАШИН И МЕХАНИЗОВ ... 99
Уравновешивание механизмов общего вида ... 102
Статическое уравновешивание рычажных механизмов ... 104
Частичное статическое уравновешивание кривошипно-ползунного механизма ... 108
Уравновешивание роторов (балансировка) ... 109
Выводы по разделу 7 ... 118
Вопросы по разделу 7 ... 118
8. ИНЖЕНЕРНОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ КИНЕТОСТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ... 119
ЗАКЛЮЧЕНИЕ ... 126
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ... 127

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании механических систем решаются задачи обеспечения необходимой прочности, жесткости и долговечности узлов, деталей, звеньев и кинематических пар в составе машин и механизмов. Удовлетворение критериям работоспособности невозможно без знания нагружения звеньев и подвижных соединений в движении механической системы. В машиноведении раздел, в котором изучается силовое нагружение механических систем в движении, получил название «кинетостатика». Кинетостатический расчет справедливо называют силовым исследованием. Знание сил дает возможность, по условиям прочности, выбрать конструктивную форму и размеры отдельных звеньев и деталей машин, определить давления и силы трения в кинематических парах, а также необходимую мощность двигателя для привода машины.

В случае, если расчет механической системы ведется без учета инерционных сил, то такой расчет называют статическим. А если в число внешних сил ввести силы инерции, которые являются следствием движения, то такой расчет будет называться кинетостатическим. Введение сил инерции в число внешних и известных при кинетостатическом исследовании в значительной степени уточняет схему нагружения механической системы.

До сих пор ведутся научные споры о природе и происхождении таких сил. Силы (моменты сил) инерции в настоящее время понимаются как кинетическая реакция ускоряемого тела на ускоряющее. Само понятие силы инерции было введено в 1743 г. Жаном Лероном Д'Аламбером[1] для создания схем нагружения тел, которые перемещаются с ускорением. Понятие инертности[2] как свойства материального тела еще в 1686 г. впервые обобщил в своих трудах Исаак Ньютон[3].

---

[1] **Жан Лерон Д'Аламбер** (1717–1783) – французский философ, математик и механик, одним из открытий в области механики которого считается принцип Д'Аламбера, позволяющий составлять математическую модель движения несвободных систем.

[2] **Инертность** («inertia» с греческого языка означает лень) – это способность тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения при отсутствии действия на него сил или их взаимного уравновешивания. Мерой инертности в теле является его масса.

[3] **Исаак Ньютон** (1643–1727) – английский ученый, математик, физик, астроном и механик. Основоположник классической физики, а также дифференциальных и интегральных исчислений.

По второму закону Ньютона, если на свободное тело массой m действует внешняя сила $\overline{P}$, то тело получит ускорение $\overline{a}$ в направлении действия силы $\overline{P}$, т. е.

$$\overline{a} = \frac{\overline{P}}{m}.$$

Движение тела с ускорением $\overline{a}$ порождает силу инерции

$$\overline{P}_{ин} = -\overline{a} \cdot m = -\frac{\overline{P}}{m} \cdot m,$$

откуда $\overline{P}_{ин} = -\overline{P}$ или

$$\overline{P} + \overline{P}_{ин} = 0. \qquad (1)$$

Формально (1) означает равновесие, и хотя силы имеют одну линию действия, но они приложены к разным телам (рис. 1), поэтому физического равновесия нет, и тело массой m совершает неинерциальное движение с ускорением $\overline{a}$.

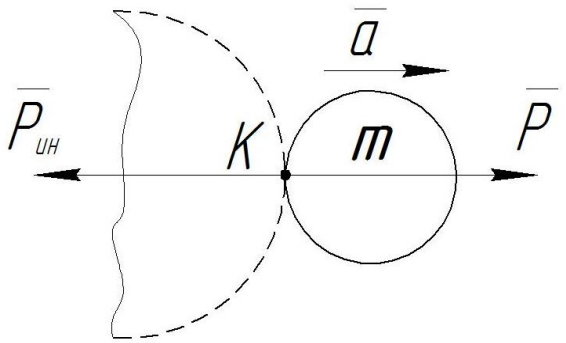


Рис. 1. К определению сил инерции

Суть предложения Д'Аламбера [1] состоит именно в переводе сил (моментов сил) инерции, которые являются следствием неинерциального движения, в категорию внешних сил.

Силы инерции будем рассчитывать как произведение массы звена на ускорение, а направление – в сторону, обратную направлению соответствующего ускорения. Аналогично моменты инерционных сил находятся произведением моментов инерции звеньев на угловое ускорение, знак момента противоположен знаку углового ускорения. Поэтому для определения численных значений сил и моментов сил инерции необходимо знать результаты кинематического исследования механизма.

Для проведения силового исследования известными принимаются кинематическая схема механизма со всеми размерами его звеньев, закон движения ведущего звена, результаты кинематики, при этом дополнительно должны быть известны массы и моменты инерции звеньев.

Для определения сил взаимодействия звеньев в связях последние разрушают, заменяя их действия реакциями. Для этого при проведении кинетостатического расчета из кинематической схемы механизма выделяются статически определимые группы звеньев. В таких группах количество неизвестных параметров реакций в связях совпадает с количеством уравнений статики. В теории структуры механизмов такие группы называются группами Ассура. Будучи выделенными и соединенными со стойкой концевыми кинематическими парами, они образуют статически определимые фермы с нулевой подвижностью.

Алгоритм проведения кинетостатического расчета идеальных механизмов состоит в выделении групп Ассура, нагружении звеньев групп внешними силами и силами (моментами сил) инерции, что в совокупности с реакциями разрушенных связей дает статически определимую систему, формальное равновесие которой моделируется уравнениями статики.

Векторные уравнения статики, как правило, решаются графически. Возникающие при этом графические ошибки вполне допустимы, поскольку конструкторские решения звеньев и связей находятся в первом приближении и уточняются по результатам проведения кинетостатического расчета и получения полной и достоверной картины силового нагружения звеньев и связей механизма в его движении.

1. ХАРАКТЕРИСТИКА СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЗВЕНЬЯ МЕХАНИЗМА

При конструировании механизмов и машин необходимо знать силовую нагрузку на звенья и кинематические пары для обеспечения их необходимой прочности и жесткости.

В процессе эксплуатации машины на звенья и подвижные соединения ее механизмов действуют группы сил, имеющих разное физическое происхождение, но среди них можно выделить движущие силы, силы сопротивления, силы тяжести звеньев, силы трения, а также силы, появляющиеся при неинерциальном движении звеньев – силы инерции.

Рис. 2. Принципиальная схема простой машины

Схема простейшей машины, согласно рис. 2, состоит из двигателя – Д, передаточного механизма – ПМ и исполнительного органа – ИО. В современной машине в состав схемы входит система автоматического управления. Передаточный механизм обеспечивает гармонизацию компонентов трансформируемой мощности двигателя $M_{дв}$ с механическими характеристиками исполнительного органа M_c, которая выражается равенством мощностей

$$M_{дв} \cdot \omega_1 = M_c \cdot \omega_c,$$

где ω_1 и ω_c – кинематические характеристики скорости входного и выходного движений для передаточного механизма соответственно.

Такое равенство отражает идеальный режим работы машины, при котором энергетические потери не учитываются.

Рассмотрим основные группы сил, действующие в машине, и перечислим их основные характеристики.

1. Движущей силой $P_{дв}$ (или моментом силы $M_{дв}$) называют такую силу, которая вызывает движение, как правило, со стороны двигателя. Работа движущих сил положительна $A_{дв} > 0$, это связано с тем, что направление действия движущей силы совпадает с направлением перемещения точки ее приложения или направление момента движущих сил $M_{дв}$ совпадает с направлением угловой скорости вращения ω_1 (рис. 2).

Изменение движущей силы $P_{дв}$ (или момента сил $M_{дв}$) называется механической характеристикой двигателя (например, на рис. 3 характеристика трехфазного асинхронного электродвигателя представлена в виде графика изменения момента движущих сил от угловой скорости вращения ротора $M_{дв} = M_{дв}(\omega)$). Зависимость силы $P_{дв}$ (или момента движущих сил $M_{дв}$) от других кинематических параметров либо времени может быть представлена аналитически как функция следующих переменных: $P_{дв} = P_{дв}(S, V, t)$ или $M_{дв} = M_{дв}(\varphi, \omega, t)$.

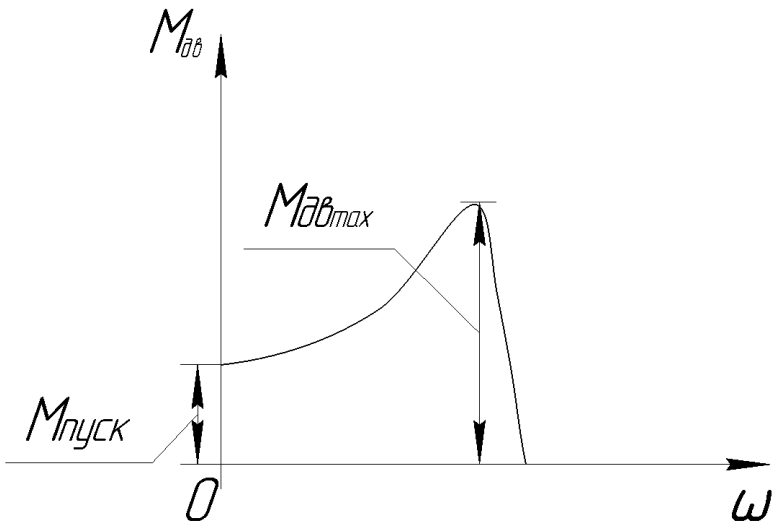


Рис. 3. Механическая характеристика трехфазного асинхронного электродвигателя

2. Выполнение машиной технологического процесса связано с преодолением сил (или моментов сил) сопротивлений, которые называются

полезными силами сопротивления $P_{пс}$ (или моментами сил сопротивлений $M_{пс}$). Примерами таких сил являются силы, возникающие при преодолении сопротивлений при резании металла в металлорежущих станках. Например, на рис. 4 представлена механическая характеристика механизма поперечно-строгального станка в виде силы $P_{рез}$ постоянной величины в зависимости от перемещения *S* резца.

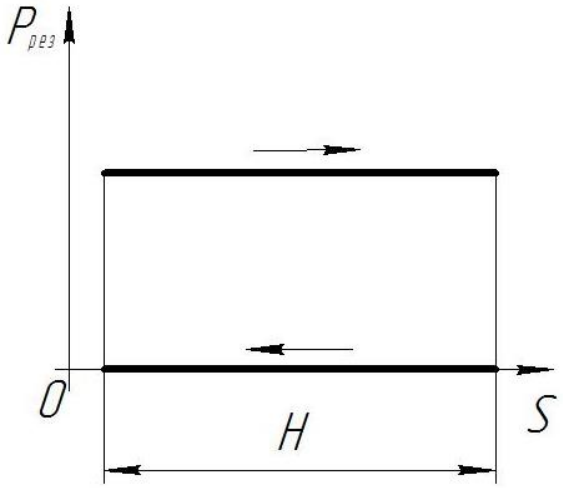


Рис. 4. Механическая характеристика поперечно-строгального станка

В машинах – это основные силы сопротивления, на преодоление которых затрачивается работа, необходимая для осуществления требуемого технологического процесса. Силы $P_{пс}$ (или моменты сил $M_{пс}$) приложены к выходным звеньям, которые связаны с исполнительными органами машины. Физическая природа этих сил (сила трения, сила резания, сила упругости, сила гидравлического сопротивления и др.) может быть различной и зависеть от осуществляемого технологического рабочего процесса.

Работа, осуществляемая силами сопротивлений, отрицательна, то есть $A_{пс} < 0$, так как направление движения выходного звена не совпадает с направлением действия силы $P_{пс}$ или направление вращения выходного звена не совпадает с направлением момента сил сопротивления $M_{пс}$.

Для кинетостатических задач эти силы представлены в виде механических характеристик или силовых диаграмм. Например, на рис. 5 показана диаграмма изменения сил для компрессора, которая зависит от давления в цилиндре при перемещении поршня $P_{nc} = P_{nc}(S_B)$.

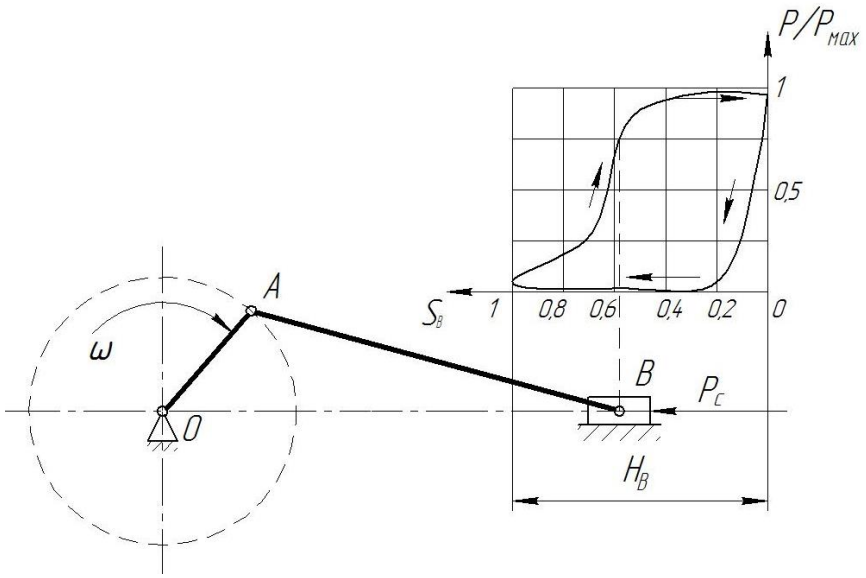


Рис. 5. Диаграмма изменения силы сопротивления для поршневого компрессора

Стоит отметить, что в соответствии с диаграммой (рис. 5) величина силы, действующей на поршень, определяется следующей формулой:

$$P_{nc_i} = \left(\frac{P}{P^*}\right)_i \cdot P^* \frac{\pi \cdot d^2}{4},$$

где $\frac{P}{P^*}$ – величина отношения давлений в цилиндре в каком-либо положении механизма; P^* – максимальное давление в цилиндре, МПа; d – диаметр цилиндра, м.

3. Следующая группа сил, действующая при работе машинного агрегата, это силы трения $F_{тр}$ (или моменты сил трения $M_{тр}$), которые возникают во всех кинематических парах в связи с наличием в них относительного движения элементов пар. Они всегда направлены против относи-

тельного движения звена в кинематической паре, поэтому совершают отрицательную работу ($A_{тр} < 0$).

4. К силам трения $F_{тр}$ относятся и силы вредного сопротивления, такие как сопротивление движению звена в воздушной среде (аэродинамическое сопротивление) или в жидкости (гидравлическое сопротивление), а также в других средах, в которых функционирует исследуемая машина. Работа этих сил также отрицательна ($A_{вр\ тр} < 0$).

5. Силы тяжести G также можно отнести к внешним силам, это гравитационные силы, и на земной поверхности они определяются по известной формуле [2]

$$G = m \cdot g,$$

где m – масса звена, кг; g – ускорение свободного падения, в земных условиях оно всегда направлено к центру Земли.

Работа такой силы положительна при движении звена вниз и отрицательна – при движении звена вверх. В цикловых машинах суммарная работа этих сил рана нулю.

6. Если звено механизма совершает неинерционное движение, то всегда возникают силы инерции $P_{ин}$ (или моменты сил инерции $M_{ин}$), которые в быстроходных машинах достигают значительной величины. Работа сил инерции может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от направления этих сил по отношению к скорости движения звена, в цикловых машинах сумма работ за цикл движения будет равна нулю.

Рассмотрим некоторые варианты определения сил инерции (моментов от сил инерции) отдельных звеньев, а также силового расчета механизма с учетом всех перечисленных внешних сил.

2. РАСЧЕТ СИЛ ИНЕРЦИИ ПРИ КИНЕТОСТАТИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ МЕХАНИЗМА

Возникающая кинетическая реакция ускоряемого тела на ускоряющее определяется силой или моментом от сил инерции, которые появляются во всех случаях, когда имеет место неравномерное или непрямолинейное движение тела.

Величина силы инерции $P_{ин}$ для конкретной материальной точечной массы m в общем случае определяется известным выражением

$$\bar{P}_{ин} = -\bar{a} \cdot m, \tag{2}$$

где a – ускорение точки, м/с^2.

В формуле (2) знак минус показывает, что направление вектора силы инерции $\bar{P}_{ин}$ противоположно направлению вектора ускорения $\bar{a}$.

Звено механизма состоит из отдельных материальных точек, ускорения которых могут быть различны, поэтому для силового исследования необходимо привести сумму сил инерции материальных точек звена к главному вектору сил инерции и главному моменту от сил инерции. Модульное значение главного вектора силы инерции, приложенного в центре масс звена, совершающего плоское движение, в общем случае равно

$$\bar{P}_{ин} = -\bar{a}_S \cdot m, \tag{3}$$

где $\bar{a}_S$ – вектор линейного ускорения центра масс звена; линия действия главного вектора $\bar{P}_{ин}$ проходит через центр масс звена в направлении, противоположном вектору ускорения центра масс.

Главный момент сил инерции $M_{ин}$ имеет размерность ньютон на метр и равен

$$M_{ин} = -J_0 \cdot \varepsilon, \tag{4}$$

где ε – угловое ускорение звена, с$^{-2}$; J_0 – момент инерции звена относительно оси вращения, кг·м^2, который связан с центральным моментом инерции J_S звена относительно оси, проходящей через центр масс, выражением

$$J_0 = J_S + mr^2. \tag{5}$$

Направление главного момента сил инерции $M_{ин}$ противоположно угловому ускорению звена ε.

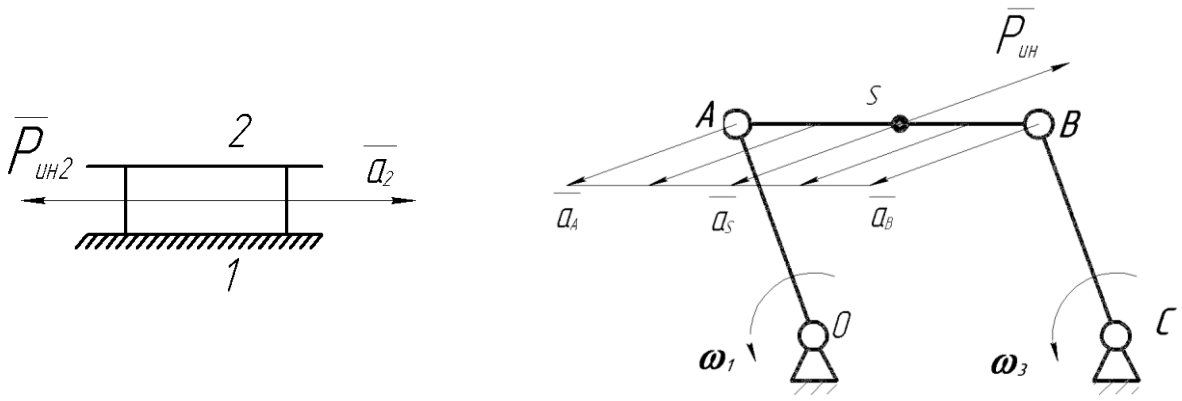
РАСЧЕТ СИЛ ИНЕРЦИИ МЕТОДОМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Как известно [3], плоское движение звеньев в механизме можно разделить на три группы: поступательное, вращательное и плоскопараллельное. Рассмотрим методику определения сил инерции и моментов сил инерции при различных видах движения звеньев в составе механизма.

Определение сил инерции при поступательном движении звена

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному положению, и точки, принадлежащие твердому телу, двигаются по эквидистантным траекториям, имея при этом в каждый момент времени одинаковые скорости и ускорения [3].

Такому движению соответствует движение, например ползуна, движущегося относительно неподвижных прямолинейных направляющих (рис. 6, *а*), или звена *AB*, совершающего круговое поступательное движение в двухкривошипном механизме (рис. 6, *б*).



а *б*

Рис. 6. К определению направлений сил инерции
при поступательном движении звена:
а – ползуна; *б* – шатуна в двухкривошипном механизме

Результирующая сила инерции звена *AB* проходит через центр тяжести *S* звена. Зная его массу и ускорение a_S из кинематического расчета, выполненного предварительно, силу инерции определяем по формуле (3). Направление вектора силы инерции $\overline{P}_{ин}$ противоположно вектору соответствующего ускорения.

Определение сил инерции при вращательном движении звена вокруг неподвижной оси

Кривошипы и коромысла как основные звенья в составе механизма, вращаются вокруг неподвижной оси.

Рассмотрим вращательное движение звена 2 (рис. 7) вокруг неподвижной оси 0 с переменной угловой скоростью ω и определим силы инерции, которые приложены в точке *S*. При неравномерном вращении звена имеют место тангенциальное ускорение и тангенциальная сила инерции

$$\overline{P}_{ин} = -m \cdot \overline{a}_S^t,$$

где $a_S^t = \varepsilon \cdot \rho_S$ – тангенциальное ускорение центра масс звена; ρ_S – расстояние от центра вращения 0 до центра масс *S*.

Отсюда

$$\overline{P}_{ин}^{t} = -m \cdot \overline{\varepsilon} \cdot \rho_s .$$

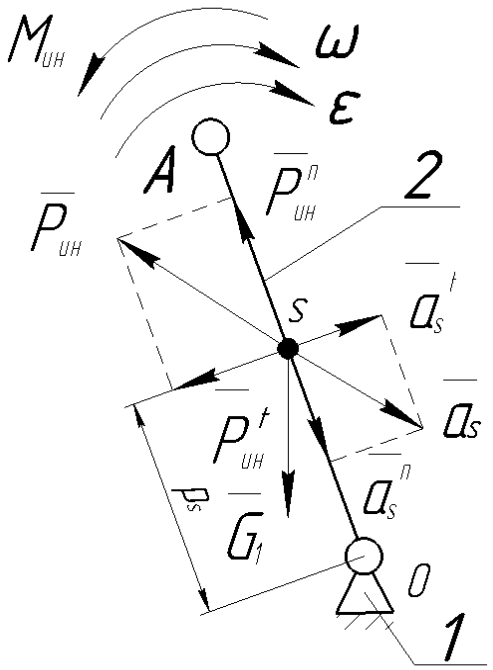


Рис. 7. К расчету сил инерции звена
во вращательном движении

Возникающий главный момент тангенциальных сил инерции относительно центра масс звена направлен противоположно угловому ускорению

$$M_{ин} = -\varepsilon \, m\rho_s^2 = -\varepsilon \cdot J_0 ,$$

где J_0 – момент инерции звена относительно оси вращения, его величина зависит от массовых и геометрических характеристик, определяется по (5).

Нормальная (центробежная) сила инерции равна

$$\overline{P}_{ин}^{n} = -m \cdot \overline{a}_s^{n} ,$$

где $a_s^n = \omega^2 \cdot \rho_s$ – нормальное (центростремительное) ускорение центра масс.

Тогда

$$P_{ин}^{n} = -m \cdot \omega^{2} \cdot \rho_{S},$$

центробежная сила направлена по звену *0A* от центра вращения. Такие силы вызывают дополнительное динамическое давление на вал и передаются на подшипники.

Складывая геометрически тангенциальную и нормальную составляющие, получаем вектор полной силы инерции звена

$$\bar{P}_{ин} = \bar{P}_{ин}^{n} + \bar{P}_{ин}^{t}.$$

Абсолютная величина будет

$$P_{ин} = \sqrt{(P_{ин}^{t})^{2} + (P_{ин}^{n})^{2}}.$$

Таким образом, главный вектор силы инерции равен произведению массы всего звена на полное ускорение центра масс, $P_{ин}$ приложена в центре масс звена 2 и направлена в сторону, обратную полному ускорению центра масс этого звена.

В случае плоского вращательного движения возможны следующие частные случаи:

1) если центр масс располагается в центре вращения звена, то сила инерции будет равна нулю ($P_{ин}^{n}$ = 0), а момент инерции $M_{ин}$ определится по формуле

$$M_{ин} = \varepsilon \cdot J_{S}; \qquad (6)$$

2) если вращение звена происходит с постоянной скоростью, т. е. $\varepsilon = 0$, то момент инерции будет равен нулю ($M_{ин} = 0$), а значение силы инерции $P_{ин}$ определится по формуле (3);

3) если вращение происходит с постоянной скоростью вокруг центра масс, т. е. $\rho_S = 0$, расположенного в центре вращения, то сила инерции $P_{ин}$ и момент инерции $M_{ин}$ будут равны нулю ($M_{ин} = 0$; $P_{ин} = 0$).

Определение сил инерции звена в сложном плоскопараллельном движении

Сложное плоскопараллельное движение представляет собой общий вид движения в плоскости. Такое движение в механизмах рычажной схемы совершают шатуны.

Как известно, движение шатуна *AB* (рис. 8) сводится к переносному поступательному движению вместе с центром масс *S* и относительному вращательному движению вокруг точки *S*.

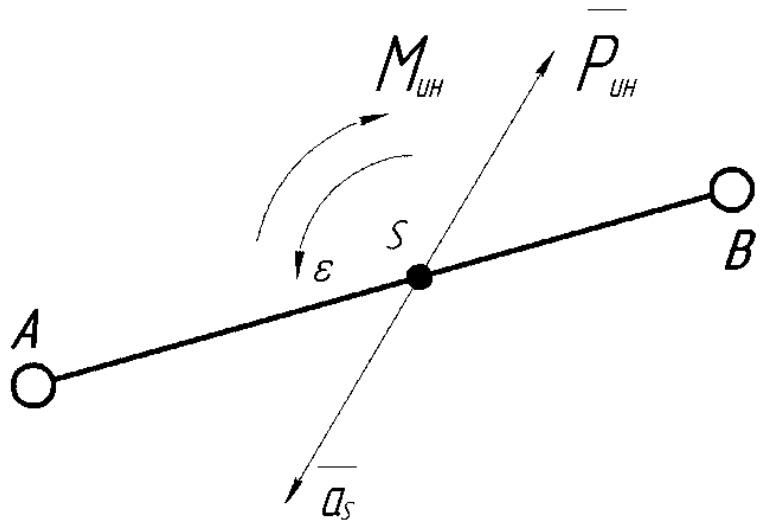


Рис. 8. К расчету сил инерции при плоскопараллельном движении звена *AB* (шатуна)

Тогда при переносном поступательном движении определение сил инерции будет сводиться к определению результирующей силы инерции по формуле (3), а при относительном вращательном движении – к образованию пар сил от момента инерции, величина которого будет определяться формулой (6).

РАСЧЕТ СИЛ ИНЕРЦИИ
МЕТОДОМ ЗАМЕЩАЮЩИХ МАСС

Для упрощения расчета инерционного нагружения на практике применяют искусственный прием – метод замещающих масс, чтобы исключить определение угловых ускорений звеньев, имеющих сложное движение. Этот прием позволяет звено механизма с распределенной массой заменить эквивалентной моделью, состоящей из сосредоточенных масс, которые приводятся к определенным точкам (в рычажных механизмах удобнее всего их располагать в шарнирных соединениях). Проведение такой замены требует выполнения определенных условий:

1) масса всего звена должна быть равна сумме замещающих точечных масс, а именно:

$$m = m_1 + m_2 + ... + m_n; \tag{7}$$

2) общий центр масс замещающих точек должен совпадать с центром тяжести звена, т. е.

$$m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + ... + m_n \cdot x_n = 0; \tag{8}$$

$$m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + ... + m_n \cdot y_n = 0, \tag{9}$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$ – координаты замещающих точек относительно осей, начало которых совпадает с центром тяжести звена;

3) сумма моментов инерции масс замещающих точек должна быть равна моменту инерции выбранного звена относительно центра масс:

$$m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) + ... + m_n(x_n^2 + y_n^2) = J_s;$$

$$m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + ... + m_n l_n^2 = J_s, \tag{10}$$

где $l_1, l_2, ..., l_n$ – расстояния от замещающих точек до центра масс звена; J_s – момент инерции звена относительно центра масс.

Таким образом, остается определить сосредоточенные массы и их координаты, чтобы выполнялись условия, согласно (7)–(10).

Поскольку в плоском механизме каждая точечная масса определяется тремя параметрами: m_i, x_i, y_i, а замещающих масс – n, то количество определяемых параметров масс составит $3n$. Наличие четырех обязательных условий оставляет количество свободных параметров $q = 3n - 4$, т. е. столько параметров неопределимы и их можно задавать. Удобно в качестве свободных параметров иметь координаты заменяющих масс, т. е. способность размещать заменяющие массы в точки звена, ускорения которых известны по результатам кинематического анализа.

Если заменяемое звено имеет ось симметрии, то при размещении на этой оси замещающих масс одно из условий превращается в тождество $y = 0$ (рис. 9), а количество параметров, определяющих конкретную массу, сокращается до двух. Тогда имеем

$$q = 2n - 3. \tag{11}$$

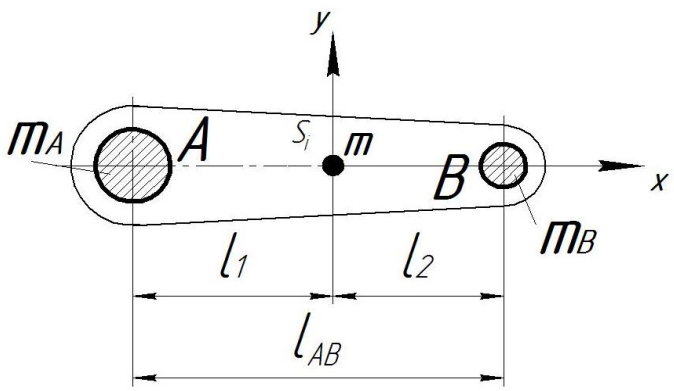


Рис. 9. К замещению массы звена (шатуна) точечными массами

На этапе эскизного проектирования можно дополнительно опустить условие $m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 = J_s$, тогда $q = 2n - 2$, при двух замещающих массах получим $q = 2$ (рис. 9), что дает возможность выбрать $x_1 = l_1$ и $x_2 = l_2$, а величины заменяющих масс получить из условий:

$$m_A + m_B = m;$$
$$m_A \cdot l_1 + m_B \cdot l_2 = 0,$$

окончательно

$$m_A = m\frac{l_1}{l_{AB}}; \quad m_B = m\frac{l_2}{l_{AB}}.$$

Инерционное нагружение шатуна сводится к силам инерции

$$\overline{P}_{инA} = -m_A\overline{a}_A \text{ и } \overline{P}_{инB} = -m_B\overline{a}_B \tag{12}$$

соответствующих масс в выбранных точках *A* и *B*. На рис. 10 направления полученных сил инерций шатуна $\overline{P}_{инA}$ и $\overline{P}_{инB}$ определяются в противоположные стороны от ускорений соответствующих точек *A* и *B*. Инерционное нагружение от шатуна входит составной частью в общую картину силового нагружения механизма.

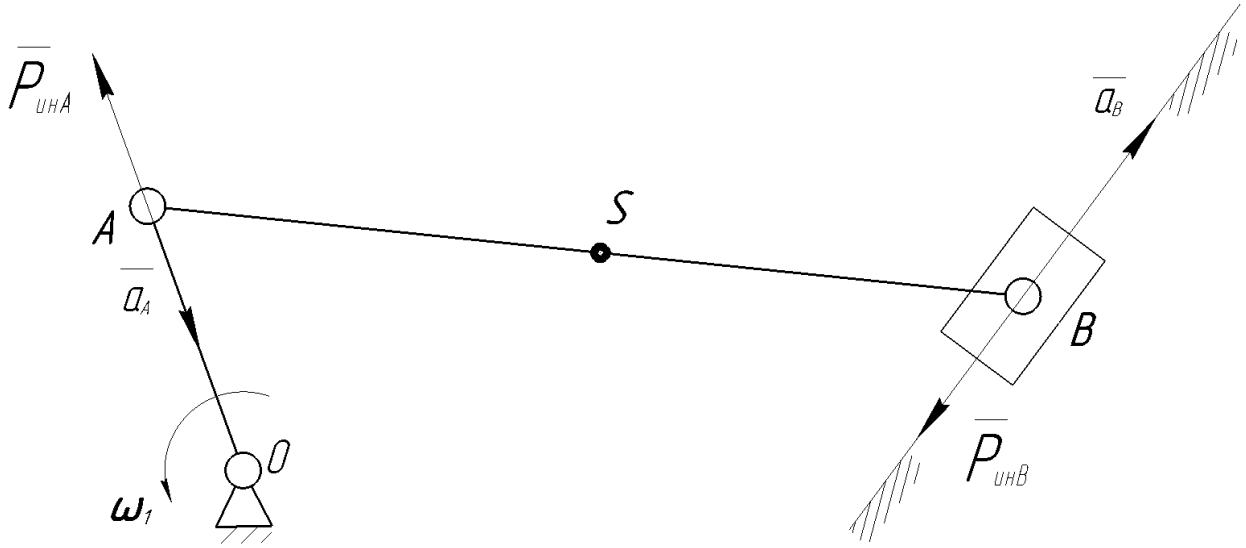


Рис. 10. Определение направлений сил инерции в выбранных точках

Приведенный способ замещения двумя точками, при котором выполняются только первые два условия замещения (7)–(9), имеет приближенный характер и является вполне достаточным для эскизного проектирования.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ В КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ

В плоском рычажном механизме звенья, как правило, соединяются одноподвижными низшими вращательными или поступательными кинематическими парами. Эти связи накладывают на относительное движение звеньев ограничения, позволяющие совершать звеньям вполне определенные перемещения. Согласно основному положению механики [4], звенья в составе механизма можно рассматривать как свободные, если действующие связи заменить силами, которые называются реакциями связи *R*. Они могут быть найдены, только если картина внешнего и инерционного нагружения механизма определена.

В условиях отсутствия трения реакции R направлены по нормалям к активным поверхностям связи. Как известно, сила – это векторная величина, которая определяется в плоскости тремя параметрами: величиной, точкой приложения и направлением. Количество неизвестных параметров силы реакции связи зависит от вида кинематической пары. Силы реакции обозначаются R_{ni} с подстрочными индексами, состоящими из двух чисел, указывающими, со стороны какого звена действует реакция (первый индекс – *n*) на какое звено (второй индекс – *i*) данной пары.

Во вращательной паре *A* (рис. 11, *а*) давление на цилиндрической поверхности распределено по определенному закону и зависит от точности исполнения и степени приработанности поверхностей, наличия смазки, упругих свойств материалов, но результирующая сил реакции $\overline{R}_{12}$[4] обязательно проходит через центр шарнира – точку *A*, т. е. точка приложения реакции всегда известна, но при этом неизвестными являются ее направление и величина.

В поступательной кинематической паре *B* (рис. 11, *б*) вектор силы реакции $\overline{R}_{12}$ перпендикулярен направляющей, или линии *x*-*x* движения

[4] $\overline{R}_{12}$ – это реакция первого звена на второе звено в составе кинематической пары (всегда имеет место равенство $R_{12} = -R_{21}$).

звена 2 (ползуна), неизвестными параметрами будут точка приложения реакции $\overline{R}_{12}$ и ее численная величина. Таким образом, в каждой однопод-вижной связи определению подлежат два параметра реакции.

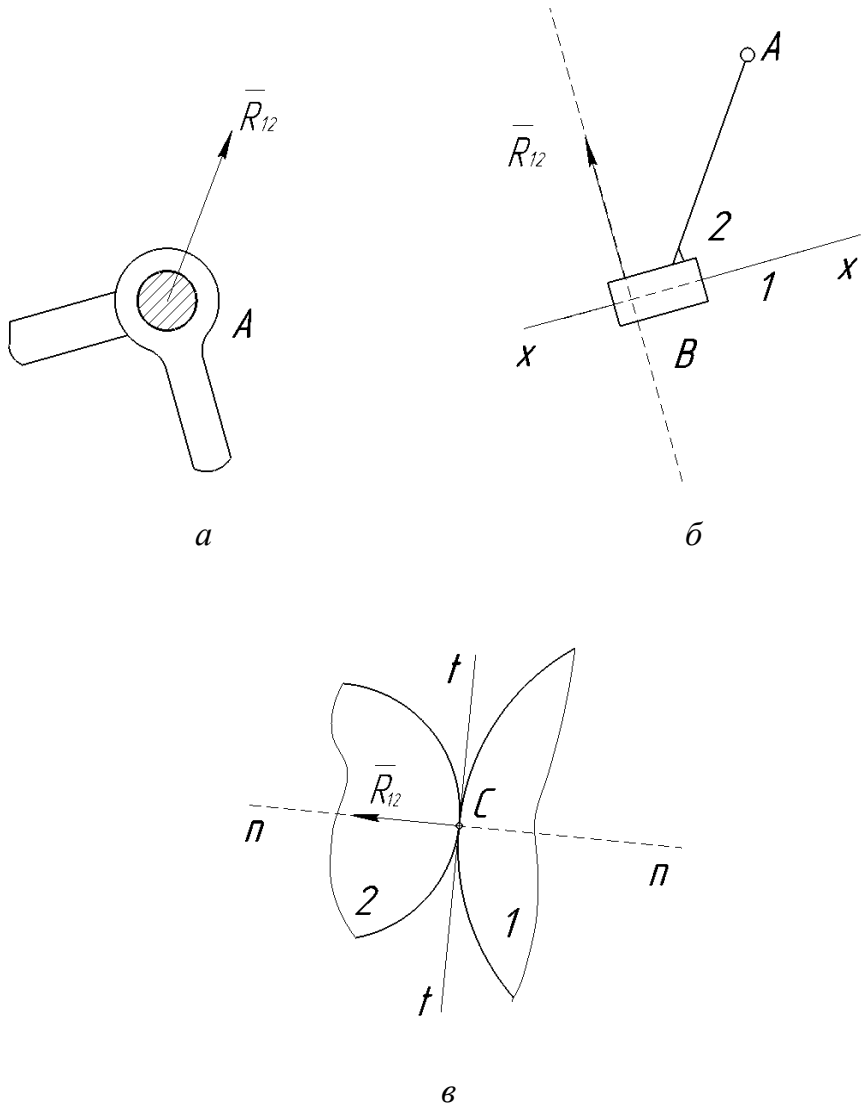


Рис. 11. Определение реакций в кинематических парах:
а – в низшей вращательной; *б* – в низшей поступательной;
в – в высшей

Отметим, что положение реакции относительно опорной поверхности в такой кинематической паре играет существенную роль, так как при прохождении реакции $\overline{R}_{12}$ через середину опорной поверхности ползуна удельные давления q распределены симметрично (рис. 12, *а*). Смещение реакции вызывает перекос звена и несимметричное распределение удель-

ного давления q (рис. 12, *б*), в результате чего возможно возникновение такого явления, как заклинивание ползуна. Особенно если смещение реакции R привело к ее выходу за контур ползуна.

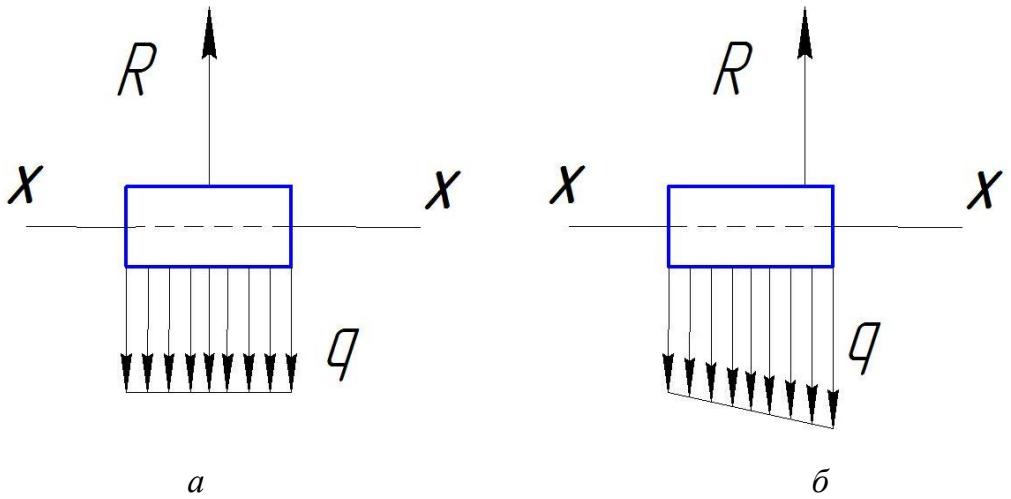


Рис. 12. Распределение удельного давления q в кинематической паре:
а – симметричное; *б* – асимметричное

В высшей кинематической паре (рис. 11, *в*) вектор силы реакции R_{12} направлен по нормали *n-n* к контактирующим поверхностям, в точке *C* приложена реакция соприкосновения звеньев 1 и 2, поэтому неизвестным ее параметром является только одна величина – модуль реакции.

Условие статической определимости кинематической цепи

Для твердого тела (к которому относится и звено механизма) можно в плоскости составить три уравнения равновесия [4]. Если обозначить количество звеньев n, то общее количества уравнений равновесия будет равно $3n$.

Если кинематическая схема механизма содержит только одноподвижные кинематические пары и их количество p_5, тогда количество неизвестных и подлежащих определению параметров связей составит величину $2p_5$.

Для разрешимости задачи необходимо обеспечить ее статическую определимость, это произойдет, если количество определяемых параметров связей и количество уравнений равновесия (статики) совпадут, т. е.

$$3n = 2p_5$$

или

$$3n - 2p_5 = 0. \qquad (13)$$

Если же в составе плоской кинематической цепи присутствуют также и высшие двухподвижные кинематические пары (пары 4-го класса p_4), то уравнение статической определимости принимает иной вид:

$$3n = 2p_5 + p_4;$$

$$3n - 2p_5 - p_4 = 0. \qquad (14)$$

Оба приведенных условия (13) и (14) статической определимости кинематической цепи совпадают с условиями существования групп Ассура, поэтому все структурные группы Ассура являются статически определимыми системами. Кинетостатический анализ механизма проводится расчетом элементарных структурных групп, на которые можно разложить исследуемый механизм.

Определение реакций в кинематических парах многозвенного механизма следует начинать с наиболее удаленной от ведущего звена структурной группы, а далее переходить от группы к группе по направлению к ведущему звену, учитывая, что на расчет каждой последующей группы оказывает влияние расчет предыдущей группы. Последним проводится расчет исходного механизма (в случае, если степень подвижности плоского механизма равна 1, то исходный механизм состоит из стойки и ведущего звена, которые могут быть соединены между собой вращательной или поступательной кинематической парой).

4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СИЛОВОГО РАСЧЕТА

При кинетостатическом (силовом) расчете идеальных механизмов определяются реакции в кинематических парах с учетом внешних сил и сил инерции, приложенных к звеньям механизма. Картины нагружения звеньев и связей необходимы для дальнейших прочностных расчетов и определения рациональных конструктивных форм звеньев и связей.

При решении силовой задачи применяют известный из теоретической механики принцип Д'Аламбера совместно с принципом освобождаемости от связей. Принцип Д'Аламбера [5] позволяет переводить инерционное нагружение в разряд внешних сил. Сформулируем его следующим образом: *если к системе внешних сил, действующих на подвижную механическую систему, добавить силы инерции, то такую совокупность сил можно уравновесить реакциями связей и к такой системе можно применить законы статики*.

Принцип освобождаемости от связей позволяет, не нарушая движения, разрушать связи в механической системе, заменяя их соответствующими реакциями. Соответственно, определение таких реакций возможно только в случае расчленения механизма на статически определимые кинематические группы Ассура.

Совместное использование принципа Д'Аламбера и принципа освобождаемости от связей описывается следующими уравнениями:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \overline{P}_i + \sum_{i=1}^{i=n} \overline{P}_{ини} + \sum_{i=1}^{i=n} \overline{R}_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} M_0(P_i) + \sum_{i=1}^{i=n} M_0(P_{ини}) + \sum_{i=1}^{i=n} M_0(R_i) = 0,$$

где $\overline{P}_i$ – силы, действующие на подвижную систему или звено; $P_{ини}$ – силы инерции; $\overline{R}_i$ – реакции связей; $M_0(P_i)$, $M_0(P_{ини})$, $M_0(R_i)$ – моменты от перечисленных сил.

Для силового исследования механизмов применяются следующие методы: графический, аналитический и экспериментальный. Наиболее удобным методом кинетостатики является графоаналитический метод – метод планов сил, который является графическим решением векторных уравнений кинетостатики.

Предварительно определив значения внешних сил и, по результатам кинематического расчета, сил и моментов сил инерции звеньев, рассмотрим построение планов сил для схем плоских механизмов, содержащих статически определимые структурные группы Ассура II класса, 2-го порядка, различных модификаций.

4.1. Примеры силового исследования плоских механизмов с низшими кинематическими парами, содержащих группы Ассура II класса различных модификаций

Проведение предварительных структурного и кинематического расчетов плоских рычажных механизмов показано в [3]. Силовой расчет будем проводить, начиная с последней от ведущего звена группы Ассура II класса, к которой приложены силы или моменты сил полезных сопротивлений, величина которых, как правило, известна из технического задания.

Силовой расчет механизма, содержащего группу Ассура II класса, 2-го порядка, 1-й модификации (вида), методами теоретической механики

В качестве примера рассмотрим плоский рычажный четырехзвенный механизм, содержащий структурную группу II класса, 2-го порядка, 1-го вида, в состав которой вошли только вращательные кинематические пары. Предварительно проведен кинематический расчет такого механизма (рис. 13), определены линейные и угловые скорости и ускорения отдельных точек и звеньев в его составе.

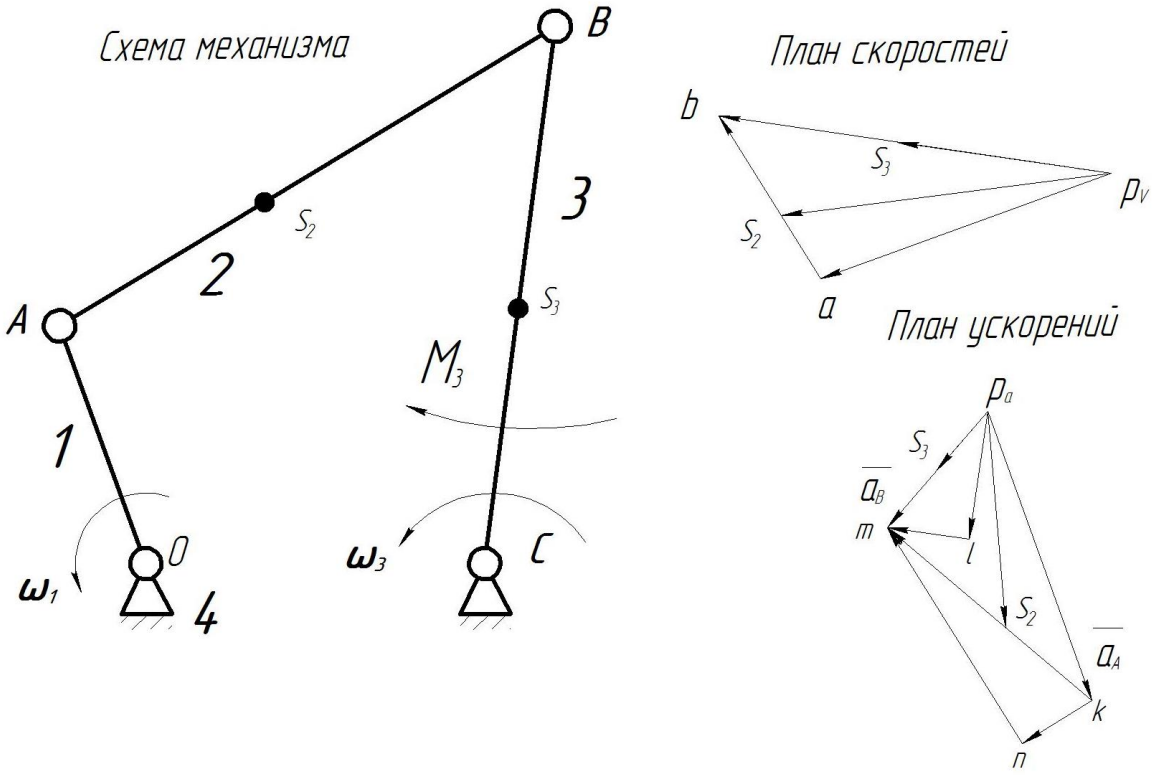


Рис. 13. Схема и кинематический расчет кривошипно-коромыслового механизма

Согласно принципу освобождаемости от связей выделяем из механизма группу Ассура, содержащую звенья 2 и 3. Зарисовываем ее отдельно в масштабе μ_l. Отброшенные звенья 1 и 4 изображаем штриховыми линиями, как на рис. 14, *а*.

Предположим, что звено 3 нагружено моментом от сил полезного сопротивления заданной величины M_3. Согласно рис. 14 звено 2 нагружено силой инерции $P_{ин2}$ и парой сил с моментом $M_{ин2}$, а звено 3 *BC* – силой инерции $P_{ин3}$ и парой сил с моментом $M_{ин3}$; линии действия, точки приложения и величина сил определены из предварительного расчета, представленного выше. Также к внешним силам относятся силы тяжести G_2 и G_3, приложенные в центрах масс соответствующих звеньев 2 и 3. При выделении из механизма любой структурной группы действие отсоединенной части заменяем реакциями, приложенными к соответствующим элементам[5] кинематических пар.

[5] **Элемент кинематической пары** – совокупность поверхностей, линий и точек, по которым соприкасаются звенья в составе кинематической пары.

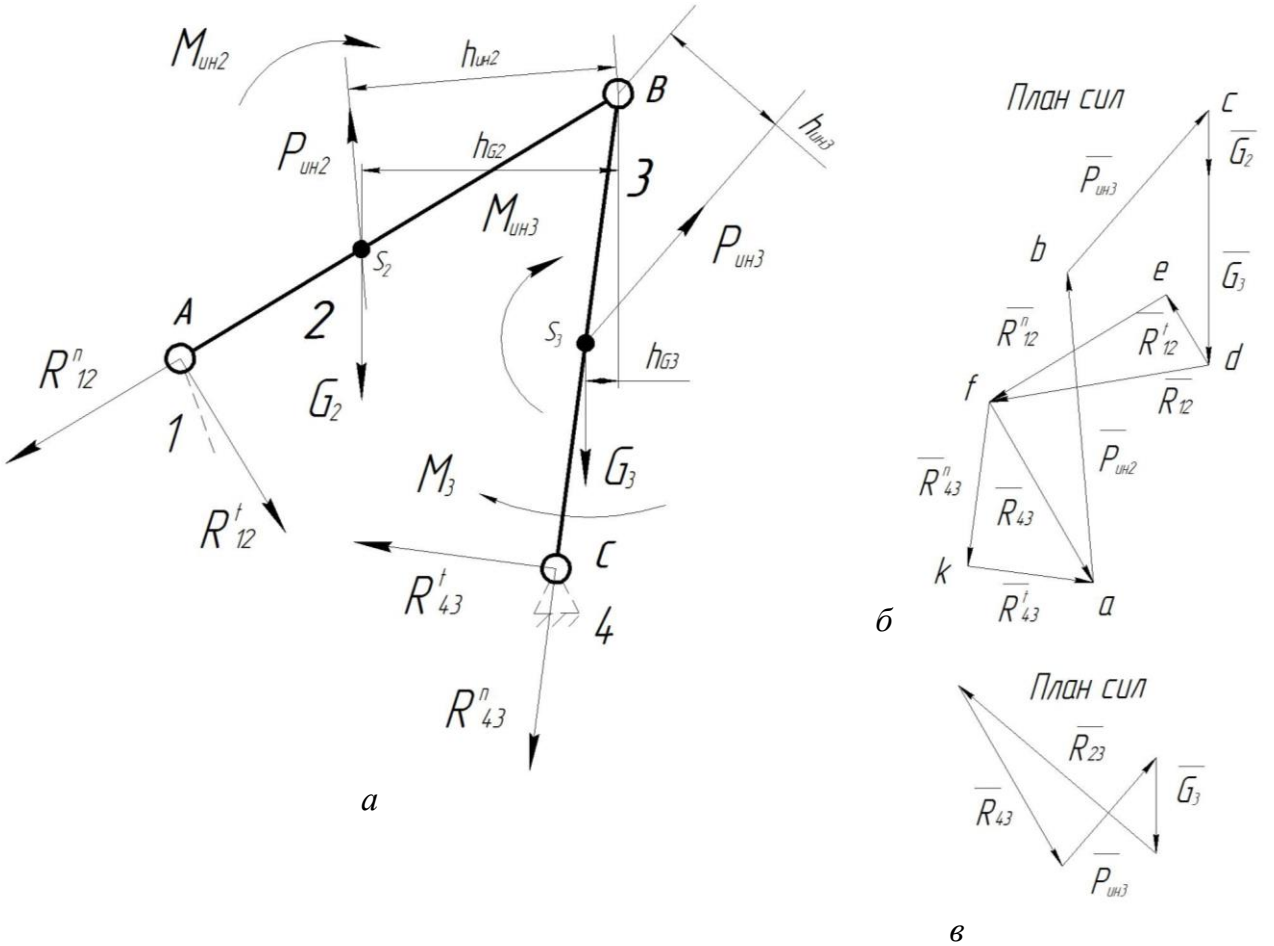


Рис. 14. Силовой расчет структурной группы с вращательными парами:
а – схема нагружения; *б* – графическое решение (план сил) уравнения (13);
в – графическое решение (план сил) уравнения (15)

В данном случае со стороны отброшенных звеньев 1 и 4 на звенья 2 и 3 будут действовать неизвестные реакции R_{12} и R_{43} в шарнирах *A* и *C*, которые раскладываются на две составляющие: нормальную составляющую реакции R_{12}^{n} и тангенциальную составляющую реакции R_{12}^{t}, а также нормальную составляющую реакции R_{43}^{n} и тангенциальную составляющую реакции R_{43}^{t}.

Составляем уравнение равновесия группы 2–3, т. е. приравниваем нулю векторную сумму всех сил, действующих на группу Ассура:

$$\bar{P}_{ин2} + \bar{P}_{ин3} + \bar{G}_3 + \bar{G}_2 + \bar{R}_{12}^{n} + \bar{R}_{12}^{t} + \bar{R}_{43}^{t} + \bar{R}_{43}^{n} = 0. \qquad (15)$$

Графическое решение такого уравнения позволяет определить два неизвестных параметра, а в уравнении (13) их четыре – это величины составляющих реакций $\bar{R}_{12}^{n}$, $\bar{R}_{12}^{t}$, $\bar{R}_{43}^{t}$ и $\bar{R}_{43}^{n}$. Поэтому необходимо дополнительно определить тангенциальные составляющие реакций в шарнирах *A* и *C*. Рассматривая равновесие отдельных звеньев двухповодковой группы 2–3, составим уравнение моментов сил относительно внутреннего шарнира *B*.

Для 2-го звена уравнение равновесия в форме моментов сил:

$$\sum M_{(B)}^{(2)} = 0, \quad R_{12}^{t} \cdot l_{AB} - M_{ин2} - P_{ин2} \cdot h_{ин2} + G_2 \cdot h_{G2} = 0,$$

$$R_{12}^{t} = \frac{M_{ин2}}{l_{AB}} + P_{ин2} \cdot \frac{h_{ин2}}{l_{AB}} - G_2 \cdot \frac{h_{G2}}{l_{AB}}, \qquad (16)$$

где $h_{ин2}$ – плечо силы инерции $P_{ин2}$, м; h_{G2} – плечо силы тяжести G_2, м (определяется со схемы нагружения механизма с учетом заданного масштаба построения схемы механизма, рис. 14, *а*); l_{AB} – длина звена АВ шатуна, м.

Стоит отметить, что, как известно, знак момента считается положительным, если он создает вращение относительно какой-либо точки против часовой стрелки, и отрицательным – при движении по часовой стрелке. Далее из формулы (16) определяем тангенциальную составляющую реакции R_{12}^{t} в шарнире А.

Составим подобное уравнение равновесия для звена 3 в составе группы Ассура:

$$\sum M_{(B)}^{(3)} = 0, \quad -R_{43}^{t} \cdot l_{BC} - M_{ин3} + P_{ин3} \cdot h_{ин3} - M_3 + G_3 \cdot h_{G3} = 0,$$

$$R_{43}^{t} = -\frac{M_{ин3}}{l_{BC}} + P_{ин3} \cdot \frac{h_{ин3}}{l_{BC}} - \frac{M_3}{l_{BC}} + G_3 \cdot \frac{h_{G3}}{l_{BC}},$$

где $h_{ин3}$ – плечо силы инерции $P_{ин3}$, м; $h_{пс}$ – плечо силы сопротивления $P_{пс}$, м. В результате получим тангенциальную составляющую реакции R_{43}^{t} в шарнире *C*.

После предварительных расчетов переходим к построению силового многоугольника, который соответствует равновесию структурной группы 2–3, а также является графическим решением векторного уравнения (15) и называется планом сил. Из семи значений сил, входящих в эту формулу, пять сил известны по величине и направлению, а две нормальные составляющие полных реакций в шарнирах *A* и *C* известны только по направлению, поэтому такое уравнение с двумя неизвестными можно решить графически (рис. 14, *б*).

В соответствии с порядком записи сил в уравнении (15), начиная с известных, откладываем вектор силы $P_{ин2}$ (отрезок *ab*) в заранее выбранном масштабе, которому соответствует коэффициент μ_P. Из конца этого вектора откладываем вектор силы $P_{ин3}$ (*bc*), затем векторы сил тяжести G_2 и G_3 (общий отрезок *cd*). Из начала вектора силы $P_{ин2}$ проводим вектор тангенциальной составляющей реакции R_{43}^t, перпендикулярно звену *BC* (*ka*). Величина этой тангенциальной составляющей может получиться с отрицательным знаком, и, следовательно, при построении векторного многоугольника направление этой силы изменится на противоположное от заданного, как на рис. 14, *б*, и, далее, из его конца проводим линию, параллельную *BC*, которая определяет линию действия вектора нормальной составляющей реакции R_{43}^n. В конец вектора силы G_3 к точке *d* пристраиваем линию действия вектора тангенциальной составляющей реакции R_{12}^t (*de*) перпендикулярно звену *AB* в противоположном от схемы нагружения направлении (так как полученное значение R_{12}^t из формулы (16) так же имеет отрицательный знак), величина определена заранее с учетом масштабного коэффициента μ_P, и из точки *e* проводим линию действия нормальной составляющей реакции R_{12}^n параллельно звену 2 до пересечения с вектором силы R_{43}^n в точке *f*. На пересечении этих линий определяются значения нормальных составляющих реакций R_{43}^n (*kf*) и R_{12}^n (*ef*) и полных реакций R_{12} (*df*) и R_{43} (*fa*) в шарнирах *A* и *C*. Таким образом, получается

план сил в виде замкнутого многоугольника, состоящего из внешних сил, а также сил инерции, которые могут быть переведены в категорию внешних сил и сил реакции в шарнирах *A* и *C*.

Числовые значения нормальных составляющих реакций R_{43}^{n} и R_{12}^{n}, а также полных реакций R_{12} и R_{43} определяются путем умножения соответствующих отрезков с плана сил (рис. 14, *б*) на масштабный коэффициент μ_P, например, $R_{43}^{n} = kf \cdot \mu_P$ и т. д.

Полную реакцию в шарнире *B* определяем из условия равновесия звена *BC*

$$\bar{P}_{ин3} + \bar{R}_{43} + \bar{R}_{23} + \bar{G}_3 = 0 \qquad (17)$$

или *AB*

$$\bar{P}_{ин2} + \bar{R}_{12} + \bar{R}_{32} + \bar{G}_2 = 0.$$

На рис. 14, *в* представлено графическое решение уравнения (17), а именно, определение реакции R_{23} на плане сил путем соединения конца вектора $P_{ин3}$ с началом вектора полной реакции R_{43} (вектор реакции R_{32} имеет ту же линию действия, но направлен в противоположную сторону).

Силовой расчет механизма, содержащего группу Ассура II класса, 2-го порядка, 1-й модификации (вида), с использованием метода замещающих масс

Выполненный выше силовой расчет структурной группы II класса, 2-го порядка, 1-го вида можно в некоторой степени упростить и провести методом замещающих масс, при этом отсутствует необходимость определять ускорения центров масс и моменты от сил инерции звеньев $M_{ин2}$ и $M_{ин3}$ [6].

Для того чтобы разнести соответствующие силы инерции, необходимо определить точечные массы m_{A2} и m_{B2}, заменяющие звено 2 (рис. 15):

$$m_{A2} = m_2 \frac{l_{S2B}}{l_{AB}} \qquad \text{и} \qquad m_{B2} = m_2 \frac{l_{S2A}}{l_{AB}},$$

а также точечные массы m_{B3} и m_{C3}, заменяющие звено 3:

$$m_{B3} = m_3 \frac{l_{S2C}}{l_{BC}} \qquad \text{и} \qquad m_{C3} = m_3 \frac{l_{S2B}}{l_{BC}}.$$

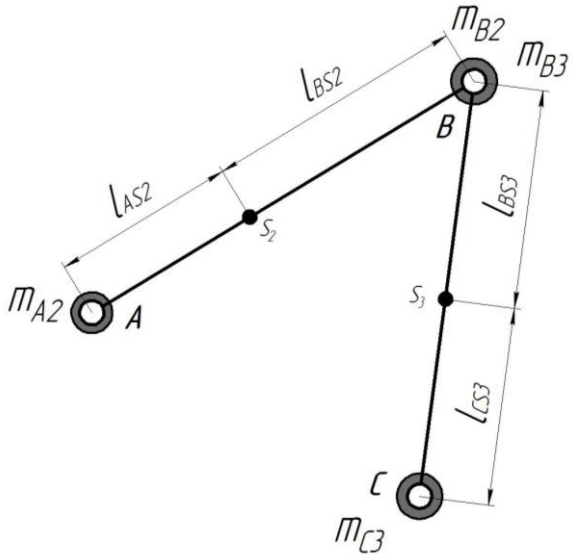


Рис. 15. Замещение масс в шарнирах А и В

Далее определим значения силы инерции с учетом полученных масс и соответствующих ускорений точек разнесения согласно формулам (12):

$$P_{ИA2} = m_{A2} \cdot a_A, \; P_{ИB2} = m_{B2} \cdot a_B;$$

$$P_{ИB3} = m_{B3} \cdot a_B, \; P_{ИC3} = m_{C3} \cdot 0.$$

На рис. 16, *а* приведена схема нагружения группы Ассура II класса силами инерции с учетом замещающих масс, которые приложены в соответствующих шарнирах. К центру шарниров *A* и *B* прикладываем силы

инерции $P_{ИА2}$ шатуна 2 и $P_{ИВ2}$ коромысла 3, соблюдая направление, противоположное соответствующим ускорениям. На звено 3 в шарнире *B* прикладываем силу инерции $P_{ИВ3}$. Также учитываем момент сил от внешнего нагружения M_3 на звене и силы тяжести G_2 и G_3, приложенные в соответствующих центрах масс звеньев.

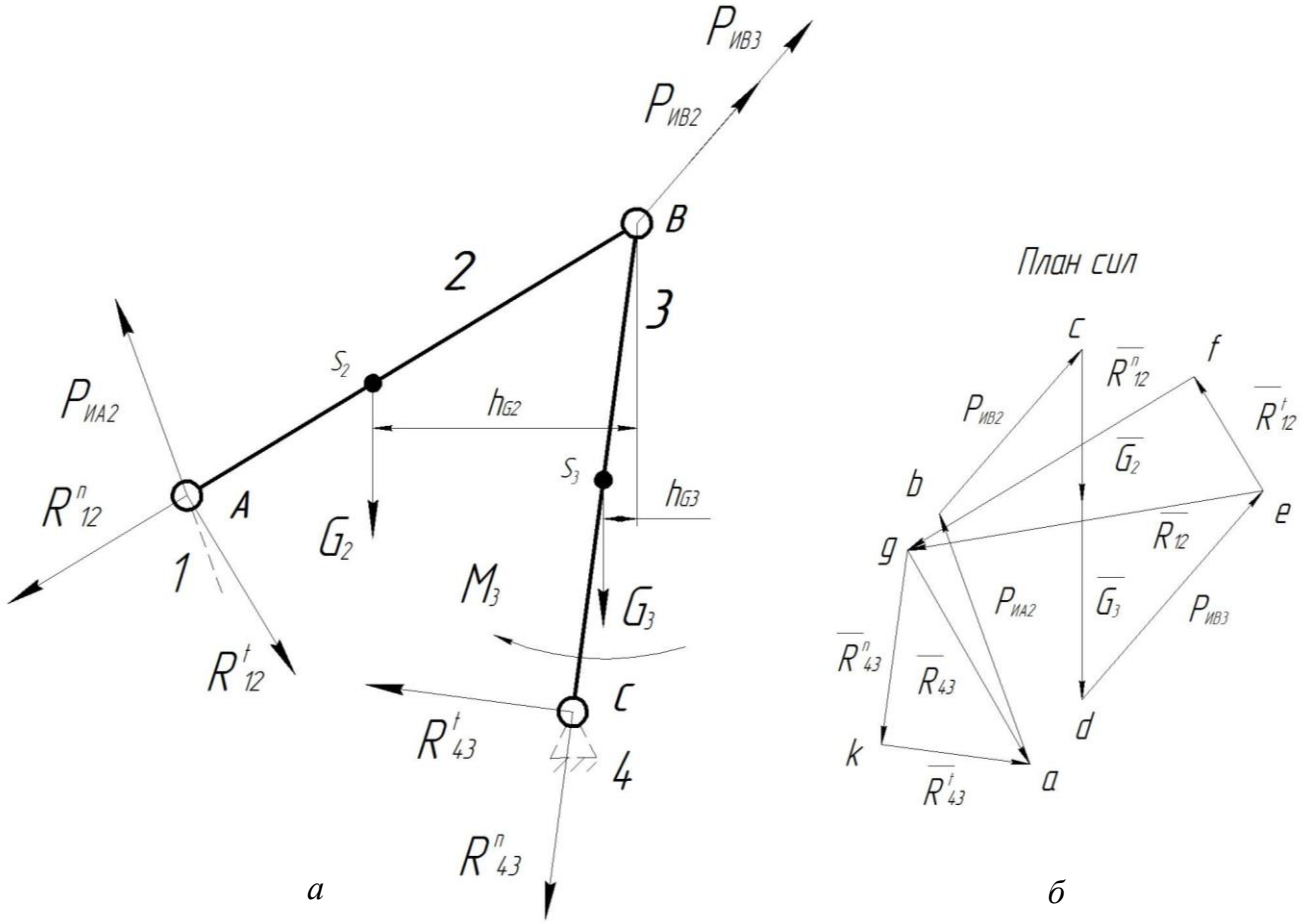


Рис. 16. Силовой расчет структурной группы методом замещающих масс:
а – схема нагружения; *б* – графическое решение (план сил) уравнения (16)

Далее составляем векторное уравнение равновесия для структурной группы 2–3:

$$\bar{P}_{ИА2} + \bar{P}_{ИВ2} + \bar{P}_{ИВ3} + \bar{G}_3 + \bar{G}_2 + \bar{R}^n_{12} + \bar{R}^t_{12} + \bar{R}^t_{43} + \bar{R}^n_{43} = 0, \qquad (18)$$

для его графического решения определяем, как и в предыдущем расчете, недостающие тангенциальные составляющие сил реакций $\bar{R}^t_{12}$ и $\bar{R}^t_{43}$,

согласно уравнениям равновесия в форме моментов сил относительно точки B:

$$\sum M_{(B)}^{(2)}=0, \quad R_{12}^{t}\cdot l_{AB}-M_{ин2}+G_2\cdot h_{G2}=0,$$

$$R_{12}^{t}=-G_2\cdot\frac{h_{G2}}{l_{AB}},$$

$$\sum M_{(B)}^{(3)}=0, \quad -R_{43}^{t}\cdot l_{BC}-M_3+G_3\cdot h_{G3}=0,$$

$$R_{43}^{t}=-\frac{M_3}{l_{BC}}+G_3\cdot\frac{h_{G3}}{l_{BC}}.$$

Графическое решение уравнения равновесия (18) представляет собой план сил в виде замкнутого многоугольника, как на рис. 16, *б*. Последовательность построений точно такая же, как в предыдущем случае.

Значения полных реакций в шарнирах A и C, R_{12} и R_{43}, полученные в свойственных им единицах измерения, в дальнейшем используют для расчетов на прочность звеньев механизмов и конструирования связей.

Силовой расчет механизма, содержащего группу Ассура II класса, 2-го порядка, 2-й модификации (вида), методом теоретической механики

Рассмотрим особенности построения планов сил для структурной группы второго вида (модификации) с вращательными и одной поступательной кинематическими парами. В качестве примера обратимся к схеме кривошипно-ползунного механизма, содержащего подобную группу Ассура, кинематический расчет которого представлен на рис. 17.

Руководствуясь приведенным выше алгоритмом решения, отбрасывая звено 1 и неподвижную направляющую 4 в поступательной паре B, добавим к внешней силе полезного сопротивления $P_{пс}$, приложенной к ведомому звену рассматриваемого механизма и силам тяжести G_2 и G_3, приложенным в центрах масс соответствующих звеньев, силы инерции $P_{ин2}$,

$P_{ин3}$ и момент сил инерции на звене 2 $M_{ин2}$, величину и направление которых определим из предварительного расчета, с учетом соответствующих ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма (рис. 17).

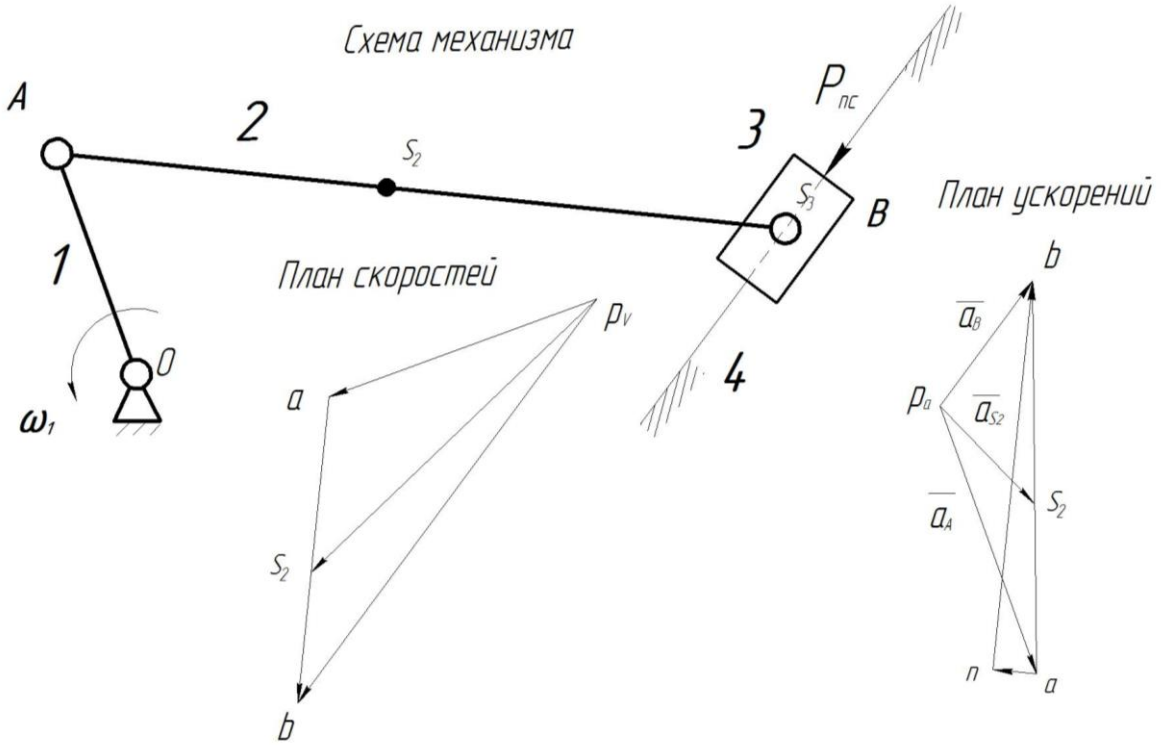


Рис. 17. Схема и кинематический расчет кривошипно-ползунного механизма

Действие отброшенных звеньев *1* и *4* заменим соответствующими реакциями: в шарнире *A* прикладываем силу реакции R_{12}, которая распадается на нормальную и тангенциальную составляющие следующим образом:

$$\bar{R}_{12}^{n} + \bar{R}_{12}^{t} = \bar{R}_{12},$$

и в поступательной кинематической паре *B* – силу реакции R_{43}, приложенную перпендикулярно неподвижной направляющей *4*.

Далее составляем векторное уравнение равновесия для всей структурной группы 2–3

$$\bar{P}_{пс} + \bar{P}_{ин3} + \bar{G}_3 + \bar{P}_{ин2} + \bar{G}_2 + \bar{R}_{12}^{n} + \bar{R}_{12}^{t} + \bar{R}_{43} = 0. \qquad (19)$$

Как известно, для графического решения уравнения равновесия необходимо иметь два неизвестных параметра, а в уравнении (19) их три – это величины составляющих реакции $\bar{R}_{12}^{n}$, $\bar{R}_{12}^{t}$ и полная $\bar{R}_{43}$. Необходимо определить тангенциальную составляющую полной реакции в шарнире *A* из уравнения равновесия в форме моментов относительно точки *B* для шатуна *2*

$$\sum M_{(B)}^{(2)} = 0, \quad R_{12}^{t} \cdot l_{AB} - M_{ин2} - P_{ин2} \cdot h_{ин2} + G_2 \cdot h_{G2} = 0,$$

откуда

$$R_{12}^{t} = \frac{M_{ин2}}{l_{AB}} + P_{ин2} \cdot \frac{h_{ин2}}{l_{AB}} - G_2 \cdot \frac{h_{G2}}{l_{AB}}.$$

В уравнении (17) остаются неизвестными величины R_{12}^{n} и R_{43}, оно имеет графическое решение в виде плана сил.

Откладываем векторы заданных сил в последовательности, указанной в уравнении равновесия (19), с учетом выбранного масштабного коэффициента μ_P, а именно: вектор силы $P_{пс}$ (*ab*), вектор силы инерции звена *3* $P_{ин3}$ (*bc*), вектор силы тяжести звена *3* G_3 (*cd*), вектор силы инерции звена *2* $P_{ин2}$ (*de*), вектор силы тяжести звена *2* G_2 (*ef*). После этого из конца вектора силы тяжести G_2 проводим линию действия тангенциальной составляющей реакции R_{12}^{t} (*fk*), сохраняя направление, принятое на схеме нагружения. Перпендикулярно данному вектору, из точки *f*, проводим линию действия вектора нормальной составляющей полной реакции R_{12}^{n} (*km*) до пересечения ее в точке *m* с вектором полной реакции R_{43} (*ma*), проведенным перпендикулярно направляющей звена *3* через начало построения плана сил – точку *a*, как на рис. 18, *б*.

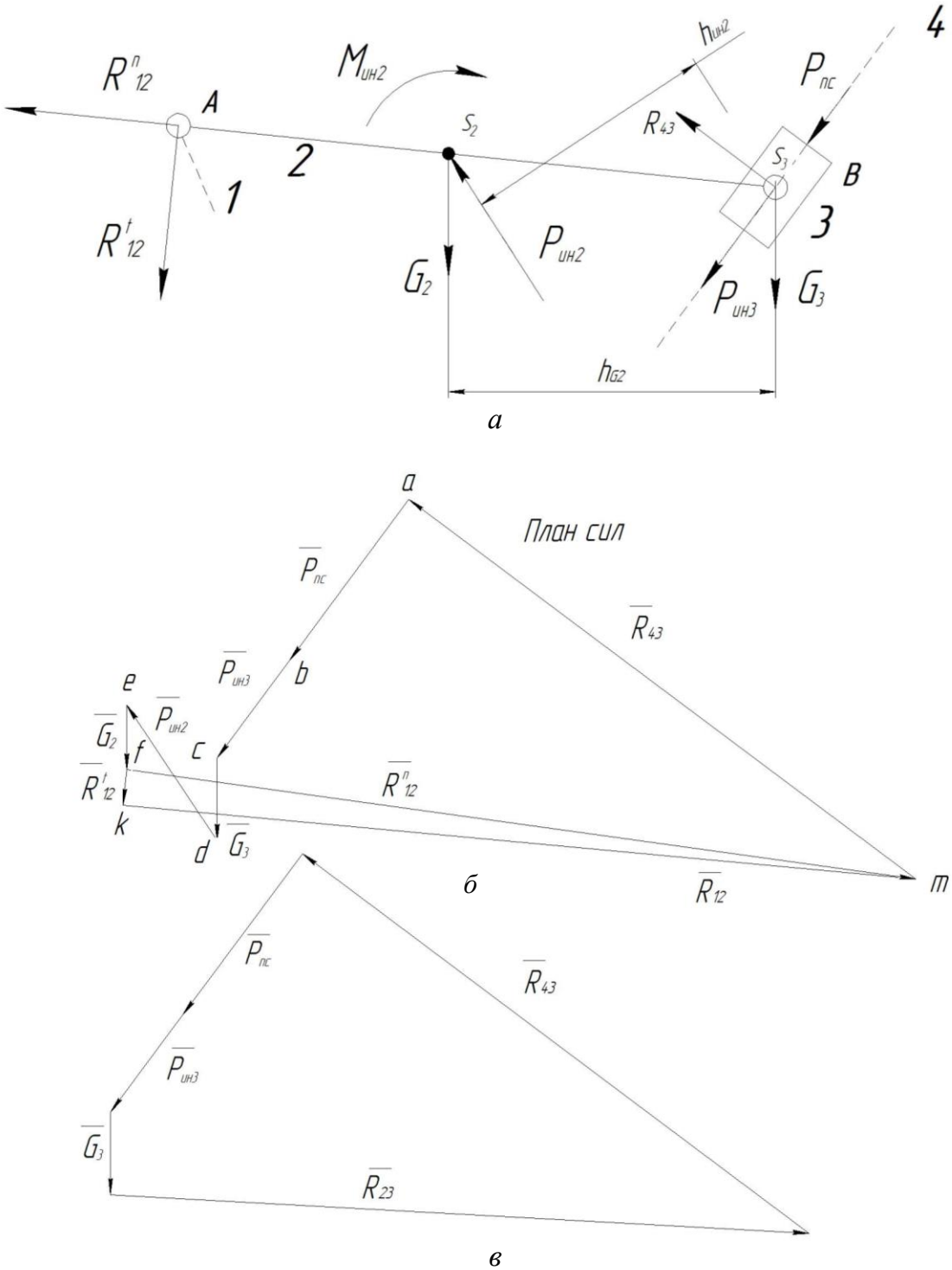


Рис. 18. Силовой расчет структурной группы II класса, 2-го порядка, 2-го вида: *а* – схема нагружения; *б* – графическое решение (план сил) уравнения (17); *в* – графическое решение (план сил) уравнения (18)

Таким образом, соединяя начало вектора тангенциальной составляющей R_{12}^{t} и конец нормальной составляющей R_{12}^{n}, определяем направление, а с учетом масштабного коэффициента μ_P и скалярную величину полной реакции R_{12}.

Полную реакцию в шарнире *B* находим из условия равновесия звена 3

$$\bar{P}_{пс} + \bar{P}_{ин3} + \bar{R}_{43} + \bar{R}_{23} + \bar{G}_3 = 0. \qquad (20)$$

На рис. 18, *в* представлено графическое решение уравнения (20), а именно, определение реакции R_{23} на плане сил путем соединения конца вектора G_3 с началом вектора полной реакции R_{43} (вектор реакции R_{32} имеет ту же линию действия и модульное значение, но направлен в противоположную сторону).

Силовой расчет механизма, содержащего группу Ассура II класса, 2-го порядка, 3-й модификации (вида), методом теоретической механики

Кинетостатический расчет структурной группы II класса, 2-го порядка, 3-й модификации (вида) также обладает некоторыми особенностями, на которые стоит обратить внимание, так как подобного рода механизмы встречаются в современном машиностроении. К структурным группам 3-го вида относят структурные группы с двумя вращательными внешними кинематическими парами и одной внутренней поступательной парой.

На рис. 19 представлен плоский шестизвенный кулисный механизм, в составе которого имеется несколько структурных групп, а именно: структурная группа, состоящая из звеньев 4–5 II класса, 2-го порядка, 2-го вида, и группа Ассура – из звеньев 2–3 II класса, 2-го порядка, 3-го вида. Предварительно необходимо провести кинематическое исследование рассматриваемого механизма.

Силовой расчет механизма проводят, начиная от самой удаленной от ведущего звена *1* структурной группы 4–5. Пример подобного исследования рассматривался выше, поэтому здесь внесем только уточнение отно-

сительно величин реакций R_{34} $(-R_{43})$ в шарнире C, которые полностью известны из векторного равенства сил группы Ассура 4–5.

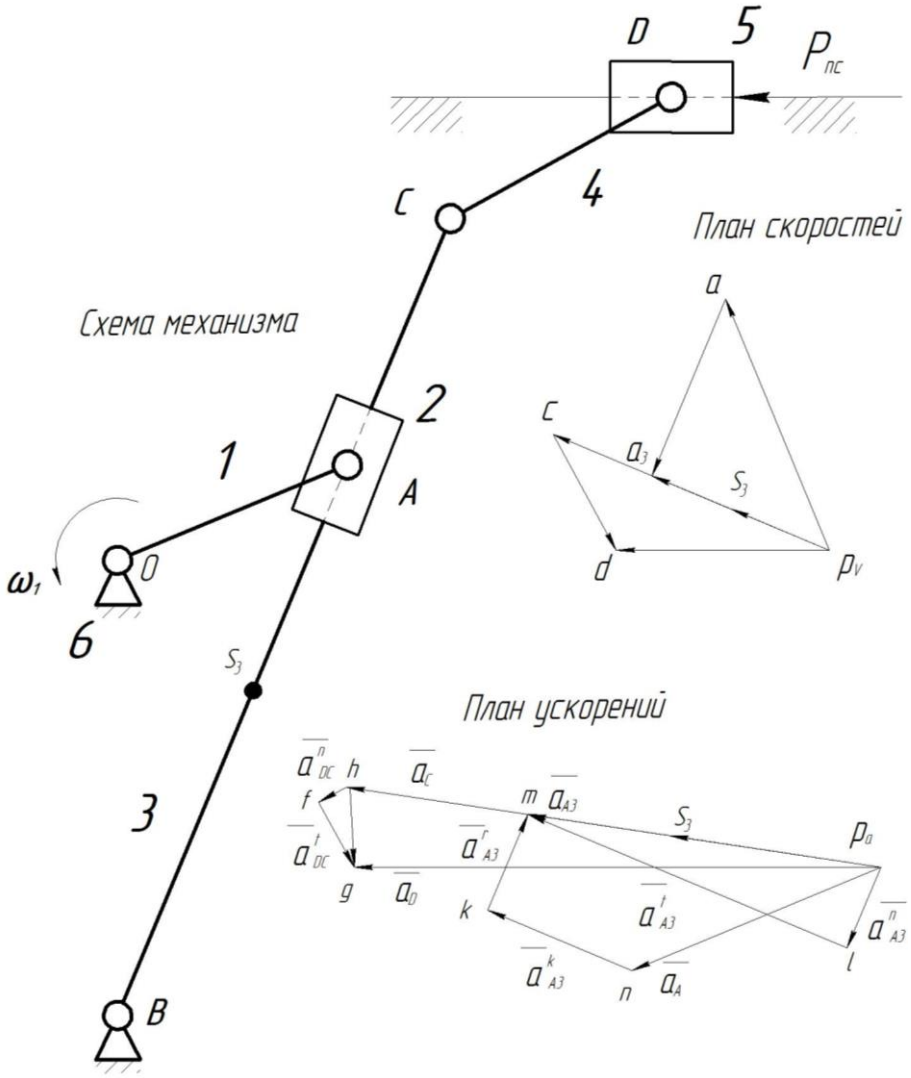
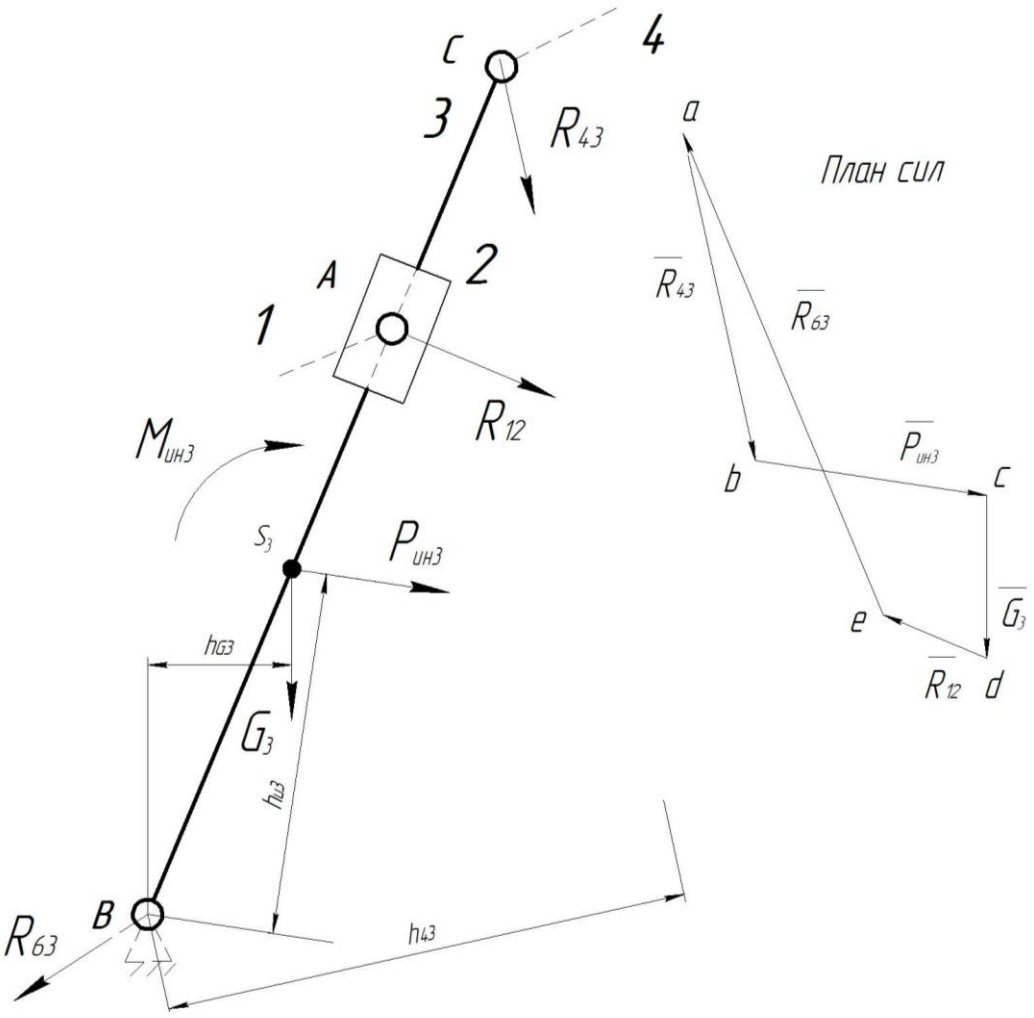


Рис. 19. Схема и кинематический расчет плоского кулисного механизма

Далее выделяем из исследуемого механизма структурную группу 2–3. В шарнире C прикладываем силу реакции R_{43} со стороны звена *4* и считаем ее величину и направление известными. В шарнире A действует сила реакции R_{12} со стороны отброшенного звена *1* кривошипа на звено *2* камень кулисы. Так как масса и, следовательно, вес и сила инерции камня кулисы *2* в большинстве случаев достаточно малы, то в ходе силового исследования ими можно пренебречь, поэтому будет иметь место следующее равенство $R_{12} = R_{23}(R_{32})$, а вектор силы реакции R_{12} будет направ-

лен как в поступательной кинематической паре между звеньями *2* и *3*, т. е. перпендикулярно кулисе *3* или звену АВ, как это показано на рис. 20, *а*.



а *б*

Рис. 20. Силовой расчет структурной группы II класса, 2-го порядка, 3-го вида: *а* – схема нагружения; *б* – графическое решение (план сил) уравнения (19)

Сила реакции R_{63} со стороны стойки *6* на звено *3* кулису прикладывается в произвольном направлении в центре шарнира *B*, ее численное значение также неизвестно. Величины сил тяжести G_3, силы инерции $P_{ин3}$ и момента от сил инерции $M_{ин3}$, а также направления их векторов определяются известным образом и прикладываются в точку s_3 (рис. 20, *а*).

Составляем векторное уравнение равновесия структурной группы 2–3:

$$\bar{R}_{43} + \bar{P}_{ин3} + \bar{G}_3 + \bar{R}_{12} + \bar{R}_{63} = 0. \qquad (21)$$

Для графического решения подобного уравнения, а именно, для построения плана сил, требуется определить величину силы реакции R_{12} из уравнения равновесия в форме моментов относительно точки *B*:

$$\sum M_{(B)}^{(3)} = 0, \quad -R_{12} \cdot l_{AB} - M_{ин3} - P_{ин3} \cdot h_{ин3} - G_3 \cdot h_{G3} - R_{43} \cdot h_{43} = 0$$

$$R_{12} = -\left(\frac{M_{ин3}}{l_{AB}} + P_{ин3} \cdot \frac{h_{ин3}}{l_{AB}} + G_3 \cdot \frac{h_{G3}}{l_{AB}} + R_{43} \cdot \frac{h_{ин3}}{l_{AB}} \right), \qquad (22)$$

где h_i – плечи соответствующих сил, принятые по схеме нагружения структурной группы (рис. 20, *а*). Проведя расчет силы реакции R_{12} во вращательной паре *A*, зная линию действия и направление этой силы (согласно уравнению (22) знак минус указывает на противоположное направление силы R_{12} от схемы нагружения по рис. 20, *а*), векторное уравнение равновесия (21) можно решить с помощью построения плана сил, так как три его составляющие $P_{ин3}$, G_3, R_{43} полностью известны.

Откладываем векторы указанных сил в последовательности, согласно векторному уравнению (21) равновесия с учетом выбранного масштабного коэффициента μ_P, а именно: вектор силы реакции звена *4* на кулису *3* R_{43} R_{43} (*ab*), вектор силы инерции звена 3 $P_{ин3}$ (*bc*), вектор силы тяжести звена *3* G_3 (*cd*), вектор силы реакции звена кривошипа *1* на камень кулисы *2* R_{12} (*de)*. Соединяем конец вектора силы R_{12} точку *e* с началом построения силового многоугольника точкой *a* (рис. 20, *б*), получаем вектор силы реакции R_{63} во вращательной паре *B*, тем самым определяя его направление и числовую величину с учетом масштабного коэффициента μ_P.

В том случае, когда масса звена *2* значительна, равновесие звеньев *2* и *3* следует рассматривать раздельно. Из равновесия звена *3* определяется реакция R_{23}, а из равновесия звена *2* с учетом $R_{32} = -R_{23}$ – реакция R_{12}.

4.2. Силовой расчет ведущего звена механизма

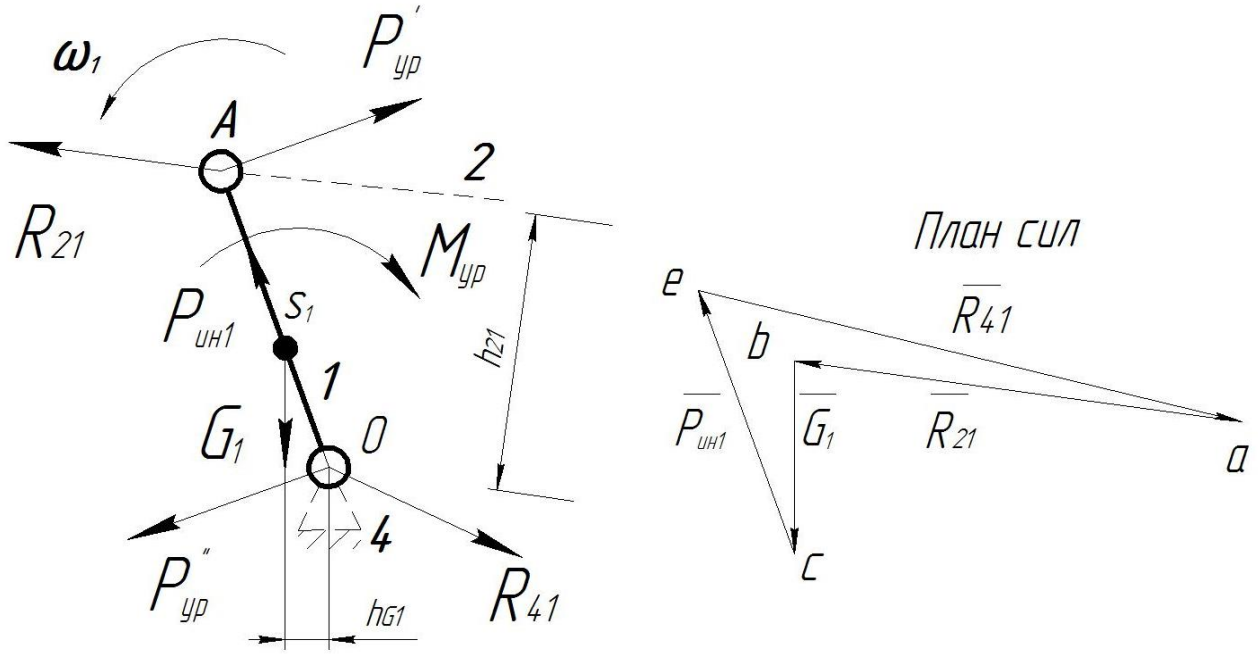
Как правило, в машинах ведущие звенья совершают простые, чаще вращательные движения. К таким звеньям приложены моменты сил со стороны двигателя, что позволяет механизму совершать движения с заданной скоростью, преодолевая заданную нагрузку. Именно эти силы или моменты сил и следует определить при кинетостатическом расчете механизма.

В качестве примера обратимся к четырехзвенному механизму (рис. 17). В результате проведенного силового расчета прицепной к ведущему звену структурной группы была определена сила реакции R_{12} в кинематической паре звеньев *1* и шатуна *2*. Реакция R_{21} равна по величине и обратна по направлению ранее определенной силе R_{12}, прикладываем её в точке *A*. В точке 0 приложим силу реакции R_{41} со стороны отброшенной стойки *4*, ее величина и направление пока неизвестны. Помимо этого, следует приложить силу тяжести G_1 самого кривошипа *1* в точке S_1, а также его силу инерции $P_{ин1}$, в предположении о равномерном вращении кривошипа, т. е. ω_1 = const.

Для того чтобы определить силы и моменты сил (в дальнейшем, будем называть их уравновешивающими $P_{ур}$ и $M_{ур}$ для заданной системы сил, так как определяться они будут из условия равновесия звена *1*), действующих на входное звено со стороны примыкающего двигателя, который передает движение, следует учесть способ соединения двигателя с ведущим звеном *1*. Если ведущее звено *1* непосредственно связано с электродвигателем через фрикционную, зубчатую, втулочно-пальцевую муфты (рис. 21, *а*), то на звено *1* будет передаваться вращающий момент, и его величина и будет называться уравновешивающим моментом $M_{ур}$, который обеспечивает заданный закон движения при ω_1 = const.

Далее решение силовой задачи проводим известным образом. По рис. 21, *а* составляем векторное уравнение равновесия всех сил для ведущего звена *1*

$$\bar{R}_{21} + \bar{P}_{ин1} + \bar{G}_1 + \bar{R}_{41} = 0. \qquad (23)$$



а *б*

Рис. 21. Силовой расчет ведущего звена:
а – схема нагружения; *б* – графическое решение (план сил) уравнения (21)

Из уравнения равновесия в форме моментов сил, относительно оси вращения ведущего звена точки 0, определим величину уравновешивающего момента $M_{ур}$, действующего на кривошип:

$$\sum M_{(0)}^{(1)} = 0, \quad R_{21} \cdot h_{21} + G_1 \cdot h_{G1} - M_{ур} = 0,$$

откуда

$$M_{ур} = G_1 \cdot h_{G1} + R_{21} \cdot h_{21},$$

где h_{G1} и h_{21} – плечи силы тяжести и силы реакции, соответственно, принятые по схеме нагружения структурной группы на рис. 21. *а* с учетом ее масштаба построения.

После этого проводим построение силового замкнутого многоугольника в последовательности, принятой в уравнении равновесия (23), при этом предварительно выбираем масштабный коэффициент μ_P.

Если же ведущее звено рычажного механизма с двигателем связано зубчатой передачей, то на ведущее звено *1* будет действовать уравновешивающая сила $P_{ур}$, которая прикладывается в точке *П* – полюсе зацепления двух зубчатых колес с радиусами начальных окружностей r_{w1} и r_{w2}, направлена по линии зацепления под углом зацепления α_w к общей касательной *t-t* к начальным окружностям (рис. 22, *а*). Направление уравновешивающей силы $P_{ур}$ выбираем таким образом, чтобы момент этой силы относительно точки 0 был противоположно направлен моменту от силы реакции R_{21}.

В векторное уравнение равновесия в этом случае войдет уравновешивающая сила $P_{ур}$:

$$\bar{R}_{21} + \bar{P}_{ин1} + \bar{P}_{ур} + \bar{G}_1 + \bar{R}_{41} = 0.$$

Составим дополнительно уравнение равновесия в форме моментов сил относительно оси вращения ведущего звена точки *0* и тем самым определим величину уравновешивающей силы $P_{ур}$

$$\sum M_{(0)}^{(1)} = 0,\ R_{21} \cdot h_{21} + G_1 \cdot h_{G1} - P_{ур} \cdot r_{b2} = 0,$$

откуда

$$P_{ур} = G_1 \cdot \frac{h_{G1}}{r_{b2}} + R_{21} \cdot \frac{h_{21}}{r_{b2}},$$

где h_i – плечи соответствующих сил, принятые по схеме нагружения структурной группы на рис. 22, *а*; r_{b2} – радиус основной окружности ведомого колеса, на рис. 22, *а* это расстояние *0П* от центра вращения кривошипа *0* до полюса зацепления колес *П*.

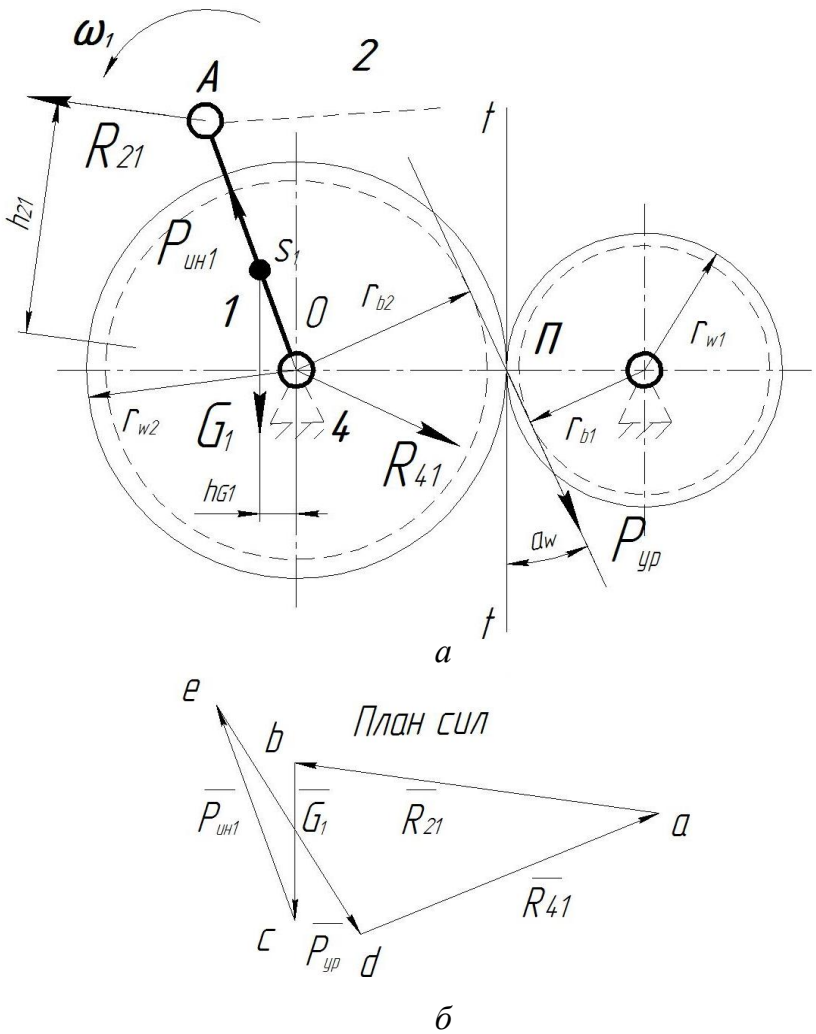


Рис. 22. Силовой расчет входного звена 1 – кривошипа:
а – схема нагружения; *б* – графическое решение (план сил)
уравнения (35)

Построение плана сил по рис. 22, *б* отличается от варианта, описанного выше, тем, что в многоугольник сил добавляется уравновешивающая сила $P_{ур}$ (*ed*), а замыкающим отрезком *da* получаем неизвестные величину и направление силы реакции R_{41} со стороны отброшенной стойки 4, численное значение которой можно определить с учетом масштабного коэффициента построения плана сил μ_P (стоит отметить, что величина и направление этой реакции по рис. 21 и рис. 22 существенно отличаются).

По результатам силового расчета, учитывая способ соединения двигателя и ведущего звена исследуемого механизма, можно получить годограф[6] сил реакций (рис. 23) в подшипнике ведущего звена машины, кото-

[6]**Годографом** называют кривую, которая соединяет концы векторов переменной величины, отложенных в разных положениях механизма от одной точки – полюса.

рый показывает одновременно величину и направление вектора реакции во вращательной кинематической паре.

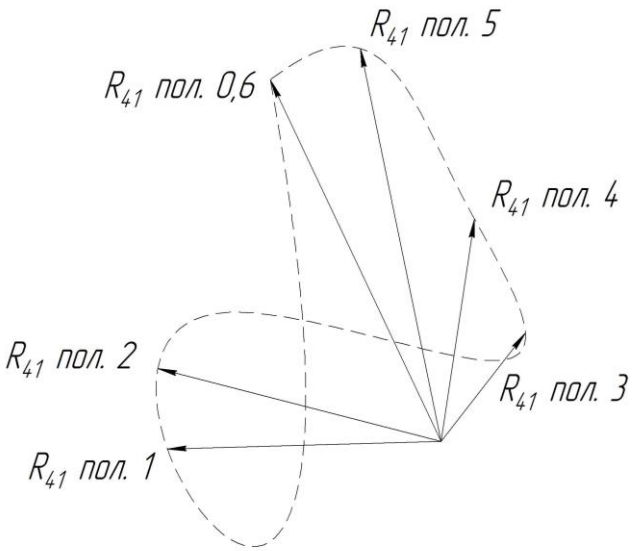


Рис. 23. Годограф сил реакций R_{41} во вращательной кинематической паре 4–1 в 6 положениях за цикл движения рычажного механизма по рис. 17

Так как силовой расчет проводится в определенном количестве положений, охватывающих весь цикл движения механизма, то появляется возможность выявить наиболее нагруженные из них (по рис. 23 это положения 5 и 6).

В поступательной паре (рис. 24) реакция R_{43} имеет сложный характер распределения.

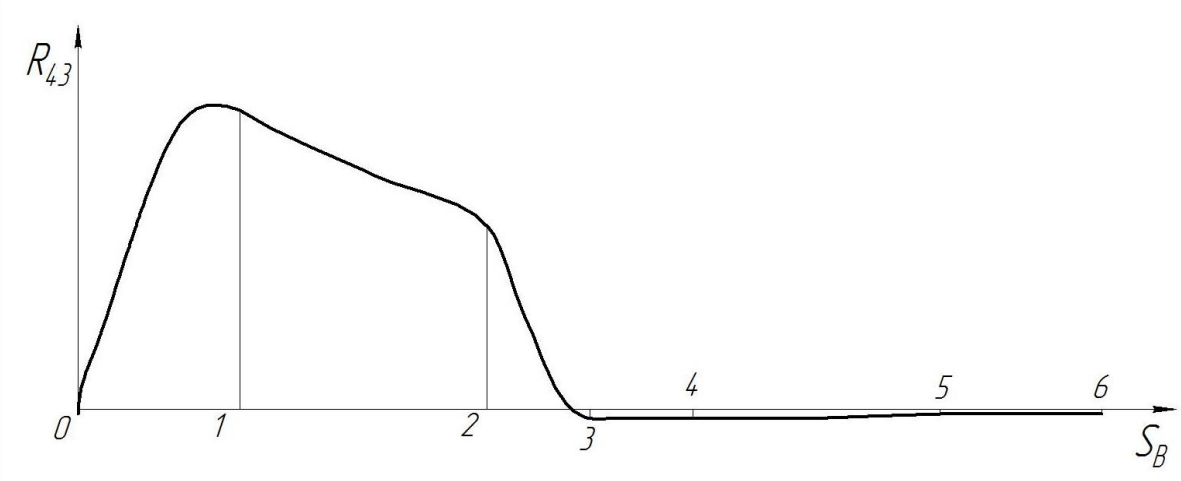


Рис. 24. График сил реакций R_{43} в поступательной паре 4–3 в 6 положениях за цикл движения рычажного механизма по рис. 17

Переменные значения реакции вызывают неравномерность износа активной поверхности кинематической пары (потерю исходной геометрии), указывают на рациональные места подвода смазки, наличие эффекта перекладки зазоров и других динамических явлений, именно с учетом этого проводится конструктивный расчет звеньев и подвижных соединений.

4.3. Определение уравновешивающей силы методом «жесткого» рычага Н. Е. Жуковского

Графоаналитический метод кинетостатики позволяет определять силы реакции в любой кинематической паре, при этом он сочетает в себе аналитический расчет тангенциальных составляющих полных реакций и графические построения для определения оставшихся неизвестными составляющих таких сил. Если исследуемый механизм состоит из большого количества звеньев, то силовая задача может стать достаточно трудоемкой и объемной. Поэтому для простоты определения уравновешивающей силы или уравновешивающего момента используется предложенный профессором Н. Е. Жуковским[7] метод, в основе которого лежит принцип возможных перемещений.

Согласно этому принципу: *если система находится в равновесии, то сумма элементарных работ этих сил на возможных перемещениях их точек приложения равна нулю* [7]. В механизмах с геометрическими связями возможное перемещение совпадает с действительным, кроме того, для исследования малых перемещений можно заменить элементарные работы эквивалентными мгновенными мощностями и использовать уравнение равенства мощностей

$$\sum N(P_i) + \sum N(M_i) + N(P_{yp}) = 0, \qquad (24)$$

при этом $N(P_i)$ определяет мгновенные мощности внешних сил

$$N(P_i) = P_i \cdot V_i \cdot \cos\delta_i \ ,$$

[7]**Николай Егорович Жуковский** (1847–1921) – заслуженный профессор Московского университета, основатель гидро- и аэродинамики.

где P_i – величина заданной внешней силы; V_i – скорость точки ее приложения; δ_i – угол между векторами силы и скорости; $N(P_i)$ – мгновенные мощности момента

$$N(M_i) = M_i \cdot \omega_i \ ,$$

где M_i – величина момента силы, действующего на *i*-звено; ω_i – угловая скорость *i*-звена; $N(P_{ур})$ – мгновенная мощность уравновешивающей силы

$$N(P_{ур}) = P_{ур} \cdot V_{ур} \cdot \cos\delta_{ур} \ ,$$

где $P_{ур}$ – величина уравновешивающей силы; $V_{ур}$ – скорость точки приложения уравновешивающей силы; $\delta_{ур}$ – угол между векторами силы и скорости.

В соответствии с этим уравнение (24) будет следующим:

$$P_i \cdot V_i \cdot \cos\delta_i + M_i \cdot \omega_i + P_{ур} \cdot V_{ур} \cdot \cos\delta_{ур} = 0.$$

Такое уравнение может быть решено относительно уравновешивающей силы $P_{ур}$, если знать точку приложения и ее скорость. Тогда можно сформулировать следующую теорему о «жестком рычаге» Н. Е. Жуковского: *если силу, приложенную к какой-либо точке звена механизма, не изменяя ее положения, перенести в одноименную точку повернутого на 90° плана скоростей, то момент от этой силы относительно полюса плана будет пропорционален развиваемой ей мощности.*

Данная теорема может быть использована для определения уравновешивающей силы или момента без последовательного расчета сил реакций в кинематических парах. Для этого необходимо:

– построить план скоростей для заданного положения механизма и повернуть его на 90° вокруг полюсной точки;

– перенести силы в одноименные точки плана скоростей, сохраняя при этом их направления;

– составить уравнение моментов от всех сил относительно полюса плана скоростей, затем, выразив уравновешивающую силу (уравновешивающий момент), определить ее величину.

Рассмотрим пример силового расчета шарнирного четырехзвенника по рис. 17 вышеизложенным методом.

Повернем на 90° план скоростей кривошипно-ползунного механизма, как показано на рис. 25.

В соответствии с теоремой о «жестком рычаге» Н. Е. Жуковского в соответствующие точки прикладываем силы тяжести G_1, G_2, G_3; силы инерции $P_{ин1}$, $P_{ин2}$, $P_{ин3}$; внешнюю силу полезного сопротивления $P_{пс}$.

Пара сил с моментом $M_{ин2}$ представлена составляющими $P'_{ин2}$ и $P''_{ин2}$, которые приложены в точках *a* и *b* перпендикулярно звену *ab*, их величину определим следующим образом:

$$P''_{ин2} = P'_{ин2} = \frac{M_{ин2}}{l_{AB}}.$$

Все силы перенесены со схемы нагружения без изменения их направления, действия каждой стоит учитывать отдельно.

Составим уравнение равновесия моментов относительно полюса с учетом всех сил, действующих на звенья механизма, по рис. 25, *б*:

$$P''_{ур} \cdot \overline{p_V a} + G_1 \cdot \bar{h}_{G1} + G_2 \cdot h_{G2} + G_3 \cdot h_{G3} - P'_{ин2} \cdot h_{ин'2} + P_{ин2} \cdot h_{ин2} +$$
$$+ P_{ин3} \cdot h_{ин3} + P_{пс} \cdot h_{пс} + P''_{ин2} \cdot h_{ин'2} = 0.$$

Откуда выразим уравновешивающую силу $P''_{ур}$:

$$P'_{ур} = G_1 \cdot \frac{h_{G1}}{\overline{p_V a}} + G_2 \cdot \frac{h_{G2}}{\overline{p_V a}} + G_3 \cdot \frac{h_{G3}}{\overline{p_V a}} - P'_{ин2} \cdot \frac{h_{ин'2}}{\overline{p_V a}} + P_{ин2} \cdot \frac{h_{ин2}}{\overline{p_V a}} +$$
$$+ P_{ин3} \cdot \frac{h_{ин3}}{\overline{p_V a}} + P_{пс} \cdot \frac{h_{пс}}{\overline{p_V a}} + P''_{ин2} \cdot \frac{h_{ин''2}}{\overline{p_V a}}.$$

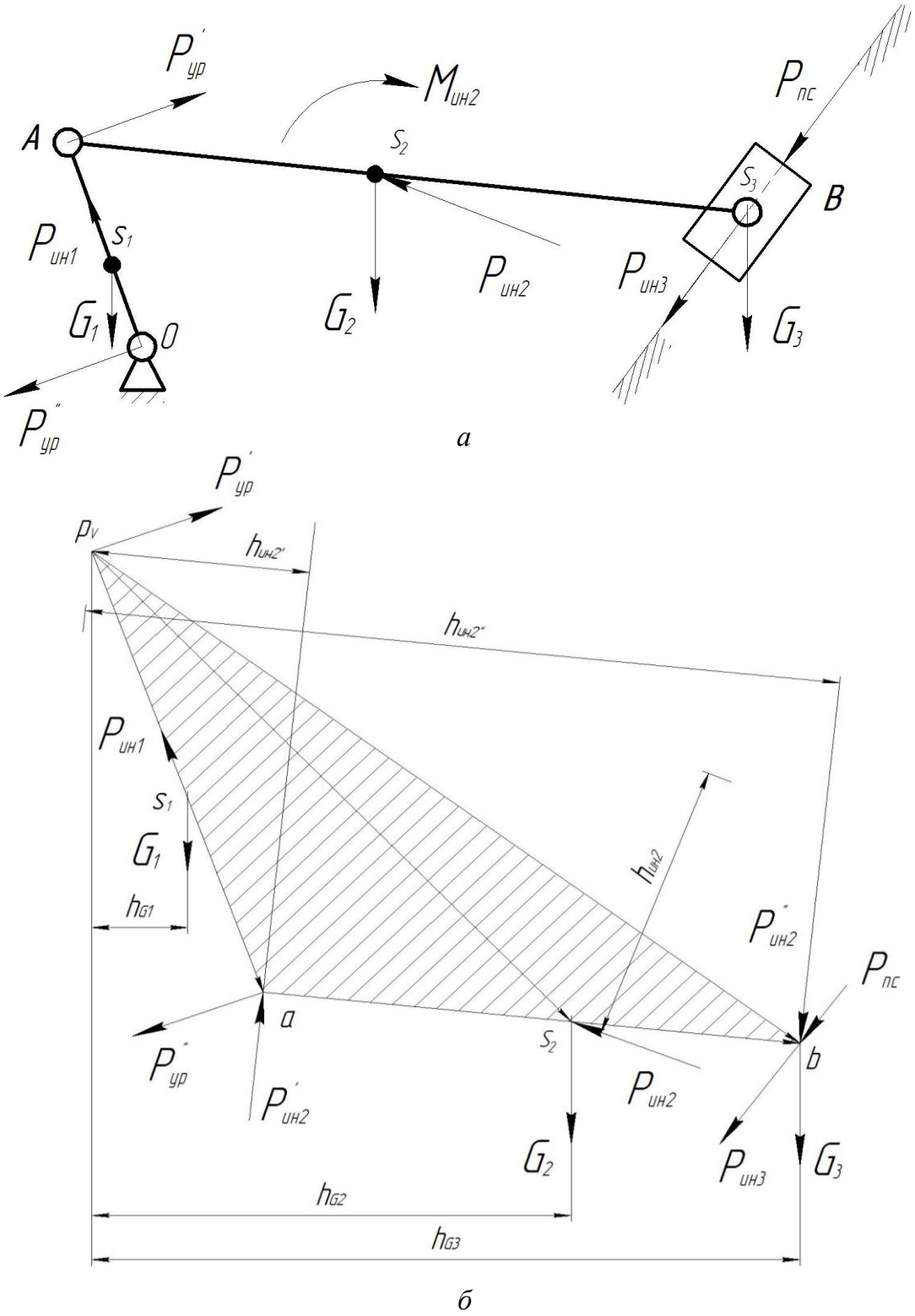


Рис. 25. «Жесткий рычаг» для четырехзвенного механизма по рис. 17:
а – схема нагружения механизма;
б – схема нагружения «жесткого рычага» Н. Е. Жуковского

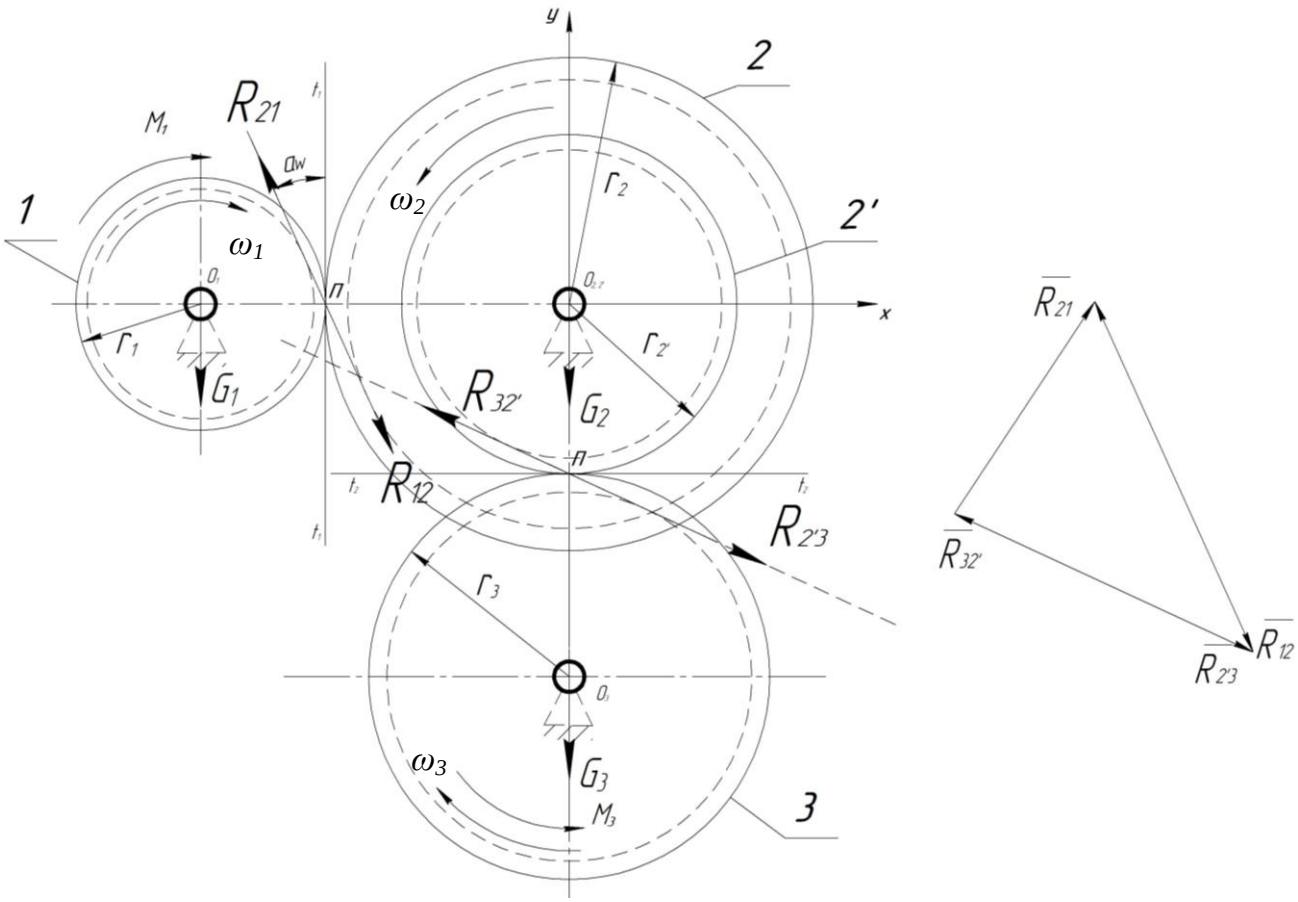
Значения плеч $\overline{h}$ соответствующих сил и $\overline{p_V a}$ измеряются на плане скоростей по рис. 25, *б*, перевод их с учетом масштаба в натуральную величину не требуется.

4.4. Силовой расчет механизмов, содержащих высшие кинематические пары

В плоских механизмах высшие кинематические пары могут быть представлены кинематическими парами IV класса в виде зубчатых, кулачковых и фрикционных механизмов.

Рассмотрим силовой расчет плоских механизмов с высшими кинематическими парами. Для проведения кинетостатического исследования требуется определить реакции в соединениях звеньев, зная кинематическую схему механизма и геометрические размеры зубчатых колес, углы зацеплений α_w, угловые скорости ω и ускорения ε звеньев, а также главные векторы сил инерции (у зубчатых колес они равны нулю, так как центры вращения совпадают с центрами масс) и главные моменты сил инерции.

В качестве примера выберем двухступенчатый зубчатый редуктор с неподвижными осями колес (рис. 26).



а *б*

Рис. 26. Силовой расчет зубчатого механизма с неподвижными осями:
а – схема нагружения механизма; *б* – план сил

Момент сил сопротивления M_3 на звене *3* считается известным. Определим реакцию $R_{2'3}$ (или $R_{32'}$) в зубчатой паре звеньев $2'$ и 3:

$$R_{2'3} = \frac{M_3}{r_{w3}\cos\alpha}, \tag{25}$$

где r_{w3} – радиус начальной окружности колеса *3*; α – угол профиля, 20°.

Далее найдем реакцию R_{12} с учетом радиусов начальных окружностей $r_{w2'}$ и r_{w2} колес:

$$R_{12} = R_{32'}\frac{r_{w2'}}{r_{w2}}. \tag{26}$$

Момент M_1 на ведущем колесе *1* с радиусом начальной окружности r_{w1} будет равен

$$M_1 = R_{12}\cdot r_{w1}\cdot\cos\alpha. \tag{27}$$

Затем, подставив в (27) значение реакций звеньев 1–2 (26) и $2'$–3 (25), получим

$$M_1 = R_{32'}\frac{r_{w2'}}{r_{w2}}\cdot r_{w1}\cdot\cos\alpha = \frac{r_{w2'}}{r_{w2}}\cdot\frac{r_{w1}}{r_{w3}}\cdot M_3 =$$

$$= \frac{r_{w2'}}{r_{w3}}\cdot\frac{r_{w1}}{r_{w2}}\cdot M_3 = i_{21}\cdot i_{32'}\cdot M_3 = i_{31}\cdot M_3.$$

При этом, как известно,

$$i_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1},$$

а из условия равенства мощностей можно записать

$$M_1\cdot\omega_1 = \omega_3\cdot M_3.$$

Составим векторные уравнения равновесия:

– для звена *1*, откуда можно определить реакцию $\bar{R}_{01}$ во вращательной паре 0–1:

$$\bar{R}_{21} + \bar{G}_1 + \bar{R}_{01} = 0;$$

– для звена *2*, откуда можно определить реакцию $\bar{R}_{02}$ во вращательной паре 0–2:

$$\bar{R}_{21} + \bar{G}_2 + \bar{R}_{02} + \bar{R}_{32'} = 0;$$

– для звена *3*, откуда можно определить реакцию $\bar{R}_{03}$ во вращательной паре 0–3:

$$\bar{R}_{2'3} + \bar{G}_3 + \bar{R}_{03} = 0.$$

В случае, если силами веса $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_3$ соответствующих колес пренебречь, то $\bar{R}_{21} = \bar{R}_{10}$; $\bar{R}_{12} = \bar{R}_{20} + \bar{R}_{2'3}$; $\bar{R}_{2'3} = \bar{R}_{30}$. План сил построен на рис. 26, *б*.

Выводы по разделам 1–4

В разделах 1-4 были изложены элементы теории и алгоритмы решения задач по определению сил реакций в низших кинематических парах различных модификаций, образующих группы Ассура II класса, 2-го порядка, как самых распространённых в современных механизмах. Приведен востребованный в учебном процессе универсальный и наглядный графоаналитический метод силового исследования плоских механизмов.

Силовое исследование структурных групп более высоких классов (III, IV и т. д.) требует знания специальных методов расчета, таких, например, как метод планов сил с использованием особых точек. С ними можно ознакомиться в специальной учебной и монографической литературе [1, 5, 6, 9, 10]. Эти методы в настоящее время в общеинженерном курсе дисциплины «Прикладная механика» не изучаются.

Вопросы по разделам 1–4

1. Группы сил, которые действуют в машине.

2. Особенности определения сил инерции при различных видах движения звеньев, ее величины и направления.

3. Как определить величину и направление момента сил инерции?

4. Особенности метода замещающих масс при определении инерционного нагружения.

5. Для какой цели при конструировании необходимо знать реакции в кинематических парах?

6. В чем заключается условие статической определимости структурной группы?

7. Как используется условие статической определимости группы Ассура при силовом расчете механизма?

8. В чем заключается принцип Д'Аламбера и как он используется в силовом расчете?

9. В чем заключается принцип освобождаемости от связи?

10. Особенности силового расчета методом планов сил (графоаналитическим методом) для группы Ассура II класса, 2-го порядка, 1-й модификации (вида).

11. Особенности силового расчета методом планов сил (графоаналитическим методом) для группы Ассура II класса, 2-го порядка, 2-й модификации (вида).

12. Особенности силового расчета методом планов сил (графоаналитическим методом) для группы Ассура II класса, 2-го порядка, 3-й модификации (вида).

13. Что характеризуют уравновешивающая сила и уравновешивающий момент?

14. Особенности силового расчета ведущего звена при различных способах его соединения с валом двигателя.

15. Преимущества использования метода «жесткого рычага» Н. Е. Жуковского при силовом расчете плоского рычажного механизма.

16. Особенности силового расчета механизмов с высшими кинематическими парами.

5. ОСОБЕННОСТИ СИЛОВОГО РАСЧЕТА МЕХАНИЗМОВ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ В СОЕДИНЕНИЯХ

Трение в механизмах. Общие сведения

В процессе работы машин и механизмов происходит рассеивание механической энергии. Основной причиной этого явления служит трение. В общем случае оно возникает при взаимодействии соприкасающихся поверхностей и препятствует их взаимному перемещению. Интересовались этим явлением еще во времена Аристотеля[8]. Также исследованием процессов, связанных с трением, в разное время занимались многие известные ученые, например, Леонардо да Винчи[9], Л. Эйлер[10]. Не прекращались эти исследования и на рубеже XX–XXI веков.

Известно, что около одной трети мировых энергетических ресурсов затрачивается на работу, связанную с трением. По этой причине желательно свести такие затраты до минимума.

Трение в механизмах можно разделить на полезное и вредное. Например, болтовые и клиновые соединения могут скрепляться только при наличии относительного трения, транспортные средства совершают движение с использованием силы трения, без трения не будут работать ременные и все фрикционные передачи. В качестве примера вредного влияния сил трения можно привести сопротивление вращению вала в подшипниках, движению поршня в цилиндре, скольжению зубьев зубчатых передач и др.

Сопротивление, возникающее на поверхности двух соприкасающихся тел при относительном скольжении, называется *силой трения скольжения* $F_{тр}$. Величина этой силы зависит от внешней нагрузки Q или реакции R связи (рис. 27, *а*). *Трение качения* характеризуется моментом трения $M_{тр}$ и имеет иную природу, отличающуюся от природы трения скольжения (рис. 27, *б*).

---

[8] **Аристотель** (384 до н. э. – 322 до н. э.) – древнегреческий философ, основоположник естественных наук.

[9] **Леонардо да Винчи** (1452–1519) – итальянский художник, ученый, изобретатель, инженер, музыкант, один из самых ярких представителей эпохи Возрождения.

[10] **Леонард Эйлер** (1707–1783) – математик, занимался такими науками, как физика, астрономия, медицина, химия и многими другими.

В газах, жидкостях и твердых телах имеет место *внутреннее трение*, а на контактных поверхностях трущихся тел – *внешнее трение*.

Внутренним трением будет считаться противодействие относительному перемещению частиц тела жидкости или газа при внутреннем взаимодействии частиц.

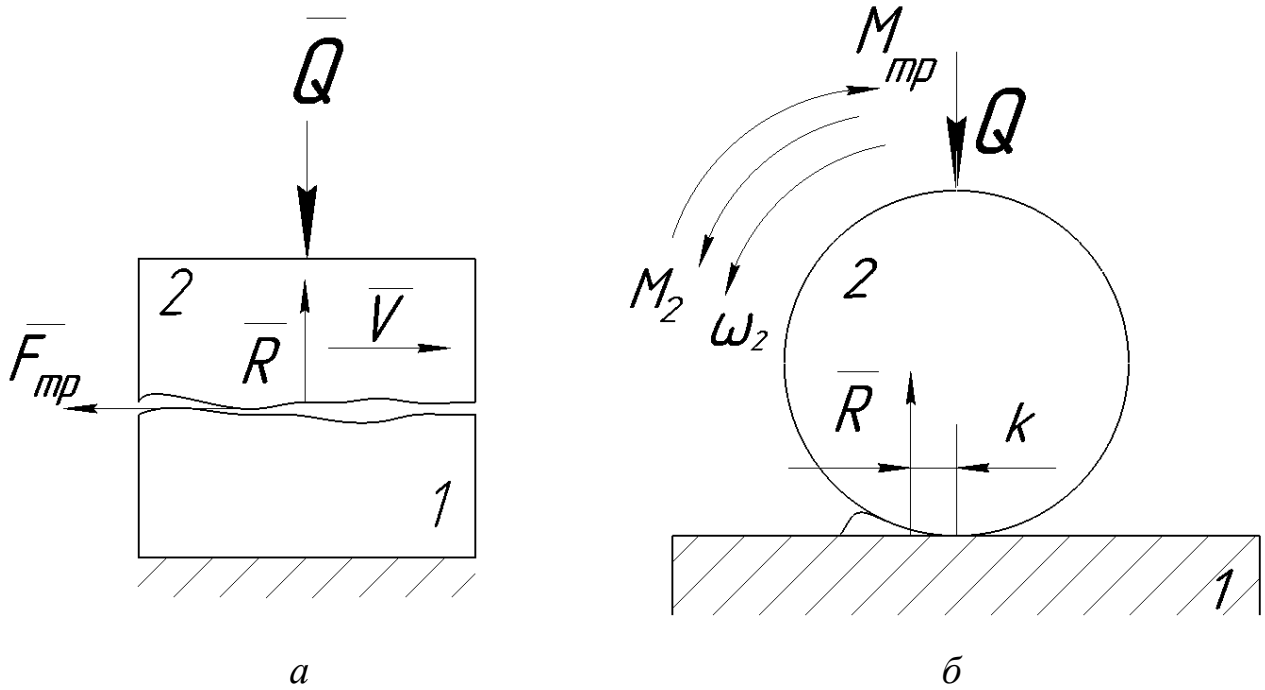


Рис. 27. Возникновение силы трения $F_{тр}$:
а – при скольжении двух соприкасающихся тел; *б* – при качении

Внешнее трение (или в дальнейшем *трение*) представляет собой противодействие относительному перемещению соприкасающихся тел в направлении против относительной скорости движения. По виду относительного движения поверхностей трения его можно разделить на трение скольжения, трение качения и трение верчения.

Трение скольжения (трение 1-го рода) чаще называется просто трением (рис. 27, *а*). Это сложное явление. Оно определяется механическими и молекулярными процессами, происходящими на поверхностях скольжения, зависит от материалов и чистоты обработки поверхности, влияния внешней среды (оксидов, пленки, смазки), покрывающей поверхности; промежуточного слоя (газ, жидкость), продолжительности неподвижного контакта, скорости относительного скольжения, температуры, давления на поверхностях контакта и др.

Трение качения (трение 2-го рода) сопровождается перекатыванием одной поверхности по другой, как, например, в высших кинематических парах (рис. 27, *б*). Качение бывает со скольжением или чистым, при котором пути перемещения точек касания на обеих поверхностях равны.

Трение верчения является разновидностью трения скольжения. В этом случае относительное движение совершается вокруг нормали к активным поверхностям связи, и траекториями точек касания двух тел будут концентрические окружности.

Трение в подвижных соединениях связано с износом, а именно, с отрывом частиц материала и, как следствие, с выделением тепла, что сопровождается нагревом узлов трения: подшипников, муфт трения, тормозов в составе механизмов. Поэтому особое внимание следует обращать на поддержание желаемого температурного режима работы таких соединений.

По признаку наличия или отсутствия движения выделяют:

– **трение покоя** (статическое трение) – внешнее трение при относительном покое соприкасающихся тел;

– **трение движения** (кинетическое трение) – внешнее трение при относительном движении соприкасающихся тел.

По физическим признакам состояния взаимодействующих поверхностей тел выделяют:

– *чистое трение* (ювенильное) – внешнее трение при полном отсутствии на трущихся поверхностях каких-либо посторонних примесей;

– *сухое трение* (трение несмазанных поверхностей) – внешнее трение, при котором трущиеся поверхности могут быть покрыты только пленками окислов и адсорбированными молекулами газов и жидкостей, а смазка отсутствует (рис. 27);

– *граничное трение* – внешнее трение, при котором между трущимися поверхностями есть тонкий слой смазки, обладающий свойствами, отличающимися от ее обычных объемных свойств;

– *полужидкостное трение* (смешанное) – трение, при котором между трущимися поверхностями есть слой смазки с обычными объемными свойствами;

– *жидкостное трение* (гидродинамическое) – трение, при котором поверхности трущихся твердых тел полностью отделены друг от друга слоем жидкости.

В узлах трения машин и механизмов, как правило, преобладает полужидкостное трение, где на одних участках стыка существует жидкостное трение, а на других – граничное. Материалы с малым сухим трением называются антифрикционными (например, бронза, графит, свинец и т. д.), их применяют для изготовления подшипников скольжения. Материалы с повышенным сухим трением, фрикционные (специальные смеси с содержанием пластмасс, асбеста, меди и др.), применяют при изготовлении накладок тормозных колодок, дисков сцепления и т. д.

Все перечисленные виды трения совершенно различны, поэтому глубоко и подробно они рассматриваются только в специальных учебных курсах (например, жидкостное трение изучается в курсе гидродинамики и т. д.).

Как известно из общей теории трения, сила чистого трения $F_{тр}$ определяется законом Амонтона – Кулона[11]. В общепринятых обозначениях формула, отражающая данный закон, имеет следующий вид:

$$F_{тр} = f \cdot N, \tag{28}$$

где N – сила нормального давления, возникающая в идеальной кинематической паре; f – коэффициент трения, безразмерная величина, зависит от комбинации материалов, из которых образована пара трения, определяется экспериментально.

Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную скорости относительного движения элементов подвижной связи, а ее вектор расположен на общей касательной к поверхностям взаимодействующих тел. Величина коэффициента трения зависит от материалов и состояния трущихся поверхностей (наличия и степени шероховатости, способа обработки поверхности). В инженерных расчетах величину коэффициента

[11] Формула была выведена в 1699 г. французским механиком и физиком **Гильомом Амонтоном** (1663–1705), позднее в 1785 г. опытным путем подтверждена физиком **Шарлем Кулоном** (1736–1806).

трения считают, как правило, постоянной, т. е. не учитывают влияние удельного давления и скорость относительного движения, а числовые значения для различных комбинаций материалов приводятся в инженерных справочниках (табл. 1).

Таблица 1

Значение коэффициента трения *f* для различных материалов трущихся поверхностей

Трущиеся поверхности	*f*
Сталь по бронзе	0,1–0,15
Камень по стали	0,45
Сталь по стали всухую	0,18
Бронза по стали всухую	0,18
Резина по стали	0,6–0,8

В высшей кинематической паре величину, определяющую сопротивление чистому качению, называют моментом трения качения, обозначают $M_{тр}$:

$$M_{тр} = k \cdot N, \tag{29}$$

где k – коэффициент трения качения, называемый плечом трения (по сути, это плечо реакции), имеет размерность длины и зависит от свойств материалов касающихся тел, характера механической и термической обработки (физически коэффициент k представлен на рис. 28). Например, чем тверже поверхность соприкасающихся тел, тем коэффициент k меньше (табл. 2).

Таблица 2

Значение коэффициента трения качения *k* для различных материалов трущихся поверхностей

Материалы	*k*, мм
Сталь по стали	0,0005
Дерево по стали	0,003–0,004
Автомобильная шина по грунту	0,1–0,15
Колесо по рельсу	0,0008–0,0012
Фрикционные катки	0,001

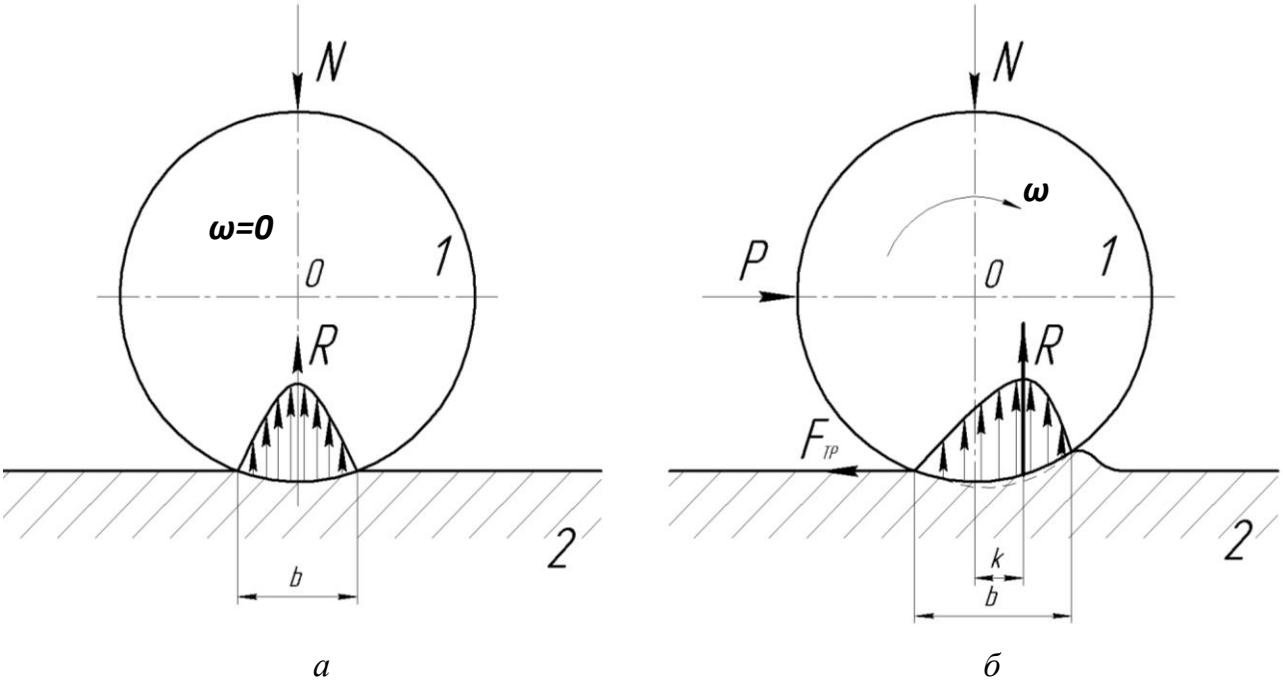


Рис. 28. Распределение контактных напряжений:
а – при неподвижном контакте активных поверхностей;
б – при подвижном соединении катка и поверхности

Направление момента трения качения $M_{тр}$ принимается противоположным направлению угловой скорости качения.

При неподвижном контакте, как на рис. 28, *а*, контактные напряжения распределяются по симметричному закону, ось симметрии которого проходит через середину зоны контакта *b*. При этом суммарная реакция *R* равна общей силе нормального давления *N* и направлена в противоположную сторону. При движении цилиндрического звена *1* по поверхности *2* линия действия реакции *R* смещается на расстояние *k* в сторону от линии симметрии зоны контакта *b* (рис. 28, *б*).

Потери на трение качения намного меньше, чем на трение скольжения, поэтому конструкции подвижных связей выполняют таким образом, чтобы скольжение заменялось качением. Так, например, в кулачковых механизмах толкатели снабжаются роликами, в технике широко распространены подшипники качения.

5.1. Трение в кинематических парах

Определение возможных потерь на трение в различных кинематических парах позволяет уточнить реакции в связях, оценить их работоспособность и ресурс, определить значение механического коэффициента полезного действия, правильно выбрать мощность двигателя машины.

Трение в поступательной кинематической паре

При поступательном движении тела *2* (рис. 29) относительно взаимодействующего с ним тела *1* через силу *N*, действующую по нормали к поверхности, в месте контакта возникает сила, которая сопротивляется их перемещению – это сила трения скольжения $F_{тр}$. Ее величина определяется основным законом (28). Векторная сумма нормальной силы *N* и силы трения $F_{тр}$ равна полной реакции *R* от взаимодействия двух поверхностей в поступательной кинематической паре

$$\bar{R} = \bar{F}_{тр} + \bar{N},$$

которая, как видно, отклоняется от общей нормали к их поверхностям на угол трения φ в сторону, противоположную относительной скорости *V*.

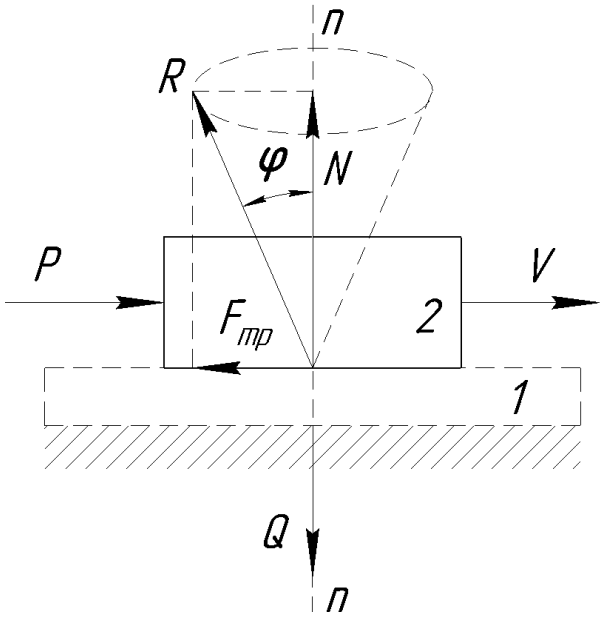


Рис. 29. К определению силы трения $F_{тр}$ в поступательной паре

Силы трения, появляющиеся на поверхности при подвижном контакте двух тел, всегда попарны, одна из них приложена к одному телу, а другая направлена в обратную сторону.

Величина коэффициента трения скольжения f пропорциональна отношению силы трения скольжения $F_{тр}$ к силе нормального давления N:

$$f = \frac{F_{тр}}{N} = \mathrm{tg}\varphi, \qquad (30)$$

отсюда $\varphi = \mathrm{arctg}\, f$ – угол трения, характеризующий отклонение полной реакции R от нормали к поверхности трения.

В соответствии с условиями работы исследуемого и проектируемого соединения, определив экспериментально или подобрав по материалам из справочных данных коэффициент трения f, можно найти и соответствующий угол трения φ.

Конус трения (рис. 29) образуется вращением контактных поверхностей равнодействующей реакции R вокруг нормали n–n. Если движущая сила проходит внутри конуса трения, то движение под действием такой силы невозможно.

Например, по рис. 30 к телу *2*, находящемуся на шероховатой поверхности *1*, приложена определенная сдвигающая сила P под углом α к нормали n–n. Движение осуществляться не будет, так как имеет место следующее неравенство:

$$P\sin\alpha \langle P \cdot f \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\alpha \langle f$$

или, согласно (30), $\mathrm{tg}\alpha \langle \mathrm{tg}\varphi$, движения не будет, если $\alpha \langle \varphi$.

При равенстве углов $\alpha = \varphi$ тело совершает равномерное движение или находится в состоянии покоя (рис. 30).

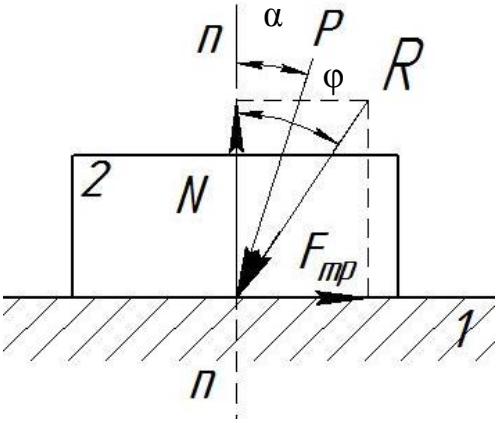


Рис. 30. Действие сил трения
на шероховатой поверхности

Если $\alpha \rangle \varphi$, то сдвигающая сила станет больше силы трения, и движение будет происходить с ускорением, а при обратном соотношении $\alpha \langle \varphi$ движение будет невозможно, какая бы по величине *P* сила не была приложена. При этом внешняя сила *P* попадает внутрь конуса трения (рис. 30). Этим объясняется явление самоторможения тел и заклинивания.

Трение в желобе

Для точной реализации прямолинейного движения применяются направляющие, которые имеют форму клиновидного желоба (один из вариантов конструктивного исполнения клиновидной направляющей показан на рис. 31, *а* и *б*), в этом случае ползун называют клинчатым.

Под действием вертикальной нагрузки *Q* на поверхностях скольжения возникают попарные реакции, которые примем одинаковыми и равными $\frac{N}{2}$. Согласно плану сил (рис. 31, *в*), построенному как решение векторного уравнения равновесия,

$$\overline{\mathrm{Q}} + \frac{\overline{N}}{2} + \frac{\overline{N}}{2} = 0.$$

Очевидно, что

$$N = \frac{Q}{\sin\alpha},$$

где α – угол наклона боковой грани.

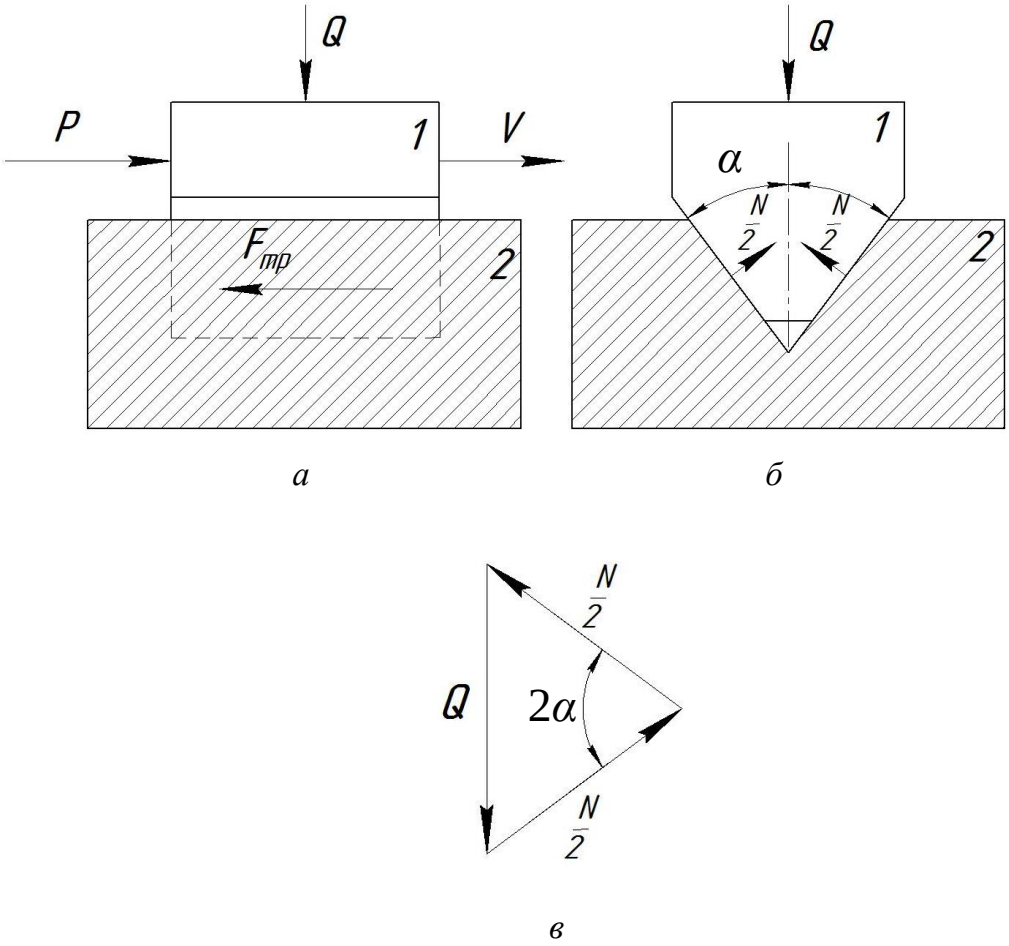


Рис. 31. К определению сил трения в желобе:
а и *б* – действие сил на ползун в призматической направляющей;
в – план сил

Тогда сила трения $F_{тр}$ определится в зависимости от угла α следующим образом:

$$F_{тр} = f \cdot N = Q \cdot \frac{f}{\sin\alpha} = Q \cdot f^{*}, \qquad (31)$$

где f^{*} – приведенный коэффициент трения. Из формулы (31) следует, что $f^{*} \rangle f$. При этом трение в желобе больше, чем на плоскости, тем не менее такая пара трения востребована. При уменьшении угла наклона грани $\alpha \to 0$ сила трения увеличивается $F_{тр} \to \infty$. Такой эффект увеличения трения может быть полезным в клиноременной передаче, тормозных механизмах.

Трение в клиновом желобе довольно часто реализуется в машиностроении, например, в направляющих станков и прессов, винтовых ходовых механизмах и болтовых соединениях, во фрикционных передачах и вариаторах, тормозных устройствах и др.

Трение в винтовой паре

Широкое распространение в машиностроении получили винтовые пары. Рассмотрим винтовое соединение с прямоугольной резьбой (рис. 32).

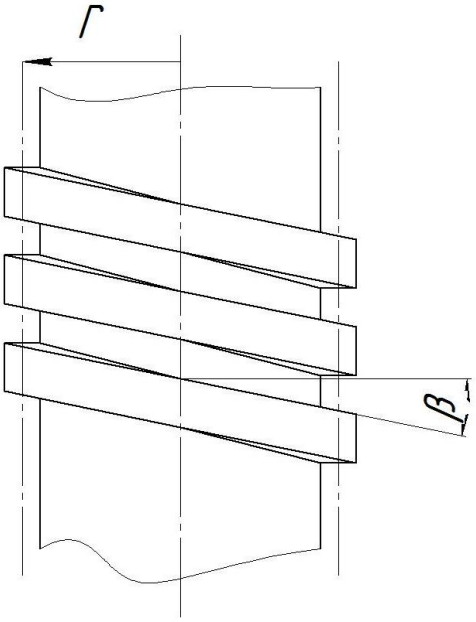
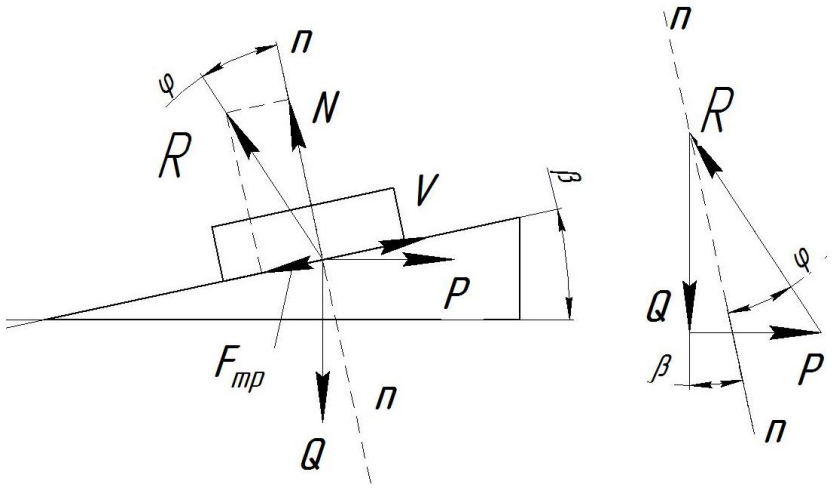


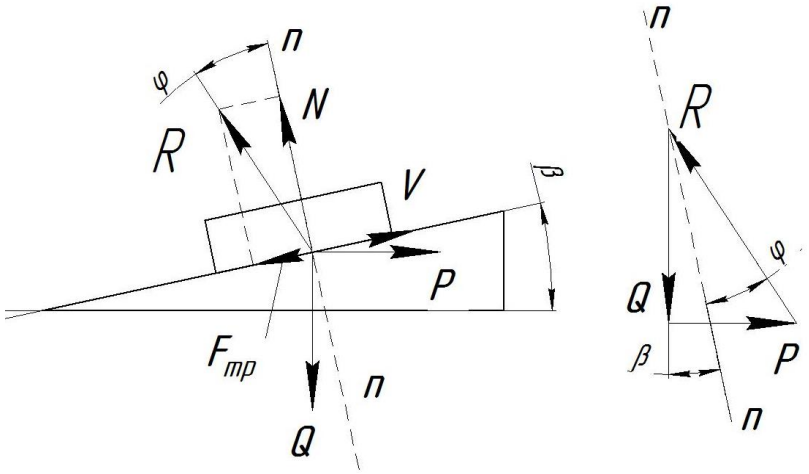
Рис. 32. Винтовая пара

Удельное давление по всей поверхности соприкасания гайки с витками винта принимаем постоянным q = const. Винт с гайкой соединяется несколькими витками, но на коэффициент трения не влияет величина поверхности трущихся тел, поэтому считаем, что соприкосновение происходит на участке витка (рис. 33), где β – угол наклона винтовой линии.

Как видно из рис. 33, движение гайки с прямоугольной резьбой по винту аналогично движению тела по наклонной плоскости. При движении элемента гайки (рис. 33, *а* и *б*) действительная реакция R будет отклонена от нормали n–n на угол трения φ, от вертикали на угол ($\beta + \varphi$). Угол трения, как известно, φ = arctg f, где f – коэффициент трения пары винт – гайка.



а



б

Рис. 33. Схема и план сил в винтовой паре:
а – при подъеме; *б* – при опускании

Векторное уравнение равновесия сил, действующих на элемент гайки:

$$\overline{R} + \overline{Q} + \overline{P} = 0.$$

Полная величина действительной реакции

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{F}_{тр}.$$

При неподвижном винте определим зависимость между осевой силой Q и крутящим моментом $M_{кр}$, который прикладывается к гайке.

Найдем движущую силу P (рис. 33, *а*), направленную перпендикулярно оси винта и необходимую для равномерного движения гайки при подъеме:

$$P = Q \cdot \mathrm{tg}(\beta + \varphi), \tag{32}$$

где

$$P = \frac{M_{кр}}{r},$$

а r – средний радиус резьбы (рис. 35). Тогда момент $M_{кр}$ равен

$$M_{кр} = Q \cdot r \cdot \mathrm{tg}(\beta + \varphi). \tag{33}$$

В случае опускания гайки (рис. 33, *б*) выражение (32) будет иметь следующий вид:

$$P = Q \cdot \mathrm{tg}(\beta - \varphi),$$

и, соответственно, формула (33) примет вид

$$M_{кр} = Q \cdot r \cdot \mathrm{tg}(\beta - \varphi).$$

Прямоугольная резьба будет самотормозящей при угле подъема винтовой линии резьбы меньше угла трения. При использовании метрической резьбы движение гайки рассматривают аналогично перемещению тела по клинчатому желобу с углом клина 2α (рис. 31, *в*). Приведенный коэффициент трения в такой резьбе выражается следующей формулой:

$$f^* = \frac{f}{\cos\alpha}.$$

Например, для метрической резьбы при $\alpha = 30°$ приведенный коэффициент трения будет равен $f^* = 1{,}115 f$. Потери на трение при такой

резьбе на 15,5 % больше, чем при прямоугольной резьбе, поэтому прямоугольная резьба применяется в ходовых винтовых механизмах, а метрическая – в крепежных болтовых соединениях.

Механический коэффициент полезного действия (к.п.д.) определяется как отношение полезной работы $A_{пол}$ к затраченной $A_{затр}$ и применительно к винтовой паре

$$\eta = \frac{A_{пол}}{A_{затр}},$$

где

$$A_{затр} = Q\,\mathrm{tg}\,(\beta + \varphi),$$

$$A_{пол} = Q\,\mathrm{tg}\,\beta,$$

тогда

$$\eta = \frac{Q\,\mathrm{tg}\,\beta}{Q\,\mathrm{tg}\,(\beta + \varphi)},$$

причем φ = arctg f^*.

Трение во вращательной кинематической паре

Рассмотрим вращательную кинематическую пару между подшипником[12] *1* и цапфой[13] *2* по рис. 34.

При неподвижной цапфе линия действия внешней силы Q проходит через точку касания окружностей цапфы и подшипника, потому что при отсутствии скольжения сила трения равна нулю ($F_{тр} = 0$) и равнодействующая реакции R направлена вдоль радиуса цапфы, через центр вращательной пары O_1.

---

[12] **Подшипник** – опора или направляющая, которая определяет положение движущих частей по отношению к другим частям механизма (терминология ГОСТ 24955–81).

[13] **Цапфа** (стержень) – часть вала, трущаяся во втулке подшипника. Если цапфа располагается где-либо в промежутке между концами вала, ее называют шейкой, а при расположении ее на конце вала – шипом.

Под воздействием внешнего силового момента M_0 придадим цапфе вращение с угловой скоростью ω.

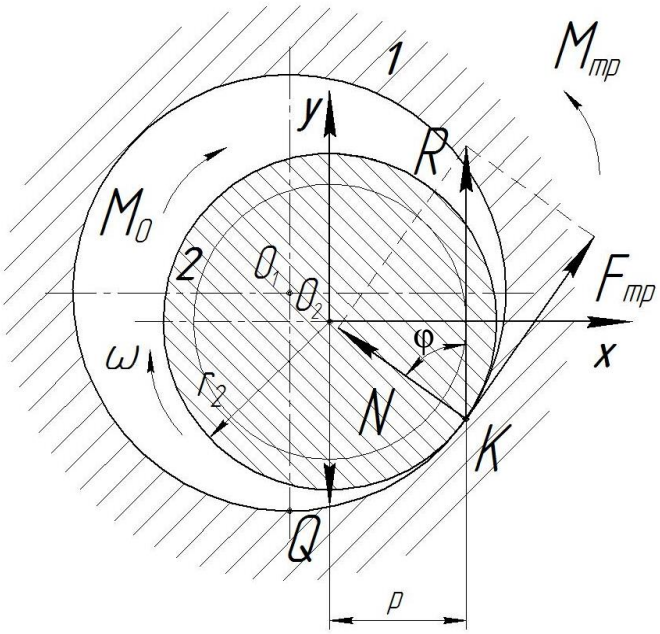


Рис. 34. Схема сил
во вращательной кинематической паре

Линия действия силы Q будет перпендикулярна оси вращения цапфы, а полная реакция $\overline{R} = -Q$ отклонится на угол трения φ от нормальной реакции N. Сила трения, известная как $F_{тр} = f \cdot N$, будет направлена по касательной к окружности радиусом r_2 противоположно скорости скольжения цапфы в подшипнике, откуда полная реакция может быть выражена следующим равенством:

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{F}_{тр} \text{ или } R = \sqrt{N^2 + F_{тр}^2} = N\sqrt{1 + f^2}.$$

Нормальная составляющая полной реакции N проходит через центр цапфы, а сопротивление вращению создает момент сил трения $M_{тр}$ относительно оси вала:

$$M_{тр} = F_{тр} \cdot r_2 = R \cdot \sin\varphi \cdot r_2, \qquad (34)$$

где r_2 – радиус цапфы 2 вала в кинематической паре по рис. 34, откуда определим величину ρ как

$$\rho = r_2 \cdot \sin\varphi .$$

Отметим, что ρ является плечом трения, которое перпендикулярно линии действия реакции *R* и зависит только от размеров цапфы и коэффициента трения *f*, т. е. для каждой цапфы является величиной постоянной.

Учитывая, что $\varphi = \mathrm{arctg}\, f$ имеет достаточно небольшую величину, предполагается, что $\sin\varphi \approx \mathrm{tg}\varphi \approx f$, тогда

$$\rho = r_2 \cdot f$$

и с учетом (34)

$$M_{mp} = F_{mp} \cdot r_2 = N \cdot f \cdot r_2 \approx N \cdot \rho .$$

При расчете реакции *R* с учетом сил трения во вращательной паре полная реакция *R* направлена по касательной к кругу радиусом ρ и создает момент трения против M_0. Такой круг называется кругом трения. Он зависит от материалов, состояния и смазки соприкасающихся поверхностей, от степени их износа, влияющего на значение коэффициента трения.

Трение в плоской пяте

Цапфы, в которых направление реакции в опоре совпадает с осью вращения, называют пятами. Если опоры для шипов и шеек называют подшипниками, то для пят – подпятниками. В некоторых частных случаях опорные поверхности пяты *2* и подпятника *1* могут быть выполнены в виде плоскости или плоского кольца (рис. 35), тогда пята будет называться плоской. Определение момента сил трения, который возникает под действием внешней нагрузки *Q* при скольжении плоской пяты по подпятнику, зависит от расстояния зоны трения до оси вращения.

Как показывает практика, реальное распределение давления на поверхности соприкосновения цапфы и подпятника будет неравномерным, изменяющимся во время работы машины.

По рис. 35 соприкосновение между пятой и подпятником происходит по площади кольцевой поверхности с наружным радиусом r_1 и внутренним радиусом r_2.

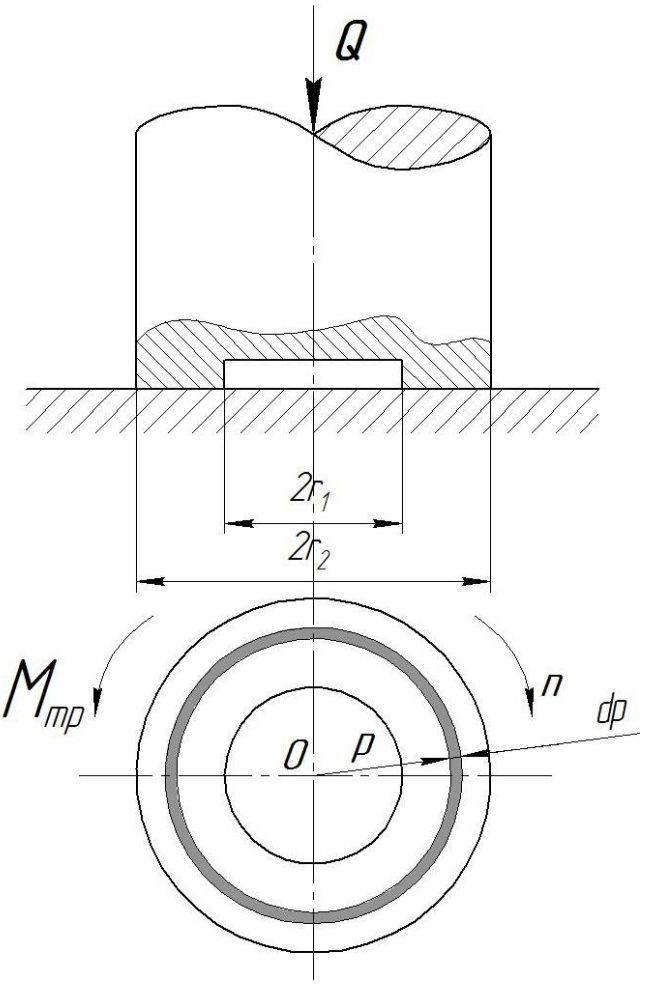


Рис. 35. Плоская кольцевая пята

Для площади прилегания кольцевой пяты $\pi(r_2^2 - r_1^2)$ принимаем распределение удельного давления равномерным

$$q = \frac{Q}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = \text{const}. \qquad (35)$$

Элементарная сила трения $dF_{тр}$ на бесконечно узком кольце шириной dp определится как

$$dF_{тр} = dN\, f = q\, f\, 2\pi\, \rho\, d\rho,$$

а элементарный момент сил трения $dM_{тр}$ будет

$$dM_{тр} = dF_{тр}\, \rho = 2\pi\, q\, f\, \rho^2\, d\rho.$$

Интегрируя, получаем

$$M_{тр} = 2\pi\, q\, f \int_{r_1}^{r_2} \rho^2\, d\rho = \frac{2}{3}\pi\, q\, f\, (r_2^3 - r_1^3)$$

или, учитывая (35), окончательно имеем

$$M_{тр} = \frac{2}{3}\pi\, f\, \frac{\mathrm{Q}}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}\, (r_2^3 - r_1^3) = \frac{2}{3}\, f\, \mathrm{Q}\, \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}.$$

В настоящем разделе рассмотрены только некоторые примеры определения трения в различных соединениях механизма, наиболее полно примеры расчета сил трения рассмотрены в источниках [6, 7].

5.2. Учет сил трения в высших кинематических парах

Определение сил трения в передаче с гибким звеном

Клиновидные и плоские ремни, а также гибкие ленты, тросы, нити, канаты и другие гибкие звенья, которые оказывают малое сопротивление при изгибе, сжатии и кручении, широко используют в приводах машин в виде ременных и канатных передач, передающих движение на значи-

тельное расстояние от одного звена к другому (например, в тормозах, ленточных конвейерах, грузоподъёмных машинах и др.). Передача движения от ведущего вала к ведомому осуществляется с помощью силы трения $F_{тр}$, возникающей между гибким звеном (например, лентой) и шкивом. Сила трения зависит от нескольких условий – от величины предварительного натяжения ленты, дуги охвата шкива ленты и коэффициента трения ленты при движении относительно шкива.

Обозначим предварительное натяжение ленты через S_0. Во время работы усилия в набегающей и сбегающей ветвях перераспределяются, тогда S_1 будет натяжение тянущей ветви, а S_2 – натяжение холостой ветви (рис. 36, *а*), их разность при отсутствии скольжения определяет необходимое значение силы трения

$$S_1 - S_2 = P_{окр} = \frac{2M}{d_2} \le F_{тр},$$

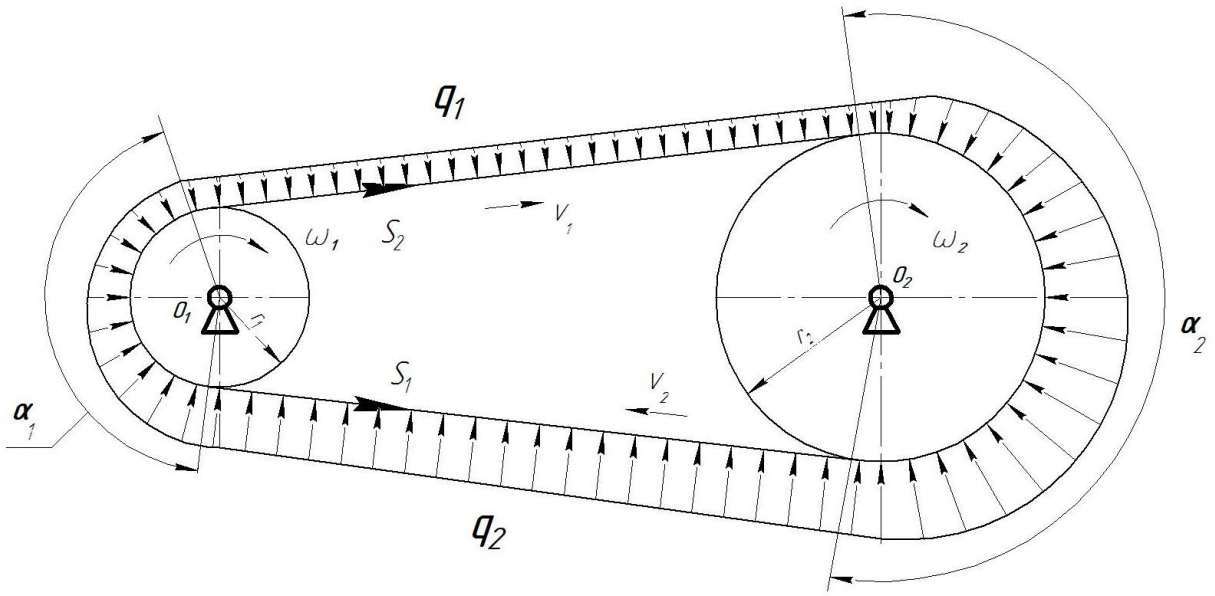
где M – крутящий момент внешней нагрузки на выходном звене; d_2 – диаметр выходного шкива.

С другой стороны,

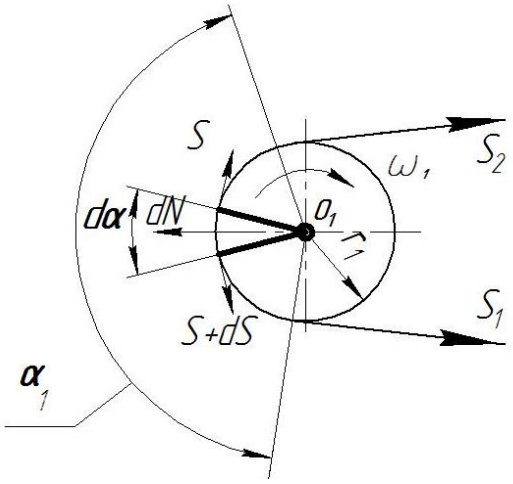
$$S_1 + S_2 = 2S_0.$$

Установим взаимосвязь между S_1 и S_2, для этого по рис. 36, *б* выделим бесконечно малый элемент гибкой ленты $d\alpha$, с натяжениями на его концах S и $S + dS$, направленных по касательным к окружности обхвата в соответствующих точках. Со стороны шкива на выделенный элемент ленты действует нормальное усилие dN, значение элементарной силы трения будет

$$dF_{тр} = dN \cdot f\ . \qquad (36)$$



а



б

Рис. 36. Ременная передача:
а – к определению необходимого предварительного натяжения гибкого звена;
б – схема сил на дуге обхвата α_1 малого шкива

Сумма проекций на нормаль натяжений выделенного элемента создаст элементарную нормальную силу dN

$$dN = S \cdot \sin\frac{d\alpha}{2} + S \cdot \sin\frac{d\alpha}{2} + dS \cdot \sin\frac{d\alpha}{2}.$$

Учитывая, что $dS \cdot \sin\frac{d\alpha}{2}$ – произведение двух бесконечно малых дает бесконечно малое II порядка малости, которым можно пренебречь, получаем

$$dN = 2S \cdot \sin\frac{d\alpha}{2},$$

где $d\alpha$ – достаточно малый угол, поэтому заменяем $\sin\frac{d\alpha}{2} = d\alpha$

$$dN = S \cdot d\alpha.$$

Подставляем это значение в формулу (36)

$$dF_{mp} = S \cdot d\alpha \cdot f = dS.$$

Интегрируя по углу обхвата в пределах от 0 до α и принимая f = const, получаем

$$\int_{S_2}^{S_1} \frac{dS}{S} = f \int_0^{\alpha_1} d\alpha \text{ или } \ln S\Big|_{S_2}^{S_2} = f \cdot \alpha_1,$$

откуда

$$\ln S_1 - \ln S_2 = f \cdot \alpha_1,$$

$$\ln\frac{S_1}{S_2} = f \cdot \alpha_1,$$

тогда

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{f \cdot \alpha_1}.$$

Это соотношение получено Л. Эйлером и носит его имя, соотношение сил в ветвях будет таким

$$S_1 = S_2 \cdot e^{f \cdot \alpha_1},$$

где e – основание натурального логарифма – 2,718.

Распределенная сила трения, которая действует на гибкое звено, и определяющаяся разницей натяжений S_1 и S_2, найдется как

$$F_{тр} = S_1 - S_2 = S_2 \cdot e^{f \cdot \alpha_1} - S_2 = S_2(e^{f \cdot \alpha_1} - 1) =$$
$$= S_2(e^{f \cdot \alpha_1} - 1)\frac{(e^{f \cdot \alpha_1} + 1)}{(e^{f \cdot \alpha_1} + 1)} = 2S_0 \frac{(e^{f \cdot \alpha_1} - 1)}{(e^{f \cdot \alpha_1} + 1)}. \quad (37)$$

Выражение (37) устанавливает зависимости величины предварительного натяжения S_0, необходимого для передачи расчетного значения силы трения $F_{тр}$. Если ввести обозначения величины характеристики ременной передачи

$$\varphi = \frac{(e^{f \cdot \alpha_1} - 1)}{(e^{f \cdot \alpha_1} + 1)},$$

тогда сила трения будет

$$F_{тр} = 2S_0 \cdot \varphi.$$

В передаче с гибкой связью нет точного соблюдения передаточного отношения, поскольку имеет место неустранимое упругое скольжение гибкого звена по дугам обхвата, которое составляет 1–6 %. Это основной недостаток этого фрикционного соединения, передающего движение за счет сил трения.

5.3. Силовой анализ механизма с учетом сил трения

Пример силового анализа кривошипно-ползунного механизма

Стоит отметить, что, в случае силового расчета как без учета сил трения, так и с их учетом, при определении реакций в соединениях неизвестными являются модуль и направление действия реакции. Структурные группы будут статически определимы и при учете сил трения, поэтому кинетостатический расчет выполняют по группам Ассура.

Зная определение сил и моментов трения в различных соединениях, составим следующий алгоритм силового расчета механизма согласно методу последовательных приближений[14]:

1) предварительно рассчитываем реакции в идеализированном механизме;

2) выделяем зоны трения, определяем потери на трение;

3) к схемам нагружения звеньев идеализированного механизма добавляем силы трения $F_{тр}$ или моменты трения $M_{тр}$;

4) проводим уточняющие расчеты сил реакций.

Для проведения силового расчета механизма направления относительных скоростей во всех его подвижных соединениях, как и прежде, считаются известными из кинематических расчетов.

Рассмотрим пример силового расчета четырехзвенного кривошипно-ползунного механизма (рис. 37) с учетом сил трения.

Запишем уравнения равновесия в форме моментов сил для определения реакций в структурной группе 2–3 с учетом сил трения (рис. 38):

– для звена *2*:

$$\sum M_{(B)}^{(2)} = 0, \quad R_{12}^{t} \cdot l_{AB} - M_{ин2} - P_{ин2} \cdot h_{ин2} - M_{тр32} - M_{тр12} = 0;$$

– для звена *3*:

$$\sum M_{(B)}^{(3)} = 0, \quad R_{43} \cdot h_{43} + M_{тр23} = 0.$$

---

[14] **Метод последовательных приближений** предложен академиком И. И. Артоболевским.

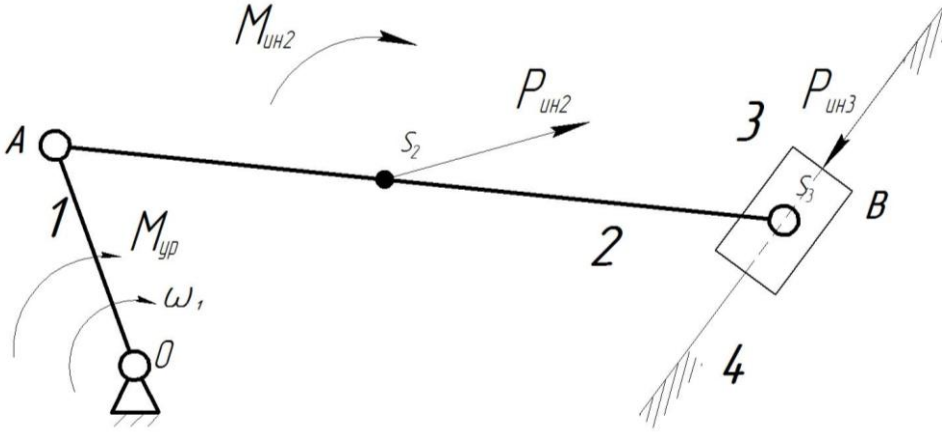


Рис. 37. Схема кривошипно-ползунного механизма

Уравнения равновесия с учетом сил трения в векторной форме будут иметь следующий вид:

– для звена *2*:

$$\bar{R}_{12}^{t} + \bar{R}_{12}^{n} + \bar{P}_{ин2} + \bar{R}_{32} = 0;$$

– для группы звеньев 2–3:

$$\bar{R}_{12}^{t} + \bar{R}_{12}^{n} + \bar{P}_{ин2} + \bar{P}_{ин3} + \bar{R}_{43} + \bar{F}_{тр43} = 0.$$

Моменты трения $M_{тр21}$, $M_{тр23}$ и сила трения $F_{тр43}$ направлены противоположно соответствующим относительным скоростям ω_{12}, ω_{23} и V_{43} направления которых известны из кинематического расчета.

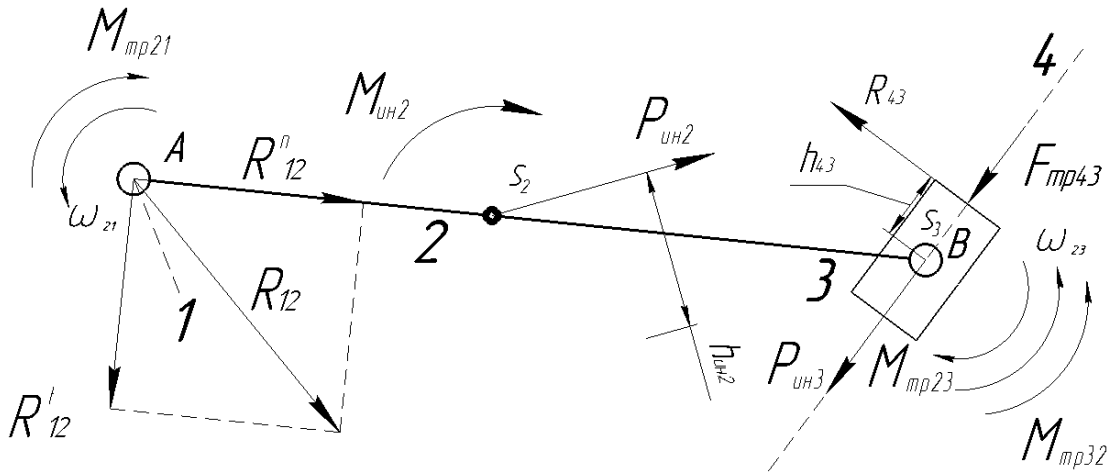


Рис. 38. Схема сил и моментов, действующих на структурную группу 2–3

Согласно изложенному алгоритму в идеализированном механизме определялись реакции без учета трения, т. е. $M_{тр21} = M_{тр23} = 0$ и $F_{тр43} = 0$.

Далее, используя найденные реакции, определяем моменты трения в шарнирных соединениях и силу трения в поступательной паре по известным соотношениям:

$$M_{тр21} = R_{12} \cdot f_A \cdot r_A,$$

$$M_{тр23} = R_{32} \cdot f_B \cdot r_B,$$

$$F_{тр43} = R_{43} \cdot f_B.$$

С учетом моментов и сил трения проводим уточненный расчет реакций. По новым значениям сил реакций вновь определяем моменты и силы трения.

Уравнение равновесия для ведущего звена исследуемого механизма с учетом сил трения будет следующим:

$$\bar{R}_{12} + \bar{R}_{14} = 0.$$

Запишем уравнения равновесия в форме моментов сил для определения уравновешивающего момента на ведущем звене с учетом сил трения (рис. 39):

– для звена *1*:

$$\sum M_{(0)}^{(1)} = 0, \quad R_{21} \cdot h_{21} - M_{ур} + M_{тр12} + M_{тр14} = 0,$$

где $M_{тр12} = R_{21} \cdot f_A \cdot r_A$, $M_{тр14} = R_{41} \cdot f_0 \cdot r_0$.

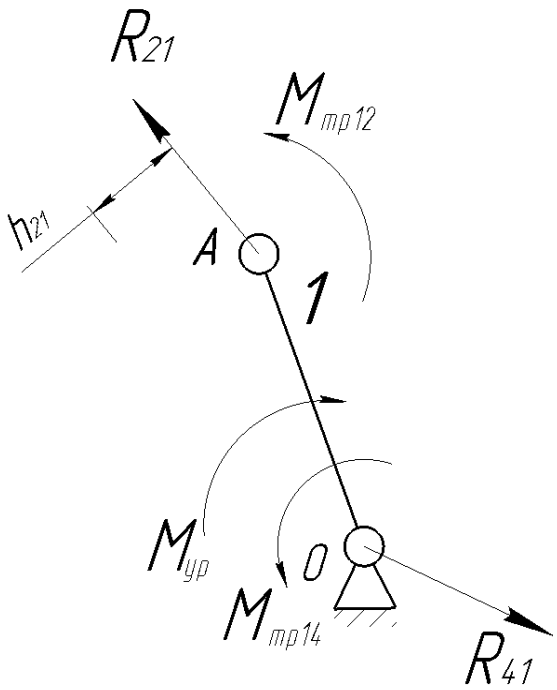


Рис. 39. Схема сил и моментов,
действующих на ведущее звено

А если определить мощности трения $N_{тр}$ в узлах трения, полезную мощность как $P_{пс} \cdot V_{uo} = N_{пс}$, тогда механический коэффициент полезного действия (к.п.д.):

$$\eta = \frac{N_{пс}}{N_{пс} + N_{тр}}.$$

Таким образом, силовой расчет плоского рычажного механизма проведен с учетом сил трения.

Выводы по разделу 5

Метод последовательных приближений, предложенный академиком И. И. Артоболевским[15] [1], предусматривает проведение силового расчета идеализированного механизма и, учитывая коэффициенты трения, позво-

[15] **Иван Иванович Артоболевский** (1905–1977) – советский ученый – механик, специалист в вопросах теории механизмов и машин, доктор технических наук, академик АН СССР, разработчик классификации пространственных механизмов, методов их кинематического исследования.

ляет определять соответствующие силы трения и моменты трения в таких соединениях, после чего полученные уточненные реакции можно учитывать в качестве внешних сил, приложенных к звеньям механизма, и проводить уточненный кинетостатический расчет, используя их значения.

В качестве основных рекомендаций по уменьшению трения в соединениях можно выделить следующие: правильный выбор материалов, технологическое обеспечение необходимой геометрии и твердости активных поверхностей, хорошая смазка в механической системе (принудительная), обеспечение защиты узлов трения от попадания абразивных частиц, замена трения скольжения трением качением (в случае обоснованности и целесообразности).

Для увеличения трения используют соответствующие материалы, эффект трения в желобе.

Вопросы по разделу 5

1. Виды трения в кинематических парах.
2. Физическая природа сил трения при скольжении и расчетные зависимости.
3. Физическая природа сил трения при качении и расчетные зависимости.
4. Что такое коэффициент трения?
5. Для какой цели определяются возможные потери на трение?
6. Как учитывается трение в поступательных парах?
7. Что такое угол трения?
8. Что такое конус трения?
9. Как учитывается трение во вращательных парах?
10. Что такое круг трения?
11. Как учитывается трение в винтовой паре?
12. Как определить действительные реакции в поступательной паре?
13. Как определить действительные реакции во вращательной паре?

6. МЕХАНИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ КАЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ РАБОТЫ МЕХАНИЗМОВ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР

Сравнительную и качественную оценку машины проводят с использованием механического коэффициента полезного действия (к.п.д.), который интегрально характеризует экономичность, долговечность и износостойкость элементов, составляющих кинематические пары.

Под *механическим коэффициентом полезного действия машины* будем понимать расчетную величину, учитывающую потери, вызываемые различными механическими сопротивлениями, такими как трение и сопротивление среды.

Определение механического коэффициента полезного действия механизмов

Напомним, что силы, приложенные к звеньям механизма, делятся на движущие силы и силы сопротивления, которые включают силы вредного сопротивления (силы трения) и силы полезного (производственного) сопротивления, для преодоления которых и предназначен данный механизм.

Работа движущих сил расходуется на преодоление как полезных, так и вредных сопротивлений. В случае, когда работа затрачивается на преодоление полезных сопротивлений, она считается эффективной – $A_{пс}$. Работа принадлежащих к диссипативным сил трения, переходящая в теплоту и рассеивание в пространстве, относится к потерям, которые рассматриваются как вредные сопротивления, так как их работа не может быть использована – $A_{вс}$, поэтому

$$A_{дв} = A_{пс} + A_{вс}.$$

Наиболее энергетически совершенной считается та машина, у которой эффективная работа соответствует наибольшей части всей затрачиваемой энергии, а потери на трение наименьшие. Критерием энергетической

оценки машины считается коэффициент полезного действия η, или механический к.п.д. механизма:

$$\eta = \frac{A_{пс}}{A_{дв}} = \frac{A_{дв} - A_{вс}}{A_{дв}} = 1 - \frac{A_{вс}}{A_{дв}}. \qquad (38)$$

В выражении (38) все величины принимаются по своему абсолютному значению без знака, при этом и к.п.д. η является абсолютной величиной. Из (38) следует, что η всегда меньше 1. К.п.д. будет равен единице при $A_{вс} = 0$, что невозможно в принципе.

В формуле для определения к.п.д. вместо отношения работ можно представить отношение соответствующих мощностей:

$$\eta = 1 - \frac{N_{вс}}{N_{дв}}.$$

Из (38) отношение работы сил вредных сопротивлений $A_{вс}$ к работе движущих сил $A_{дв}$ обозначают через

$$\psi = \frac{A_{вс}}{A_{дв}}$$

или, с учетом мощности $N_{вс}$, развиваемой силами вредного сопротивления, и мощности $N_{дв}$ движущих сил

$$\psi = \frac{N_{вс}}{N_{дв}},$$

И называют механическим коэффициентом потерь мощности ψ в механизме. Тогда к.п.д. будет

$$\eta = 1 - \psi.$$

Потери, на возникающее в механизмах трение, всегда присутствуют, поэтому коэффициент потерь $\psi \rangle 0$.

Во вращательной кинематической паре (рис. 40, *а*) расход мощности $N_{тр}$, теряемой на трение $M_{тр}$, определяется как

$$N_{тр} = M_{тр}\omega_{отн} = f \cdot Rr\omega_{отн}, \tag{39}$$

а в поступательной кинематической паре (рис. 40, *б*):

$$N_{тр} = F_{тр}V = f \cdot R \cdot V_{отн}, \tag{40}$$

где $V_{отн}$ и $\omega_{отн}$ – относительные скорости; R – реакция в кинематической паре; f – приведенный коэффициент трения; r – радиус цапфы.

В том случае, если у механизма, который совершает движение в установившемся режиме, отсутствует полезная нагрузка $A_{пс} = 0$ (холостой ход), при этом $\eta = 0$, а потери $\psi = 1$, очевидно, что вся энергия будет затрачиваться на преодоление собственных потерь, поэтому всегда $0 \le \eta < 1$.

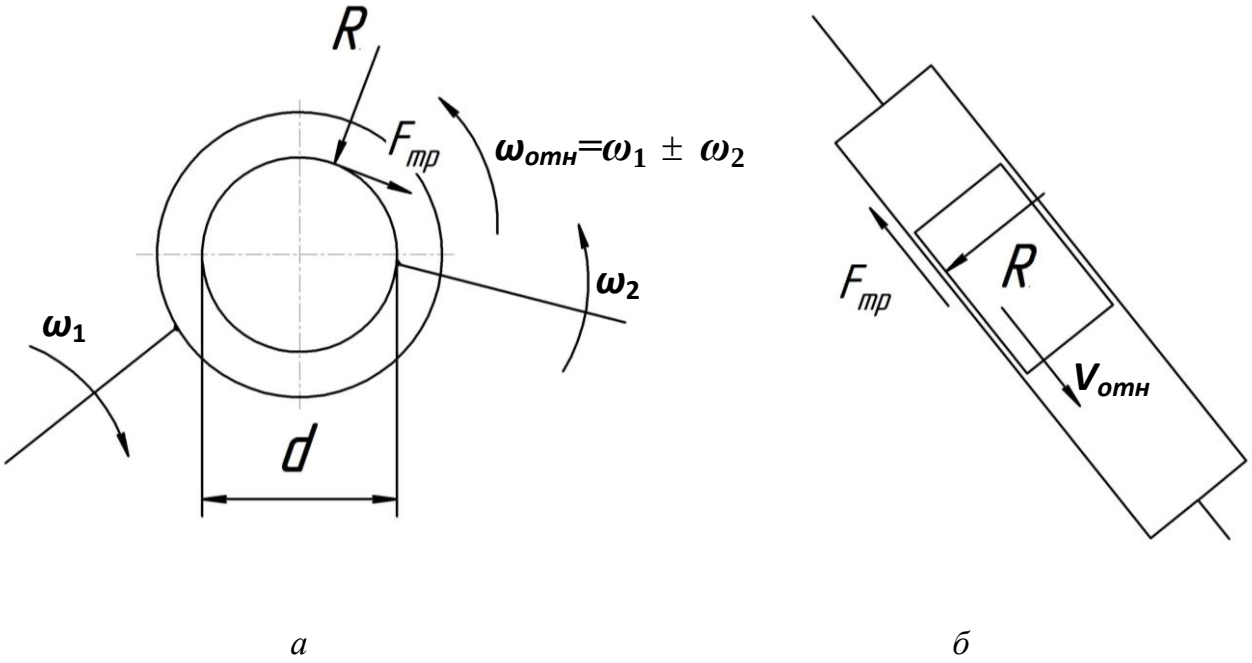


Рис. 40. Определение мощности трения в кинематических парах:
а – вращательной; *б* – поступательной

Как правило, к.п.д. и коэффициент потерь определяются при установившемся режиме работы механизма. Механическая система работает тем энергетически совершеннее, чем ближе ее к.п.д. к единице. В табл. 3 привены некоторые примеры средних значений к.п.д. наиболее востребованных в повседневной жизни человека энергетических комплексов (машин, механизмов), а также различных соединений.

Таблица 3

Значение коэффициента полезного действия (к.п.д.)

Энергетический комплекс	Значение к.п.д.	Тип соединения	Значение к.п.д.
η электродвигателя постоянного (переменного) тока	0,87	η зубчатой передачи	0,94–0,98
η ГЭС	0,93	η фрикционной передачи	0,7–0,94
η ТЭЦ	0,34	η подшипников качения	0,99–0,995
η АЭС	0,3	η подшипников скольжения	0,975–0,99

Учитывая [1], имеем, что высокие значения к.п.д. в механических передачах получают путем замены трения скольжения трением качения или применения совершенной жидкостной принудительной смазки. Высокие значения к.п.д. ($\eta = 0,9 - 0,95$) в современных конструкциях технологического обеспечения наблюдают, например, в шарико-винтовых и зубчатых передачах.

6.1. Пример определения коэффициента полезного действия механизма, содержащего низшие кинематические пары

Рассмотрим расчет к.п.д. кривошипно-ползунного механизма, представленного на рис. 41. Проведенный предварительно силовой расчет определил величины реакций во всех кинематических парах исследуемого механизма, а именно: R_{01}, R_{12}, R_{23}, диаметры цапф соответствующих вращательных пар d_{01}, d_{12} и d_{23}.

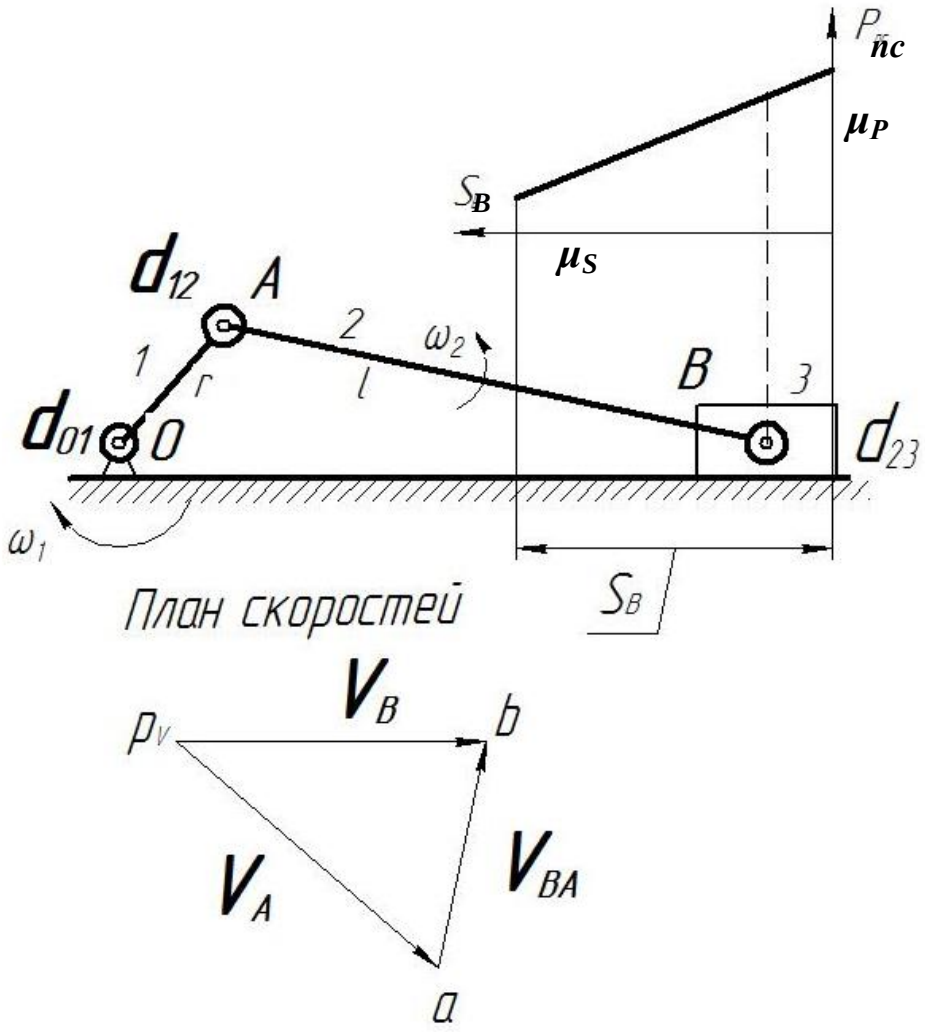


Рис. 41. К определению к.п.д. кривошипно-ползунного механизма

Определим, согласно формуле (39), мощности, расходуемые на трение в соответствующих кинематических парах:

1) во вращательной паре звеньев 0–1:

$$N_{тр01} = f_{01} \cdot R_{01} \frac{d_{01}}{2} \omega_1 = f_{01} \cdot R_{01} \frac{d_{01}}{2r} V_A, \qquad (41)$$

где r – радиус вращения кривошипа OA;

2) во вращательной паре звеньев 1–2:

$$N_{тр12} = f_{12} \cdot R_{12} \frac{d_{12}}{2} \omega_{12},$$

где ω_{12} – угловая скорость вращения звена *1* относительно звена *2*.

Для определения ω_{12} применим известный из кинематики метод обращения движения, остановим звено *2*, паре звеньев 1–2 сообщим общую угловую скорость – ω_2, при этом $\omega_1 = \omega_{12} - \omega_2$, откуда

$$\omega_{12} = \omega_1 + \omega_2 = \frac{V_A}{r} + \frac{V_{BA}}{l}.$$

Угловую скорость ω_2 можно определить аналитически, известным образом [3] или воспользовавшись планом скоростей на рис. 41. Тогда мощность трения в паре 1–2:

$$N_{mp12} = f_{12} \cdot R_{12} \frac{d_{12}}{2} \left(\frac{V_A}{r} + \frac{V_{BA}}{l} \right).$$

3) во вращательной паре звеньев 2–3:

$$N_{mp23} = f_{23} \cdot R_{23} \frac{d_{23}}{2} \omega_{23} = f_{23} \cdot R_{23} \frac{d_{23}}{2l} V_{BA}, \qquad (42)$$

где l – длина шатуна OA; $\omega_{23} = \omega_2 = \frac{V_{BA}}{l}$.

Мощность, расходуемую на трение в поступательной паре звеньев 3–0, определим по зависимости (40):

$$N_{mp03} = f_{03} \cdot R_{03} \cdot V_B.$$

Зная значение сил полезного сопротивления по диаграмме $P_{nc}(S_B)$, можно определить величину N_{nc} на выходе:

$$N_{nc} = P_{nc} \cdot V_B,$$

тогда для каждого положения механизма величина баланса мгновенной мощности равна

$$N_{ДС} = N_{пс} + \sum N_{тр} = N_{пс} + N_{тр03} + N_{тр23} + N_{тр12} + N_{тр01}.$$

Мгновенный к.п.д. кривошипно-ползунного механизма находим из соотношения

$$\eta = \frac{N_{пс}}{N_{ДС}} = 1 - \frac{\sum N_{тр}}{N_{ДС}} = 1 - \psi,$$

где ψ – суммарный коэффициент потерь на трение во всех кинематических парах.

Таким образом определяется мгновенный к.п.д. в определенном положении механизма. Для циклового механизма, как правило, за цикл его движения выбирается несколько положений его звеньев, для которых проводится соответствующий расчет мгновенных к.п.д. (например, при кинематическом расчете таких положений рассматривается двенадцать). Результат представляется в виде графика изменения η от угла поворота входного звена α.

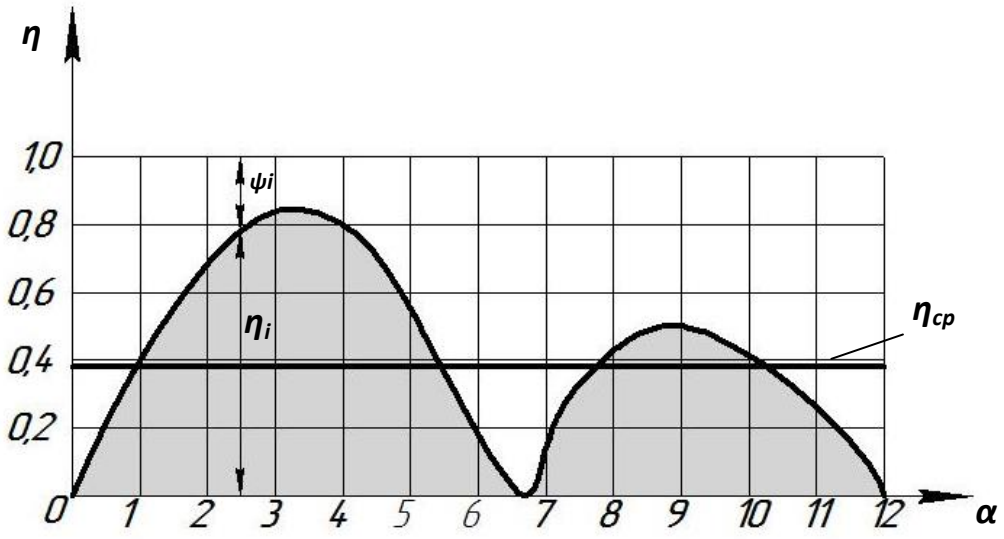


Рис. 42. График изменения к.п.д.
за цикл в цикловом механизме

На графике (рис. 42) закрашенная область соответствует изменению к.п.д. механизма η, а прозрачная область определяет значение коэффициента потерь ψ, кривая, их разделяющая, получена путем расчетов в определенных положениях работы механизма. Среднее значение к.п.д. η_{cp} находится как среднее арифметическое всех значений, по которым строился график (на рис. 42 η_{cp} – это прямая линия).

6.2. Пример определения коэффициента полезного действия зубчатых передач

При проектировании механических передач основным условием их синтеза является возможность обеспечения требуемого передаточного отношения, а в силу распространения этих преобразователей движения актуально определить их к.п.д.

Так, например, к.п.д. трехзвенной зубчатой передачи с числами зубьев колес z_1 и z_2 (без учета сил трения в подшипниках колес) определяется по следующей формуле [8]:

$$\eta = 1 - \frac{\pi \cdot f \cdot \varepsilon}{2}\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right),$$

где f – коэффициент трения скольжения; ε – коэффициент перекрытия. Для внутреннего зацепления колес (в формуле используется знак «–») к.п.д. имеет более высокие значения $\eta = 0,97 - 0,99$; для внешнего зацепления (в формуле используется знак «+») $\eta = 0,96 - 0,98$.

Для планетарных передач, где возможность передачи мощности зависит от того, какое из звеньев зубчатого механизма принято за ведущее звено: либо это солнечная шестерня *1*, как на рис. 43, а движение снимается с ведомого звена – водила *H*, либо наоборот, в качестве ведущего звена принимается водило *H*, которое будет передавать мощность звену *1*.

На ведущем звене направления момента M_1 и угловой скорости ω_1 совпадают, мощность условно положительна $N_1 > 0$. На ведомом звене

направления угловой скорости ω_H и момента сил сопротивления M_H различны, величина мощности при этом условна отрицательна $N_H < 0$ (рис. 43).

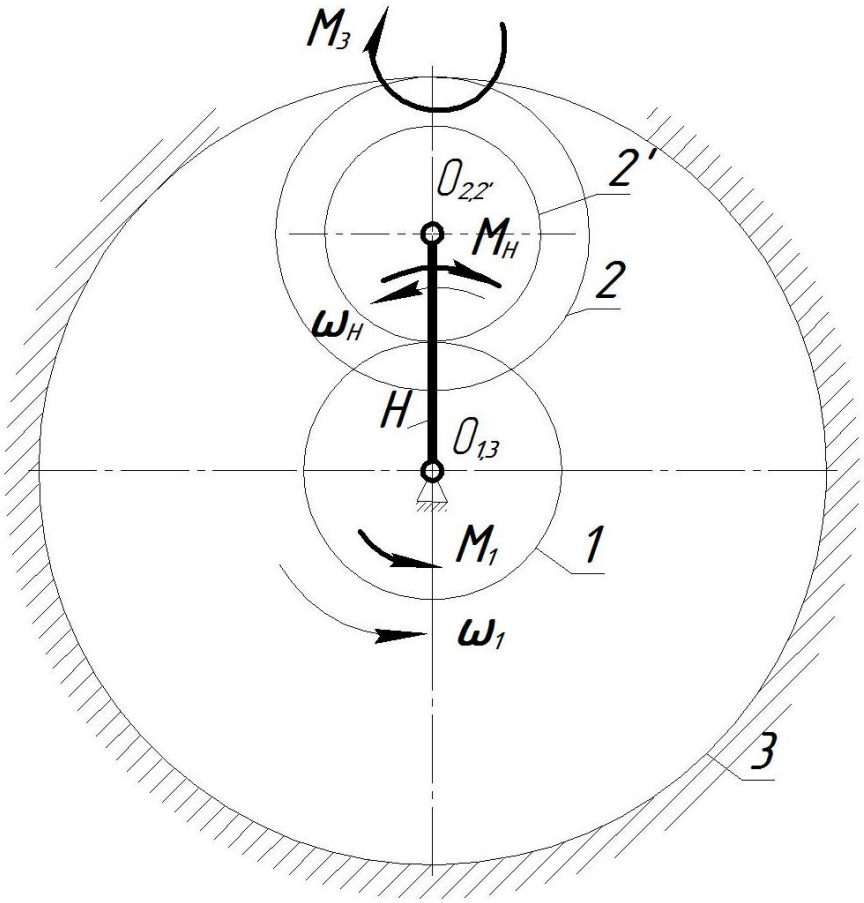


Рис. 43. К определению к.п.д. планетарной передачи

Уравнение баланса мощностей с учетом к.п.д. η планетарной передачи имеет следующий вид:

$$M_1 \cdot \omega_1 \cdot \eta + M_H \cdot \omega_H = 0.$$

Разделив обе части уравнения на ω_H и приняв, что передаточное отношение планетарной передачи

$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H},$$

получим уравнение редукции моментов

$$M_1 \cdot i_{1H} \cdot \eta + M_H = 0,$$

$$M_H = -M_1 \cdot i_{1H} \cdot \eta.$$

Стоит отметить, что определить к.п.д. планетарной передачи можно также при использовании алгоритма силового расчета механизмов с учетом сил трения (см. раздел 5 настоящего пособия).

6.3. Определение коэффициента полезного действия сложных механизмов при различных способах соединения источников потерь

В зависимости от порядка соединения структурных групп в многозвенных механизмах определяют его общий к.п.д. Для общего к.п.д. машины, которая может состоять из нескольких механизмов, имеет значение порядок их соединения. К.п.д. поточных линий, куда входят несколько машин, выполняющих определенные технологические операции, также зависит от характера их соединений.

Рассмотрим три вида соединения отдельных элементов механизма (машины или поточной линии): параллельное, последовательное и смешанное.

Параллельное соединение элементов в кинематической цепи

Параллельное соединение элементов механизма характеризуется разветвлением общего потока энергии. Общая работа движущих сил (поступающая от двигателя) $A_{дв}$ распределяется между элементами кинематической цепи (рис. 44) в соответствующих долях, а именно, $\nu_1 \cdot A_{дв}$, $\nu_2 \cdot A_{дв}$, …, $\nu_n \cdot A_n$, где ν_1, ν_2, ν_n – коэффициенты распределения энергии, доли которых соответственно будут следующими:

$$\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n = 1.$$

Отсюда к.п.д. отдельных элементов кинематической схемы равны

$$\eta_1 = \frac{A_1}{\nu_1 \cdot A_{дв}}, \quad \eta_2 = \frac{A_2}{\nu_2 \cdot A_{дв}}, \quad ..., \quad \eta_n = \frac{A_n}{\nu_n \cdot A_{дв}}, \tag{43}$$

а работа, которая затрачивается на преодоление сил полезного сопротивления, будет определяться как

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = A_{пс}.$$

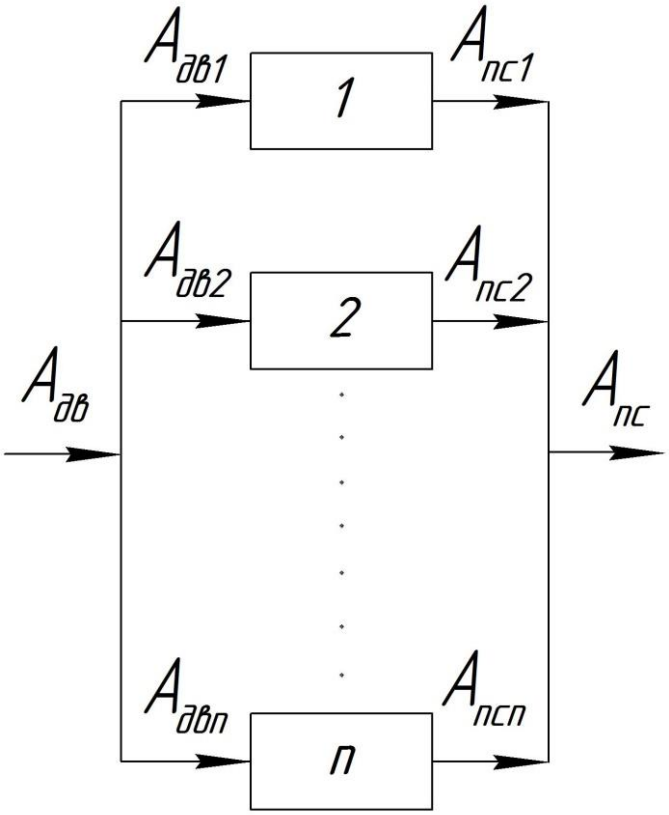


Рис. 44. К определению к.п.д. при параллельном соединении элементов в кинематической цепи

Выразив из (43) соответствующие работы сил полезного сопротивления A_1, A_2, …, A_n получим

$$\eta = \eta_1 \cdot \nu_1 + \eta_2 \cdot \nu_2 + ... + \eta_n \cdot \nu_n. \tag{44}$$

Последовательное соединение элементов в кинематической цепи

При последовательном соединении элементов в кинематической цепи (рис. 45) общий силовой поток от двигателя, постепенно уменьшаясь, передается от 1-го элемента к n-му за счет потерь на трение в каждом из них, тем самым получается

$$A_{дв} \rangle A_1 \rangle A_2 \rangle ... \rangle A_n .$$

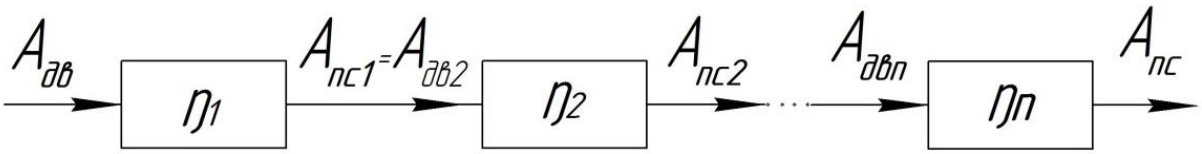


Рис. 45. К определению к.п.д. при последовательном соединении элементов в кинематической цепи

Энергия, движущая каждый последующий элемент цепи, одновременно может быть принята как полезная для каждого предыдущего, к.п.д. каждого элемента будет

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_{дв}}, \quad \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad ..., \quad \eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}},$$

а общий к.п.д. такой цепи равен

$$\eta = \frac{A_n}{A_{дв}},$$

или при последовательном соединении равен произведению к.п.д. отдельных элементов в составе механизма

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \eta_n . \qquad (45)$$

Очевидно, что общий к.п.д. η такого соединения всегда меньше, чем самый низкий к.п.д. отдельного элемента в его составе.

Из формул (44) и (45) очевидно, что низкое качество отдельного элемента меньше влияет на величину к.п.д. всей кинематической цепи при параллельном соединении, чем при последовательном.

Смешанное соединение элементов в кинематической цепи

Смешанное соединение (рис. 46) распадается на отдельные цепи, имеющие последовательный или параллельный характер соединения. Рассчитав по известным формулам к.п.д. каждого из отдельных участков, далее в зависимости от структуры смешанного соединения определяют и общий к.п.д кинематической цепи, который зависит от числа параллельных соединений, распределения мощности по каждому параллельному соединению, а также от числа последовательно соединенных элементов в каждом отдельном параллельном соединении.

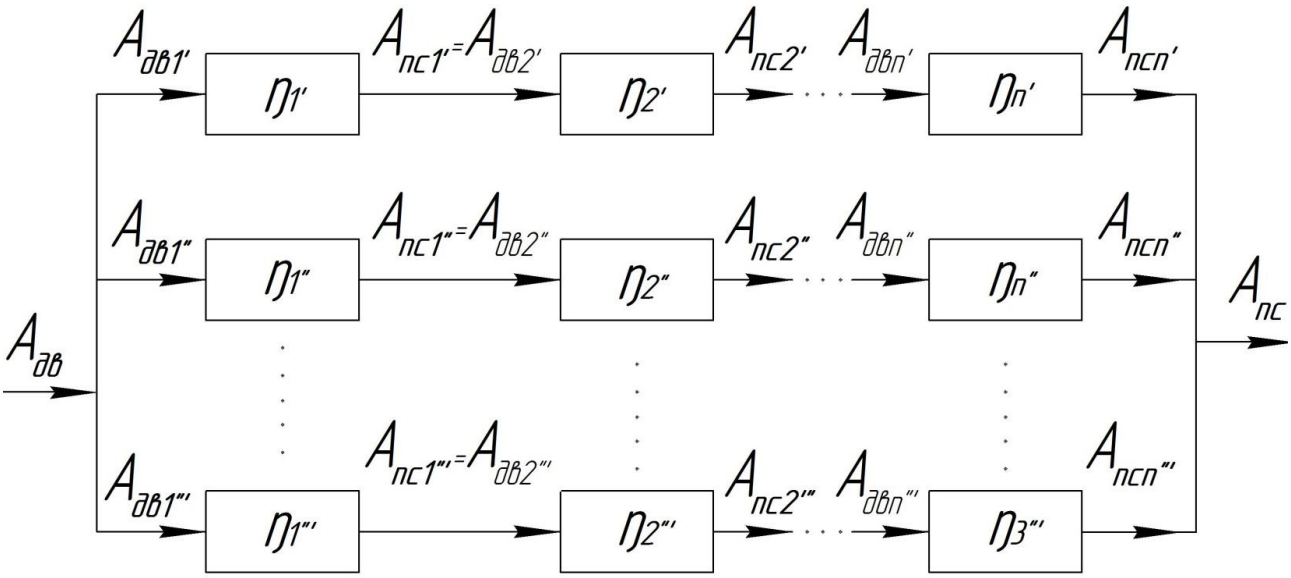


Рис. 46. К определению к.п.д. при смешанном соединении элементов в кинематической цепи

Разветвление энергетического потока, осуществляемое при параллельном соединении, более выгодно, так как потери от нагрузки элементов цепи части энергии меньше потерь от нагрузки общего потока энергии. Это обстоятельство сказывается на общем уровне уменьшения потерь энергии.

6.4. Явления самоторможения и заклинивания

Механизмы, в подвижных связях которых энергетические потери на трение значительны, как правило, не реверсивны, т. е. преобразование движения в них однонаправленно, при реверсе такие механизмы становятся самотормозящими. Это явление называют *заклиниванием*.

Самотормозящие механизмы имеют полезное применение. Так, винтовые механизмы домкратов, подъемников, червячные редукторы лифтов являются самотормозящими, что обусловлено необходимостью их безопасной эксплуатации.

К общему принципу самотормозящих механизмов или отдельных подвижных соединений можно отнести отрицательное значение к.п.д. в реверсном движении, т. е.

$$\eta = \frac{A_{пс}}{A_{дв}} = \frac{A_{дв} - A_{тр}}{A_{дв}},$$

и, если $A_{тр} \rangle A_{дв}$, то $\eta \langle 0$.

В реверсивном движении от гайки к винту при действии на гайку осевой силы Q крутящий момент $M_{кр}$ на винте будет таким:

$$M_{кр} = Q \cdot \frac{d_{ср}}{2} \cdot \mathrm{tg}(\beta - \varphi),$$

где $d_{ср}$ – средний диаметр резьбы; β – угол подъема винтовой линии; φ – угол трения $\varphi = \mathrm{arctg}\, f^*$, f^* – приведенный коэффициент трения. При $\varphi \rangle \beta$ значение $M_{кр}$ будет отрицательным, т. е. реверсивное движение в этих условиях невозможно из-за самоторможения.

Самоторможение в рычажных и кулачковых механизмах возможно и при прямом преобразовании движения. Критерием оценки возможного самоторможения является угол давления – угол между вектором силы, действующей на звено пары, и вектором скорости движения этого звена. На рис. 47 в схеме кулачкового механизма угол давления обозначен β.

При его увеличении возрастает значение составляющей силы $P\sin\beta$, которая вызывает перекос толкателя в направляющей, и как следствие, силы трения в этой поступательной паре. При некотором критическом значении угла β сила трения $F_{тр}$ в направляющей в совокупности с полезной нагрузкой Q окажется больше силы $P\cos\beta$ и произойдет заклинивание этого механизма.

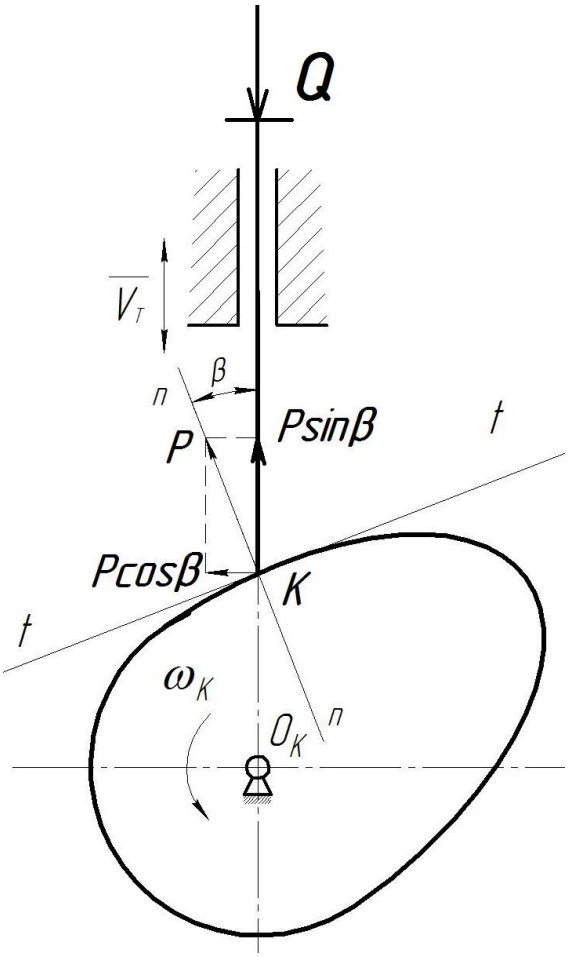


Рис. 47. Кулачковый механизм

Поэтому для обеспечения надежной работы кулачкового механизма необходимо так выбрать его основные размеры, чтобы угол давления ни в одном из положений не превышал некоторого допустимого значения.

При определении основных размеров кулачкового механизма с коромысловым толкателем достаточно, чтобы угол давления ни в одном из положений механизма не превышал $\beta = 45^\circ$, для кулачкового механизма

с поступательно движущимся роликовым толкателем достаточно, чтобы угол давления ни в одном из положений механизма не превышал $\beta = 30^{\circ}$.

Выводы по разделу 6

Механический коэффициент полезного действия позволяет интегрально оценить совершенство машины с энергетической точки зрения. В представленном разделе приведены примеры расчета коэффициента полезного действия типовых механизмов в рамках изучения сокращенного курса прикладной механики.

Вопросы по разделу 6

1. Что характеризует к.п.д. и какова формула его расчета?
2. Что такое коэффициент потерь?
3. Как влияет характер соединения источников потерь на общий к.п.д. механизма?
4. Особенности определения к.п.д. при последовательном соединении источников потерь.
5. Особенности определения к.п.д. при параллельном соединении источников потерь.
6. Особенности определения к.п.д. при смешанном соединении источников потерь.
7. Как определяется мощность сил трения в поступательной кинематической паре?
8. Как определяется мощность сил трения во вращательной кинематической паре?
9. Рекомендации по повышению коэффициента полезного действия.
10. Эффект самоторможения и заклинивания механизма.

7. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МАШИН И МЕХАНИЗОВ

В процессе движения в соединениях (кинематических парах) механизма возникают переменные по величине и направлению динамические усилия, вызываемые в том числе инерционным воздействием, которые передаются на стойку (корпус), вызывая ее колебательное движение, которое затем передается на фундамент (опору) и различные системы, поддерживающие рабочий процесс машины, а также на контрольно-измерительные приборы, систему автоматического управления и оператора машины. Эти колебания способны привести к вибрационным явлениям, которые увеличивают напряжения в некоторых элементах машины.

В условиях современного машиностроения протекание рабочих процессов сопровождается увеличением скоростей, поэтому проблема снижения уровня виброактивности за счет уравновешивания машин становится все более актуальной. Процесс распределения масс звеньев по условию минимизации инерционного воздействия на фундамент (опору) называется *уравновешиванием масс механизма*.

Для полного уравновешивания применяют следующее частное условие – необходимо, чтобы главный вектор $\overline{P}_{ин}$ и главный момент $M_{ин}$ сил инерции были равны нулю в любой момент движения машины, т. е.

$$\overline{P}_{ин} = 0, \tag{46}$$

$$\overline{M}_{ин} = 0, \tag{47}$$

что удовлетворяется распределением масс звеньев и введением корректирующих масс (противовесов).

Если выполняются соотношения (46) и (47), то уравновешивание называется *динамическим*. Иногда ограничиваются выполнением только первого условия (46), которое равносильно условию постоянства положения центра масс звеньев механизма относительно стойки, такое уравновешивание механизма называют *статическим*. Если выполняется только условие (47), то уравновешивание называется *моментным*.

Если оба условия (46) и (47) выполняются не полностью, однако корректировка распределения масс подвижных звеньев привела к уменьшению инерционного нагружения, то такое уравновешивание называют *частичным*. Приемы частичного уравновешивания получили наибольшее распространение, поскольку полное удовлетворение обозначенных условий приводит к нерациональным техническим решениям механизмов.

В любом случае процедура корректировки распределения масс звеньев является затратной и достаточно сложной, требует высокой квалификации конструктора, соответствующих технологий, специального оборудования и приборов.

При уравновешивании приходится гармонизировать взаимоисключающие критерии оценки качества технологии, например, полное статическое уравновешивание механизма рычажной схемы, как правило, сопровождается ростом реакций в промежуточных связях, общей массы подвижной части машины, ее габаритов и др. Поэтому уравновешивание машин, как задача синтеза, относится к классу оптимизационных. Приступая к ее решению, следует иметь полное представление о тех негативных факторах, которые сопровождают работу неуравновешенных машин и которые следует исключить (ослабить); одновременно необходимо иметь в виду иные критерии оценки вариантов технических решений задачи уравновешивания машин.

В качестве примера рассмотрим симметричный ротор массой m = 100 кг, который вращается с постоянной угловой скоростью ω = 1000 $^1/_с$ (частота вращения ≈ 9500 $^{об}/_{мин}$), смещение r_S центра масс ротора относительно оси вращения составляет всего 0,1 мм, что вполне соизмеримо с величиной зазоров в опорах ротора или его статическим прогибом под воздействием силы веса. Определим главный вектор центробежных сил:

$$P_{ин} = m \cdot r_S \cdot \omega^2 = 10 \cdot 0,0001 \cdot 1000^2 = 1000 \text{ Н}.$$

Так как вес ротора составляет 100 Н, то сила инерции превосходит силу веса в 10 раз, причем сила инерции совершает вращение вместе с ротором относительно стойки, следовательно, динамические реакции стойки и вы-

борка зазоров в связях ротора будут иметь переменное направление. Часто жесткость связей ротора со стойкой имеет переменное значение в различных направлениях, что дополнительно усложняет картину колебательного движения ротора и вторичную силовую картину нагружения связей.

Как отмечалось в [1], динамические процессы, протекающие в машинах, являются сложными, полигармоническими, но инерционное возбуждение, как правило, происходит с основной частотой или частотой, кратной основной. Колебательное движение механической части машины вызывает дополнительное нагружение как стойки, так и элементов ее крепления на раме.

Знакопеременные нагрузки приводят к знакопеременным напряжениям, которые, накапливаясь, способствуют появлению усталостных трещин несущих элементов и их разрушению. При ослаблении неподвижных болтовых и иных соединений на поверхностях стыков деталей происходит изменение их структуры, изменяются диссипативные свойства объектов, смещение их собственных частот и др.

Колебания стойки, не вызывая видимых разрушений, могут приводить к нарушению нормального функционирования машины. Например, вибрации металлорежущих станков и другого технологического оборудования приводят к снижению точности и чистоты обработки поверхностей из-за наличия динамических ошибок взаимного расположения деталей и агрегатов.

Механические воздействия существенно влияют на точность и надежность приборов, входящих в систему управления машиной, механические колебания плохо сочетаются с электроникой, гидравликой.

Механические колебания, возникающие при работе машин и оборудования, оказывают вредное влияние на людей, находящихся вблизи источника или в непосредственном контакте с ним. Как правило, наблюдаются нарушения физиологического и функционального состояния человека – оператора, проявляющиеся в ухудшении зрения, изменении реакции вестибулярного аппарата, в быстрой утомляемости.

Особо вредное влияние на здоровье человека оказывают высокочастотные колебания от механизированного инструмента и от машин,

использующих вибрационный эффект при исполнении процессов (виброгрохоты, вибромалоты, виброконвейеры, виброуплотнители, вибросепараторы и др.).

Допустимые для человека уровни динамического воздействия регламентируются санитарными нормами и правилами, обязательными для исполнения как при проектировании, так и при эксплуатации машин.

Уравновешивание механизмов общего вида

Рассмотрим уравновешивание механизмов общего вида с рычажной схемой, которые изначально проектируются как системы с подвижным центром масс, со звеньями, совершающими ускоренное плоское движение.

Отсюда задача уравновешивания такой механической системы становится сложной и часто не имеющей удовлетворительного решения. Полное уравновешивание таких систем должно означать соответствие условиям (46) и (47).

По рис. 48 рассмотрим схему плоского четырехзвенного кривошипно-коромыслового механизма, где S_1, S_2, S_3 – центры масс звеньев кривошипа *1*, шатуна *2* и коромысла *3* соответственно, а m_1, m_2, m_3 – массы этих звеньев.

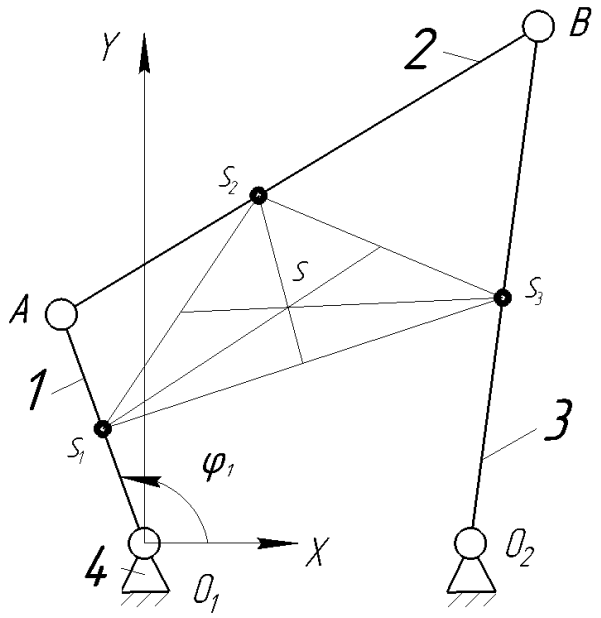


Рис. 48. Определение центра масс кривошипно-коромыслового механизма

Если любым способом привести массы к одной точке S (центру масс подвижной части механизма), то положение точки S будет зависеть от обобщенной координаты φ_1.

Связав со стойкой в точке O_1 начало системы координат, можно записать условия эквивалентности:

$$\begin{aligned} mx_S &= m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 \\ my_S &= m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 \end{aligned},$$

где $m = m_1 + m_2 + m_3$ – сумма масс подвижных звеньев; x_S и y_S – координаты центра масс механизма; x_i, y_i – координаты центров масс отдельных звеньев.

Откуда выразим:

$$x_S = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m}$$
$$y_S = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m}.$$

При $x_S = \text{const}$ и $y_S = \text{const}$ главный вектор сил инерции будет отсутствовать. В реальных механизмах циклического действия центр масс S двигается с переменной скоростью по замкнутой траектории. При этом возникают оба компонента переменного инерционного возбуждения $P_{ин}^{\tau}$ и $P_{ин}^{n}$, которые относительно точек O_1 и O_2 создают переменное инерционное моментное нагружение. В редких случаях удается спроектировать схему механизма, в которой условия $x_S = \text{const}$ и $y_S = \text{const}$ выполняются, причем звенья не введены в схему только для целей уравновешивания, а выполняют прямое функциональное назначение.

Корректирующие массы (противовесы) принято устанавливать на основные звенья схемы механизма. Технические решения схем механизмов, в которых симметрия масс звеньев достигается путем введения в схему специальных звеньев, выполняющих только уравновешивающую функ-

цию, как правило, с инженерной точки зрения нерациональны, поэтому наибольшее распространение получили приемы полного *статического* уравновешивания, а также приемы *частичного статического* и *моментного* уравновешивания.

Статическое уравновешивание рычажных механизмов

При статическом уравновешивании массы звеньев распределяют таким образом, чтобы общий центр масс был неподвижен. Задача решается методом заменяющих точечных масс. Как уже упоминалось выше, метод заменяющих точечных масс сводится к тому, что каждое звено приближенно заменяют двумя точечными массами, которые находятся в центрах шарниров, а силы инерции звена определяют как силы инерции масс, расположенные в этих точках.

Применение статической замены звена точечными массами позволяет значительно упростить расчетную модель механической системы.

При условии симметричности звена, такого как, например, на рис. 9, при его статической замене, точечные массы размещают в точках m_A и m_B.

Повторим математическую запись условий эквивалентной замены:

$$m_A + m_B = m;$$
$$-m_A l_1 + m_B l_2 = 0. \qquad (48)$$

Пример статического уравновешивания схемы кривошипно-коромыслового механизма приведен на рис. 49. Такой механизм состоит из следующих звеньев: *1* (кривошип) и *3* (коромысло), связанных со стойкой *0* геометрическими связями 0_1 и 0_2, и не имеющего связей со стойкой звена *2* (шатун). Отметим, что центры масс звеньев *1* и *3* – S_1 и S_3, соответственно, не обязательно совпадают с 0_1 и 0_2. При конструировании таких звеньев это легко обеспечить, размещая противовесы на звеньях таким образом, чтобы центры масс звеньев S_1 и S_3 совпали с 0_1 и 0_2.

Для исключения статического дисбаланса такого механизма, целесообразно подобрать параметры противовесов с учетом звена *2*.

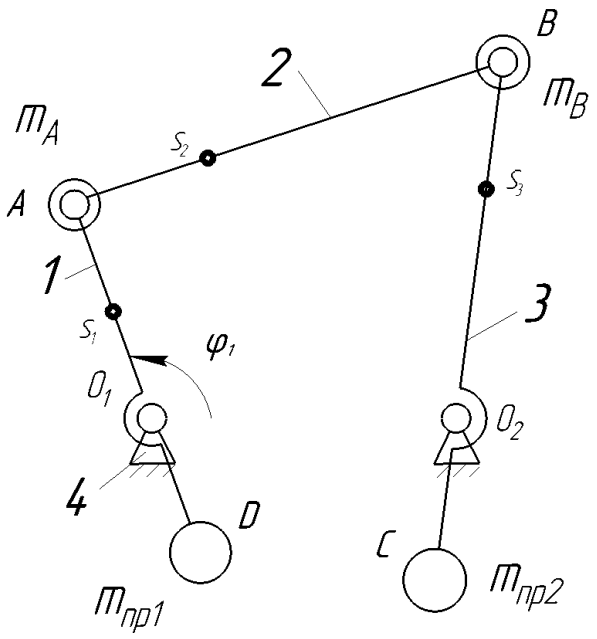


Рис. 49. Полное статическое уравновешивание кривошипно-коромыслового механизма

Все подвижные звенья рассматриваемого механизма заменяем двумя точечными массами, находящимися в центрах шарниров, соединяющих данное звено с другими звеньями. Например, кривошип заменяется массами m_{A_1} и m_{0_1}, шатун – массами m_{A_2} и m_{B_2}, а коромысло – массами m_{B_3} и m_{0_2}, величины которых вычисляются по следующим формулам:

$$m_{A_1} = m_1 \cdot \frac{l_{0S_1}}{l_{0_1A}}; \qquad m_{0_1} = m_1 \cdot \frac{l_{AS_1}}{l_{0_1A}}; \tag{49}$$

$$m_{A_2} = m_2 \cdot \frac{l_{BS_2}}{l_{AB}}; \qquad m_{B_2} = m_2 \cdot \frac{l_{AS_2}}{l_{AB}}; \tag{50}$$

$$m_{B_3} = m_3 \cdot \frac{l_{0_2S_3}}{l_{B0_2}}; \qquad m_{0_2} = m_3 \cdot \frac{l_{BS_3}}{l_{B0_2}};$$

где m_1, m_2, m_3 – массы подвижных звеньев.

Массы m_{0_1} и m_{0_2} неподвижны. Подвижные массы m_A и m_B сосредоточены в точках *A* и *B*.

$$m_A = m_{A_1} + m_{A_2};$$

$$m_B = m_{B_2} + m_{B_3}.$$

Для их уравновешивания на кривошип и коромысло устанавливаются противовесы – массы $m_{пр1}$ и $m_{пр2}$, которые подбираются по условиям:

$$m_{пр1} \cdot l_{0_1 D} = m_A \cdot l_{0_1 A};$$

$$m_{пр2} \cdot l_{0_2 C} = m_B \cdot l_{B0_2},$$

где $l_{0_1 D}$ и $l_{0_2 C}$ – радиусы установки противовесов.

Отметим, что двумя противовесами можно обеспечить полное статическое уравновешивание кривошипно-коромыслового механизма. Для рычажного механизма с поступательно движущимся звеном задача уравновешивания несколько усложняется.

Рассмотрим пример полного статического уравновешивания кривошипно-ползунного механизма по рис. 50.

Полное статическое уравновешивание такого механизма обеспечивается установкой противовесов на шатун и кривошип.

Для определения параметров противовесов кривошип заменяем точечными массами m_{A_1} и m_{0_1}, а шатун – массами m_{A_2} и m_{B_2}. Массы m_{A_1} и m_{0_1} определяем по формулам (49), а массы m_{A_2} и m_{B_2} – по формулам (50). Масса m_{0_1} неподвижна.

Статический момент противовеса массой $m_{пр1}$, устанавливаемого в точке *C* шатуна, определяем по условию

$$m_{пр1} \cdot l_{AC} = m_B \cdot l_{AB}.$$

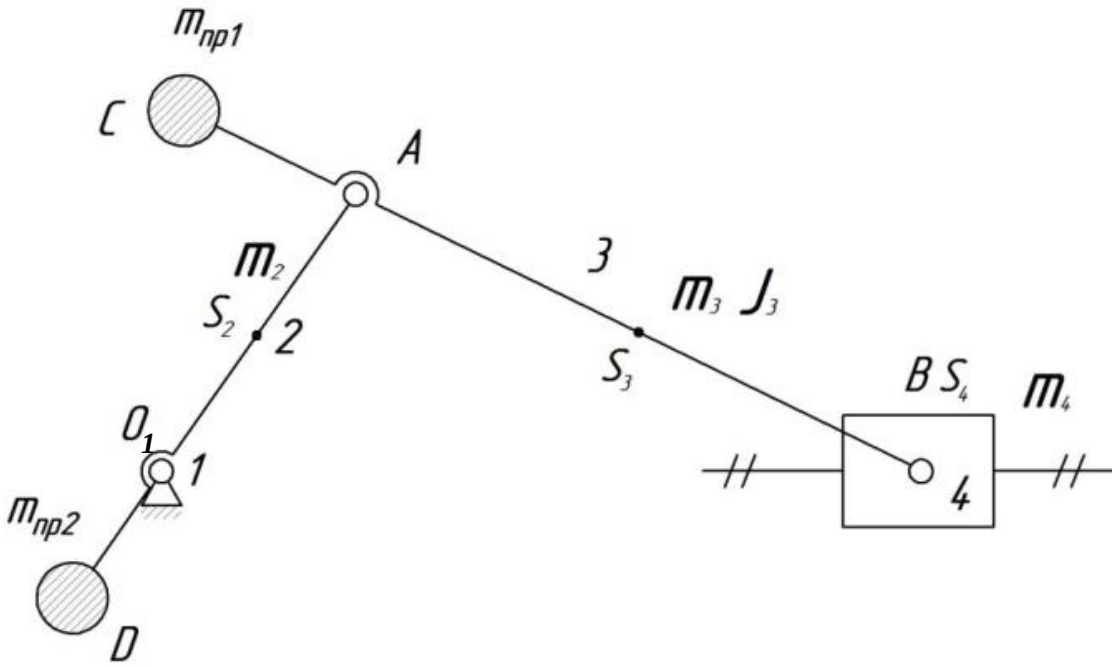


Рис. 50. Полное статическое уравновешивание кривошипно-ползунного механизма

После установки этого противовеса в точке *A* будет сосредоточена значительная масса m_A, для уравновешивания которой на кривошип добавляется второй противовес массой $m_{пр2}$

$$m_{пр2} \cdot l_{0_1 D} = m_A \cdot l_{0_1 A},$$

где $m_A = m_{A_1} + m_{A_2} + m_{пр2} + m_B$.

Отметим, что радиусы l_{AC} и $l_{0_1 D}$ установки противовесов подбираются с учетом конструктивных или иных ограничений.

При полном статическом уравновешивании кривошипно-ползунного механизма заметно возрастают масса механизма и его габаритные размеры. При ограничении габаритов масса механизма может увеличиваться кратно. Кроме того, значительно увеличивается момент инерции шатуна и, как следствие, главный момент сил инерции механизма, что приводит к увеличению его моментной неуравновешенности. Перечисленные недостатки ограничивают использование полного статического уравновешивания. На практике чаще используют *частичное статическое* уравновешивание кривошипно-ползунных механизмов.

Частичное статическое уравновешивание кривошипно-ползунного механизма

При частичном статическом уравновешивании рычажного кривошипно-ползунного механизма для уменьшения главного вектора сил инерции используют один противовес, устанавливаемый на кривошип 1 (рис. 51).

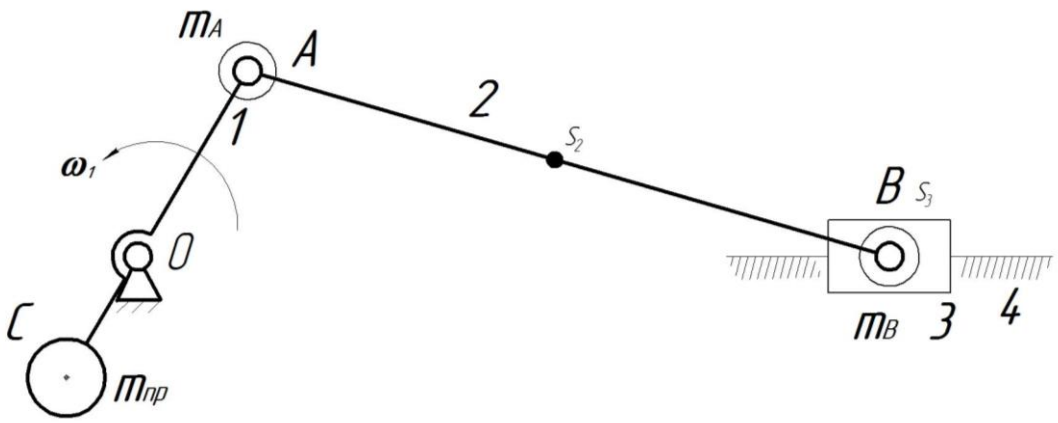


Рис. 51. Частичное статическое уравновешивание кривошипно-ползунного механизма

Статический момент противовеса определяют по условию

$$m_{пр} \cdot l_{0C} = m_A \cdot l_{0A},$$

где масса m_A будет

$$m_A = m_{A1} + m_{A2},$$

$$m_{A1} = m_1 \cdot \frac{l_{AS_1}}{l_{0A}},$$

$$m_{A2} = m_2 \cdot \frac{l_{BS_2}}{l_{AB}}.$$

Центр масс кривошипно-ползунного механизма, уравновешенного одним противовесом, не будет неподвижным. Он перемещается вдоль

направляющей ползуна, т. е. механизм имеет неуравновешенные силы инерции. Тем не менее, частичное статическое уравновешивание получило широкое применение, например: в двигателях внутреннего сгорания (ДВС), компрессорах, криогенных и сельскохозяйственных машинах.

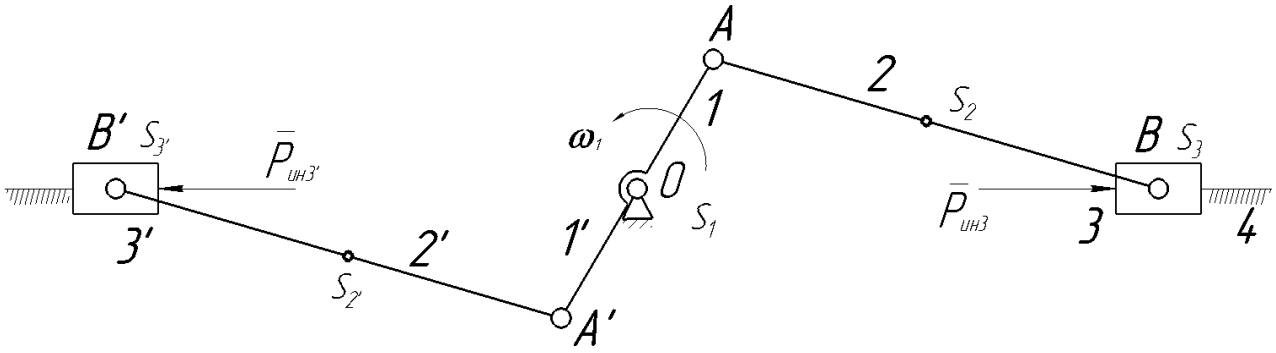


Рис. 52. Кинематическая схема оппозитного двигателя (ДВС)

На рис. 52 приведена схема оппозитного ДВС (компрессора), которая является полностью статически уравновешенной.

Уравновешивание роторов (балансировка)

Ротором называют быстро вращающееся тело, которое своими опорными поверхностями – цапфами, удерживается в опорах. Например, роторами являются шлифовальный круг, шпиндель станка, шкив, роторы турбин и тому подобное. Если ротор неуравновешен, то при его вращении на опоры действует дополнительная динамическая нагрузка, вызывающая значительную вибрацию всех элементов конструкции.

Устранение этого вредного динамического воздействия называют балансировкой. В качестве причин неуравновешенности роторов, а именно не соблюдение условий (46) и (47), можно отметить следующие: его конструктивные особенности, первичные погрешности формы и размеров элементов конструкции, неоднородность материалов, температурные искажения, деформации элементов. Различают три вида неуравновешенности роторов: *статическая, моментная* и *динамическая.*

При *статической* неуравновешенности центр масс *S* ротора не находится на оси его вращения *Z* (рис. 53, *а*), но главная центральная ось инер-

ции ротора *I-I* будет параллельна оси его вращения. Главный вектор сил инерции $\vec{P}_{ин}$ такого ротора:

$$P_и = m \cdot \omega^2 \cdot e_{CT}, \tag{51}$$

где m – масса ротора; ω – угловая скорость ротора; e_{CT} – радиус-вектор центра масс.

В выражении (51) обозначим произведение массы ротора на радиус-вектор центра масс главным вектором дисбаланса ротора

$$\vec{D}_{CT} = m \cdot \vec{e}_{CT},$$

тогда

$$\vec{P}_и = \omega^2 \cdot \vec{D}_{CT}.$$

Статический дисбаланс можно устранить установкой корректирующей массы $m_к$, которую надо установить так, чтобы

$$m_к \cdot \vec{e}_к = -\vec{D}_{CT}. \tag{52}$$

В формуле (52) $\vec{e}_к$ – радиус-вектор корректирующей массы.

Условие статической уравновешенности ротора подразумевает отсутствие дисбаланса

$$D_{CT} = 0.$$

Статическая неуравновешенность может быть определена по чертежу ротора, но чаще статическую неуравновешенность, или статический дисбаланс, определяют экспериментально статическим испытанием, размещая ротор на ножи и другие опоры с низким трением. При наличии дисбаланса

$$\Delta = m r_s,$$

где m – масса ротора; r_s – смещение центра масс ротора относительно оси вращения.

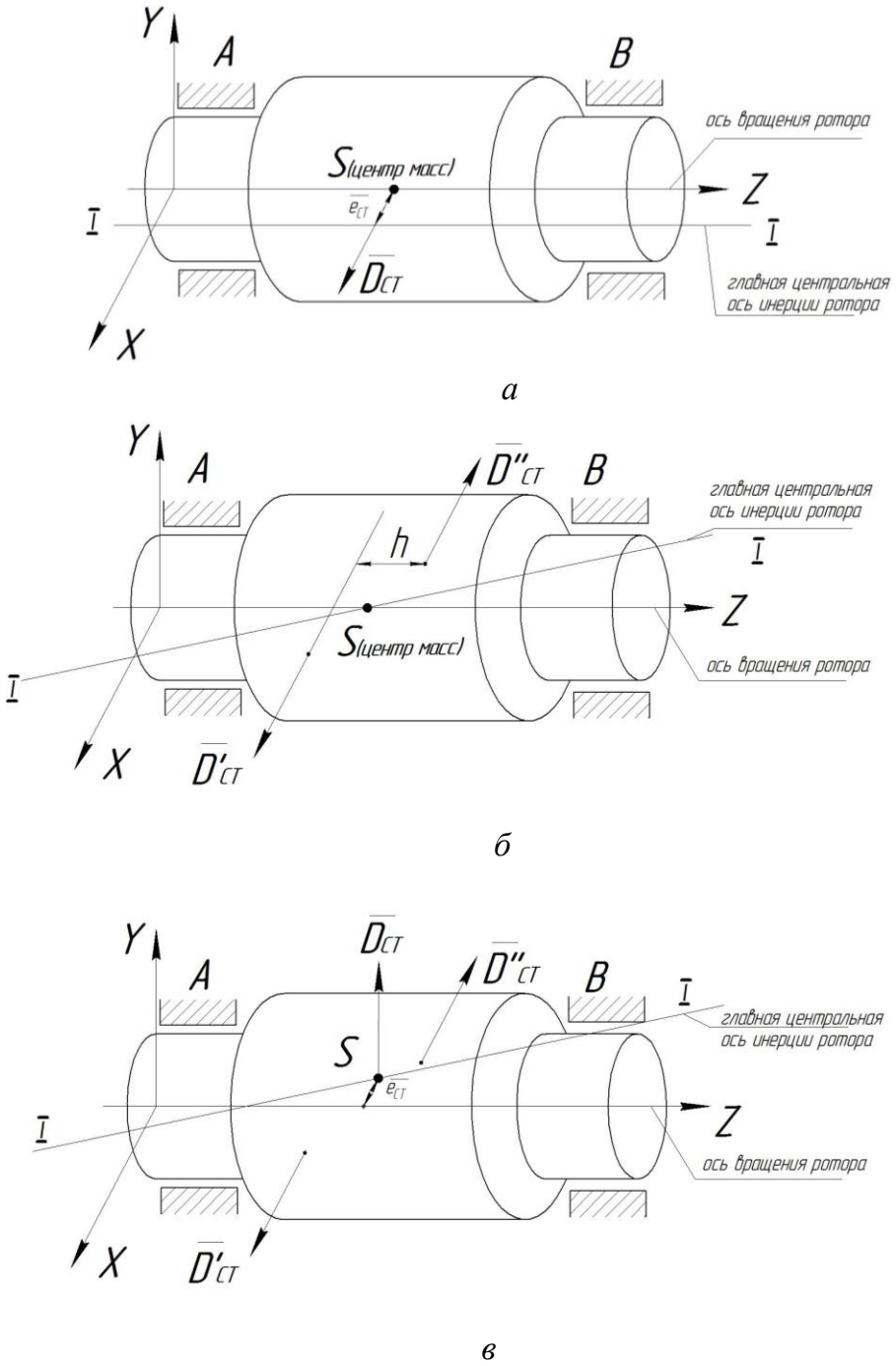


Рис. 53. Схемы неуравновешенности роторов:
а – статической; *б* – моментной; *в* – динамической

Ротор не будет находиться в безразличном равновесии: он будет двигаться, пока не займет положение устойчивого равновесия, при котором центр масс имеет низшее положение (минимум потенциала).

Для статического равновесия надо в направлении, противоположном центру масс, установить дополнительную (корректирующую) массу $m_{пр}$ (противовес) на расстоянии $r_{пр}$ от оси вращения при выполнении условия

$$mr_S = m_{пр} \cdot r_{пр}. \qquad (53)$$

Выражение (53) означает, что при вращении ротора сила инерции противовеса будет равной силе инерции неуравновешенного ротора, а результирующая сила инерции окажется равной нулю.

С точки зрения геометрии условие (53) означает, что система из двух масс: ротора и противовеса – имеет центр масс, расположенный на оси вращения, т. е. дисбаланс системы отсутствует:

$$r_S = 0.$$

Условие (53) достигается экспериментально или с использованием соответствующего балансировочного комплекса, стендов для балансировки.

Иногда операцию установки противовеса заменяют удалением массы $m_{пр}$ (высверливанием, фрезерованием), в этом случае центр удаленной массы и центр масс звена располагаются по одну сторону от оси вращения. Такая операция иногда называется установкой антипротивовеса.

Статического уравновешивания оказывается достаточно только для звеньев, имеющих малую протяженность вдоль оси вращения (шкивы, зубчатые колеса, маховики, фланцы и др.). Для звеньев иной формы, например, для валов, барабанов, турбин, необходимо выполнить оба условия (46) и (47) с целью устранения главного вектора и главного момента сил инерции. Тем самым инерционное возбуждение стойки полностью ликвидируется.

При *моментной* неуравновешенности центр масс *S* ротора находится на оси его вращения *Z* (рис. 53, *б*), а главная центральная ось инерции ротора *I-I* образует с нею угол γ. В этом случае смещение отсутствует $e_{CT} = 0$, но главный момент сил инерции $\vec{M}_u$ не равен нулю. Имеет место пара дисбалансов $\vec{D}'_{CT}$ и $\vec{D}''_{CT}$, которые вращаются вместе с ротором. Они

образуют пару дисбалансов с моментом M_D. Величину M_D называют главным моментом дисбалансов ротора.

Устранить такую неуравновешенность можно только двумя корректирующими массами, которые должны быть расположены в плоскостях дисбалансов так, чтобы их дисбалансы $\vec{D}_к$ составляли пару с моментом $M_{Dк}$. Причем $\vec{M}_{Dк} = -\vec{M}_D$.

Условие моментной уравновешенности ротора, как и в предыдущем случае, подразумевает отсутствие главного момента дисбалансов

$$M_D = 0.$$

Полное уравновешивание вращающегося звена имеет место тогда, когда ось вращения совмещается с одной из главных осей инерции.

Полное уравновешивание можно выполнить установкой двух противовесов в двух произвольно выбранных плоскостях I и II, называемых плоскостями коррекции. Как правило, плоскости коррекции выбирают в ходе конструирования ротора, предусматривая техническую возможность установки в этих плоскостях корректирующих масс.

Динамическая неуравновешенность (рис. 53, *в*) есть совокупность статической и моментной неуравновешенностей. Устранить ее можно двумя корректирующими массами.

Ротор динамически уравновешен в случае, если $D_{CT} = 0$ и $M_D = 0$.

Операцию динамического уравновешивания ротора выполняют после статического уравновешивания.

Динамическую неуравновешенность можно представить двумя массами m_1 и m_2, находящимися в плоскостях приведения на расстояниях r_1 и r_2 от оси вращения ротора (рис. 54). Эти массы способствуют появлению сил инерции, которые отличаются между собой по величине и направлению. Иногда такую неуравновешенность обозначают как несимметричный, неуравновешенный крест. Определяем силы инерции известным образом:

$$P_{ин_1} = m_1 r_1 \omega^2; \quad P_{ин_2} = m_2 r_2 \omega^2.$$

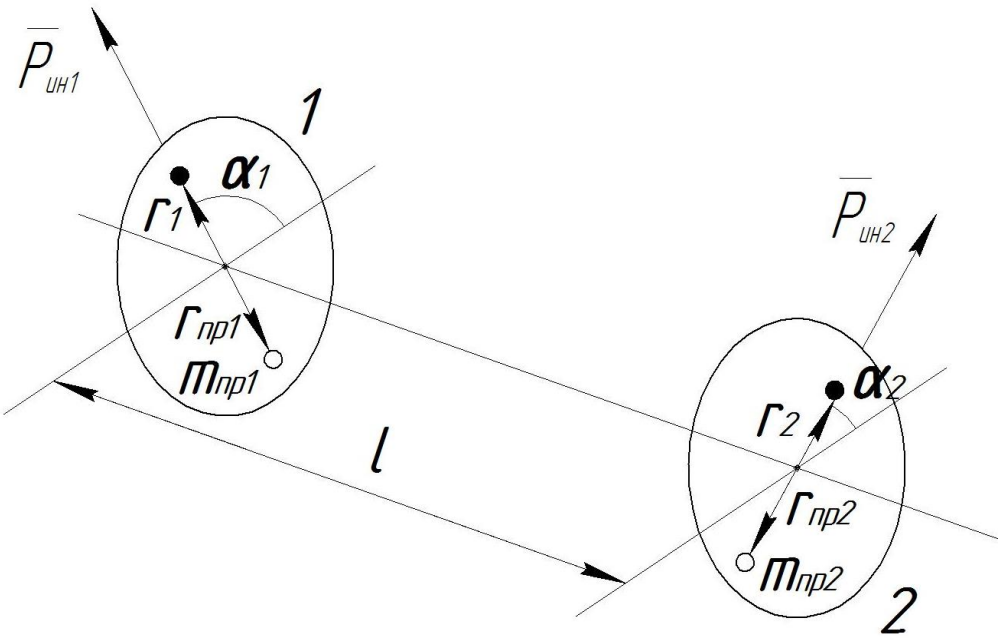


Рис. 54. Схема динамического уравновешивания ротора

Дисбалансы противовесов, размещаемых в плоскостях коррекции, должны удовлетворять следующим условиям:

$$m_{пр1} r_{пр1} = m_1 r_1;$$

$$m_{пр2} r_{пр2} = m_2 r_2,$$

а углы их расположения, соответственно, будут:

$$\alpha_{пр1} = \alpha_1 + \pi,$$

$$\alpha_{пр2} = \alpha_2 + \pi.$$

Установку дисбалансов противовесов можно изменить и приемом удаления масс $m_{пр1}$ и $m_{пр2}$, тогда $\alpha_{пр1} = \alpha_1$ и $\alpha_{пр2} = \alpha_2$.

Величины дисбалансов противовесов и углов их установки определяют экспериментально на специальных балансировочных стендах общего назначения или специализированных для конкретной конструкции ротора.

Ротор называется жестким, если во всем диапазоне эксплуатационных частот вращения его деформации незначительны, при значительных

деформациях ротор считается гибким (есть и иное определение классификации роторов).

Балансировка как жестких, так и гибких роторов выполняется на балансировочных стендах двух типов: рамного типа, в которых опоры ротора расположены на общей подвижной раме, и с независимыми опорами, снабженными датчиками давления, сигналы от которых указывают как на величину дисбалансов ротора, так и на угловое расположение неуравновешенных масс.

В России (ранее СССР) серийно выпускаются специализированные стенды для балансировки коленчатых валов, двигателей и компрессоров в сборке, электродвигателей и гидродвигателей, турбогенераторов, колесных пар, гибких роторов.

Наиболее простым по схеме является стенд рамной конструкции. Испытания ротора проводят по следующей методике. Ротор устанавливают на раму так, чтобы одна из плоскостей приведения (коррекции) проходила через ось качания рамы, снабженной упругим подвесом относительно корпуса стенда.

Замер амплитуд колебаний рамы производят на резонансных частотах, когда частота вращения неуравновешенного ротора совпадает с частотой собственных колебаний рамы вместе с ротором.

Ротор от отдельного привода попадает, разгоняясь, в зарезонансную зону и свободно выбегает, при этом его частота проходит через резонанс, и максимальную амплитуду A_1 колебаний рамы фиксируют.

После этого на ротор в плоскости коррекции устанавливают дополнительный груз с известным дисбалансом массой $m_{доб}$ на расстоянии $r_{доб}$ от оси вращения ротора, причем груз фиксируют на нулевой отметке по лимбу плоскости коррекции. Проводят повторное испытание ротора с добавочным грузом и определяют максимальную амплитуду A_2.

Затем, сохраняя дисбаланс добавочного груза, переставляют его по лимбу на угловое положение «π» и проводят третье испытание с новым значением резонансной амплитуды A_3.

Все три амплитуды A_1, A_2, A_3 образуют два подобных параллелограмма (рис. 55), из геометрических соотношений которых можно получить параметр стенда, дисбаланс ротора и место расположения неуравновешенных масс.

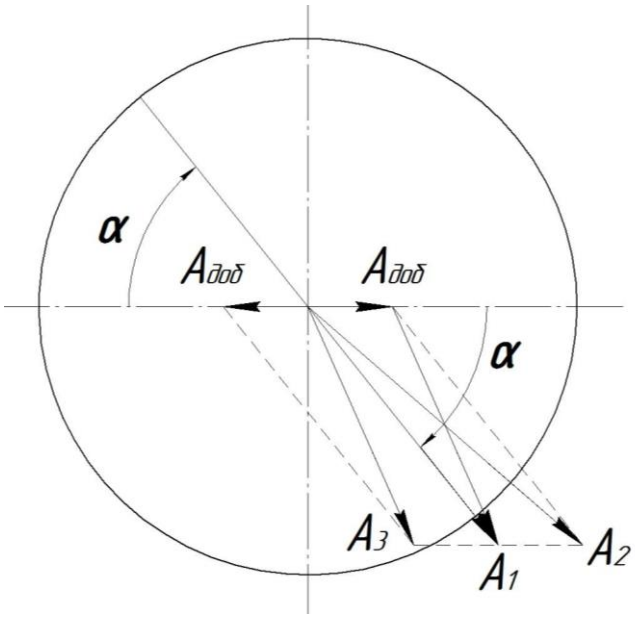


Рис. 55. К динамическому уравновешиванию ротора

Из свойств параллелограмма:

$$A_2^2 + A_3^2 = 2A_{доб}^2 + 2A_1^2,$$

Откуда

$$A_{доб} = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}}.$$

Поскольку $A_{доб}$ происходит от дисбаланса добавочного груза, то параметр стенда будет таким:

$$C = \frac{A_{доб}}{m_{доб} r_{доб}}. \qquad (54)$$

Используя C по (54), получим дисбаланс неуравновешенного ротора

$$m_{пр} r_{пр} = m r_S = \frac{A_1}{C}.$$

Угловое положение α расположения противовеса определим на основе теоремы косинусов:

$$A_3^2 = A_{доб}^2 + A_1^2 - 2A_{доб} A_1 \cos\alpha$$

и

$$\alpha = \arccos \frac{A_1^2 + A_{доб}^2 - A_3^2}{2A_1 A_{доб}}.$$

После выполнения процедуры уравновешивания ротора в плоскости приведения I ротор переставляют и, сохраняя методику, проводят уравновешивание в плоскости II.

Современные балансировочные стенды не требуют перебазирования роторов в опорах, кроме того, у некоторых из них процесс корректировки масс автоматизирован.

Измерительные системы этих стендов содержат генераторы опорных сигналов (датчики дисбалансов), которые преобразуют колебания тарированных опор в электрический сигнал, пропорциональный величине дисбаланса ротора. Индикатор величины и угла дисбаланса даст сведения о величине масс противовесов (антипротивовесов) и их расположении.

Исполнительные органы автоматического балансировочного стенда действуют по сигналам, поступающим от измерительного устройства, и без остановки ротора производят мгновенное удаление масс путем лазерного испарения части материала или путем мгновенного наплавления микровзрывами плазмы материала магнитного поля с помощью импульса.

Выводы по разделу 7

Основной тенденцией мирового машиностроения является повышение удельной мощности машин, для этого стремятся использовать все более быстроходные машины, и поэтому особое значение инженерами, работающими в области их проектирования, уделяется уравновешиванию механизмов, которое в значительной мере может снизить динамическое воздействие переменных и значительных по модулю реакций, которые порождаются силами и моментами сил инерции звеньев, совершающих неинерциальное движение. Инерционное нагружение звеньев является неполезным, воспринимается связями, передается на стойку (корпусное звено) и далее на раму и различные системы, поддерживающие рабочий процесс машины, а также на контрольно-измерительные приборы, систему автоматического управления и оператора машины.

Условия, при выполнении которых достигается полное уравновешивание, известны, и они сводятся к равенству нулю главного вектора $P_{ин}$ и главного момента $M_{ин}$ сил инерции механической системы.

В реальных системах общего вида только за счет схемного решения основного механизма выполнение этих условий невозможно, поэтому введение корректирующих масс является вынужденным приемом достижения целей уравновешивания.

Вопросы по разделу 7

1. Виды неуравновешенности звеньев, природа их возникновения.
2. Эффект неуравновешенности в механических системах.
3. Что такое уравновешивание и балансировка роторов?
4. Сколько противовесов требуется для статического уравновешивания роторов и почему?
5. Сколько противовесов требуется для динамического уравновешивания роторов и почему?
6. Условие статической уравновешенности механизма.
7. Приемы статического уравновешивания кривошипно-ползунного, четырехшарнирного механизма.

8. ИНЖЕНЕРНОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ КИНЕТОСТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

Все алгоритмы кинетостатического исследования механизмов, которые позволяют определить реакции связей в механической системе, рассматриваемой в движении, с учетом внешнего нагружения и сил трения необходимы для проведения в дальнейшем прочностных и жесткостных расчетов, конструирования составных частей механизма, а именно: направляющих, подпятников, зацепления зубьев, фрикционных контактов. Полученные значения сил подвергаются корректировке с помощью систем коэффициентов запаса прочности, которые получены из опыта эксплуатации подобных конструкций в схожих режимах эксплуатации. Расхождение между расчетными и реальными моделями соединений звеньев в механизме компенсируется подобными коэффициентами, часть из них идет на увеличение расчетной нагрузки, а часть – на уменьшение допускаемых напряжений. Допускаемые напряжения составляют основное содержание справочной литературы по конструированию и справочной части расчетных инженерных прикладных программ.

Как правило, при конструировании звена механизма руководствуются определением основных размеров типовых объектов, расчетные формулы для которых известны, а именно: балок, пластин, оболочек и т. п. Звено освобождается от связей, которые заменяются реакциями, строятся графики изменения внутренних сил, затем определяют вид напряженного состояния и опасное сечение. Комбинацию напряженного состояния приводят к равнозначному напряжению по одной из гипотез прочности, выбирают материал, допускаемые напряжения и, располагая условиями прочности и жесткости, подбирают размеры сечения звена. Например, выбор размеров подшипника скольжения удовлетворяет условию износостойкости, при котором допустимое удельное давление q:

$$q = \frac{R}{d \cdot l} \geq [q], \tag{55}$$

где R – радиальная нагрузка на подшипник (реакция), Н; d – диаметр цапфы подшипника, мм; l – длина цапфы, мм; $[q]$ – допустимое удельное дав-

ление материала подшипника или предельное давление из условия невыдавливания смазки, МПа, откуда принимается

$$d \cdot l = \frac{R}{[q]}.$$

Таким же образом рассчитывается направляющая скольжения.

Подшипники качения требуемого типоразмера подбираются по коэффициенту работоспособности $C_{расч}$, величина которого содержится в справочной литературе

$$C_{расч} = kR \cdot (n \cdot h)^{0,3}, \tag{56}$$

где kR – условная нагрузка, учитывающая направление и характер действующих сил, Н; n – скорость вращения подвижного кольца, об/мин; h – расчетная долговечность, ч.

При проектировании зубчатого зацепления рассчитывают изгибную прочность зубьев и уровень возможных контактных напряжений, которые также сравнивают с допускаемыми.

Как уже упоминалось выше, результаты кинетостатического расчета являются основой для определения потерь на трение, механического к.п.д. механизма, энергетических потерь, определения износа и ресурса узлов машины и машины в целом.

Износ Δ элементов активных поверхностей трения, который выражается в изменении их формы и размеров, пропорционален мощности трения $N_{тр}$:

$$\Delta = k \cdot N_{тр}.$$

А мощность трения $N_{тр}$ в свою очередь определяется с учетом силы реакции R, которая, как показывают результаты силового расчета, будет переменной за цикл движения звена

$$N_{тр} = R\, f\, V_{отн}, \tag{57}$$

где $V_{отн}$ – переменная скорость относительного движения звена, совершающего поступательное движение по неподвижной направляющей.

Формула (57) содержит произведение двух переменных величин и, соответственно, будет величиной существенно переменной.

Узел трения в процессе работы теряет свою исходную геометрию. Так, например, изначально плоская направляющая в процессе работы станет криволинейной, можно определить зоны интенсивного износа. Интенсивность износа с учетом удельного давления q определяется зависимостью [1]

$$\frac{d\Delta}{dt} = kq^m V_{ск}^n, \tag{58}$$

где m и n – показатели степени, зависящие от вида взаимодействия поверхностей и изнашивания соответственно. Так как работоспособность узла трения определяется предельным значением износа, то и выражение (58) дает возможность прогнозировать ресурс узла на стадии проектирования.

Аналогичным образом выполняются расчеты потерь на трение и ресурс любых узлов трения. Например, для подшипника скольжения момент и мощность трения с учетом диаметра цапфы вала d и его угловой скорости ω определяются как

$$M_{тр} = R\, f\, \frac{d}{2}$$

и

$$N_{тр} = M_{тр}\, \omega.$$

Примем длину подшипника равной b; максимальное давление на цилиндрической поверхности радиусом $r = 0{,}5d$ будет таким:

$$q_{\max} = \frac{2R}{\pi\, b\, r}.$$

Давление в узле трения на сектор с центральным углом, отсчитываемым от направления реакции, определяем как

$$q_{\max} = \frac{2R}{\pi b\, r}.$$

Поскольку скорость скольжения $V_{ск} = \omega \frac{d}{2}$, то интенсивность износа будет такой:

$$\frac{d\Delta}{dt} = k\frac{2R\omega}{\pi b}.$$

Согласно этому выражению круговая цилиндрическая форма поверхности трения будет изменяться в эллиптическую, определение приближенного значения износа позволяет спрогнозировать на стадии проектирования ресурс узла трения.

Для точечного и линейного контакта активных поверхностей высшей пары подобный расчет базируется на уравнениях Герца[16] с соответствующим нагружением и геометрией исходных поверхностей, а также кинематикой подвижного контакта. Так, например, в зубчатом зацеплении относительная скорость скольжения профилей зубьев переменна при движении точки контакта по линии зацепления к границам рабочего участка этой линии. Тем самым объясняется неравномерность износа профиля зуба по его высоте.

Расчет величины реакции, а также геометрия и кинематика подвижного или упругого контакта позволяют проводить расчет энергетических потерь и изменения активных поверхностей уже на стадии проектирования.

В настоящее время в вопросах проектирования узлов трения наблюдается тенденция отказа от борьбы за изначальную и геометрически про-

[16] **Герц Генрих Рудольф** (1857–1894) – немецкий ученый – физик, механик. Основное научное достижение – доказательство существования электромагнитных волн. Результаты его исследований легли в основу создания радио. Работал над теорией удара упругих шаров. В книге «Принципы механики» дал вывод общих теорем механики и их математических решений на основе принципа Герца.

стую поверхность трения. Например, в узлах трения используют поверхности, энергетически более стойкие к износу, они близки к изношенным или к предварительно приработанным (каблук спортивной обуви, форма заточки сверл, форма подпятников, образующая колес вагонов и т. д.).

При создании узлов трения одним из обязательных условий является ослабление интенсивности износа поверхности узлов трения. Это реализуется правильным подбором материалов, состоянием поверхностей трения, хорошей смазкой узла, заменой трения скольжения на трение качения. Механический к.п.д. последовательно соединенных источников потерь определяется согласно (45), поэтому в цепи не желательно появление элемента с малым к.п.д., так как ресурс механической системы также зависит от ресурса узла трения с самым низким к.п.д. Механический к.п.д. характеризует долю трансформируемой в системе энергии, идущей на уничтожение самой системы.

Как уже отмечалось выше, результаты кинетостатического расчета помогают составить полную картину силового воздействия подвижных частей машины на ее основание (стойку).

Один из вариантов предусматривает объединение стойкой всех структурных элементов машины: Д – двигателя; ПМ – передаточного механизма; ИО – исполнительного органа, что соответствует большинству технологических машин.

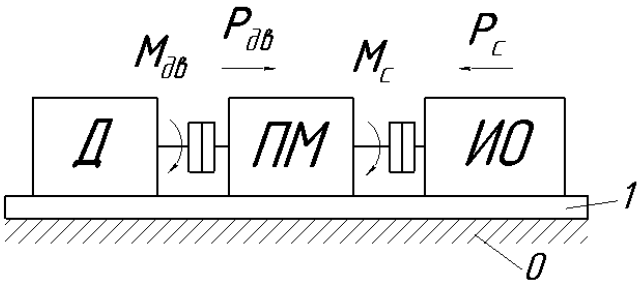
В этом случае стойка *2* на рис. 56, *а* замыкает на себя внешние по отношению к механизму силы: $M_{\partial}, P_{\partial}, M_c, P_c,$ которые не передаются на фундамент *1*, нагруженный только переменным инерционным нагружением подвижной части машины. Инерционное нагружение представляет собой главный вектор сил инерции движения центра масс механизма, а именно:

$$\bar{P}_{ин} = -(m_1 + m_2 + ... + m_i) \cdot \bar{a}_S, \qquad (59)$$

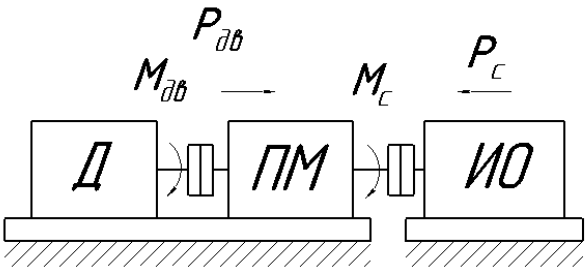
и главный момент инерционных сил

$$\bar{M}_{ин} = \bar{M}_{ин1} + \bar{M}_{ин2} + ... + \bar{M}_{инi} \qquad (60)$$

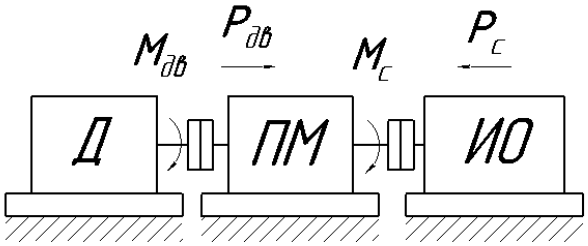
в относительном вращательном движении.



а



б



в

Рис. 56. Варианты силового воздействия на фундамент:
а – схема машины с единым основанием; *б* – схема машины с расположением исполнительного органа на отдельном основании; *в* – схема машины с расположением всех элементов на отдельных основаниях

Во втором случае (рис. 56, *б*) исполнительный орган располагают на собственной (изолированной) стойке. На стойку, объединяющую двигатель и передаточный механизм, будет действовать внешняя сила (M_c, P_c) от рабочего процесса, который будет внешним по отношению к сочетанию двигателя и передаточного механизма (пресс, прицепные сельхозагрегаты и др.), и приведенная инерционная нагрузка от подвижных масс, входящих в состав исполнительного органа.

Третий случай предусматривает раздельное расположение всех элементов машины (рис. 56, *в*). Стойка двигателя будет нагружена «опроки-

дывающим» моментом, равным $\bar{M}_{дс} + \bar{M}_{инд}$, где $\bar{M}_{инд}$ – приведенный момент сил инерции подвижной части двигателя, определяемый неравномерностью движения звена приведения двигателя. Стойка исполнительного органа будет иметь похожую комбинацию нагружения $\bar{M}_{c} + \bar{M}_{ин\ и.о}$, а стойка передаточного механизма будет иметь нагружение от внешних по отношению к нему нагрузок ($\bar{M}_{c} + \bar{M}_{ин\ и.о}$) и ($\bar{M}_{дс} + \bar{M}_{инд}$), но с противоположными знаками. Дополнительно на стойку будет действовать инерционное нагружение подвижной части машины согласно (57) и (58).

В первом варианте используется машина с единой стойкой, которая часто выполняется нежестким монтажом отдельных агрегатов на единой раме, несмотря на то что рама в этом случае не передает на фундамент межагрегатных сил, но монтажные элементы крепления агрегатов межагрегатными силами нагружены в полном объеме. Для расширения монтажных допусков и ликвидации (ослабления) связанных колебаний межагрегатные и монтажные связи выполняют упругими, а поскольку силовое возбуждение, как правило, переменно и носит полигармонический характер, механическая система машины представляет собой сложную колебательную систему. В большинстве случаев силовое возбуждение носит пространственный характер и имеет физическую природу. Жесткости упругих связей переменны, поэтому сложная колебательная система машины реально является нелинейной.

Все конструктивные размеры звеньев и связей механических систем определяются на основе составления и исследования моделей силового нагружения в движении систем, что является предметом прикладной механики и ее раздела – кинетостатики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем учебном пособии раскрывается инженерное приложение фундаментального положения механики, а именно, методика составления схем нагружения звеньев в их неинерциальном движении за счет перевода сил (моментов сил) инерции в категорию внешних сил. При этом достигается формальное равновесие выделяемых из исследуемого механизма структурных групп.

Знание параметров силового нагружения звеньев и подвижных связей механизмов необходимо для проведения конструкторских расчетов всех элементов механической системы, прогнозирования ресурса по износу кинематических пар, расчету механического к.п.д., уравновешиванию разрабатываемых схем механизмов. Эти прикладные задачи составляют основное содержание учебного пособия и будут полезны студентам очного, очно-заочного и заочного отделений при многоуровневой подготовке (бакалавриат, специалитет и магистратура) по техническим направлениям.

Пособие отличается краткостью изложения, наглядностью и простотой подачи учебного материала. Большое количество иллюстраций и кинематических схем, приведенных в нем, позволяют легко разобраться в сложных вопросах инженерной направленности.

Содержание пособия соответствует государственному образовательному стандарту высшего образования и методическим требованиям, предъявляемым к учебным изданиям.

Результаты освоения представленного материала будут востребованы при изучении дисциплины «Прикладная механика» и других специальных дисциплин.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Балакин, П. Д. Динамика машин : учеб. пособие / П. Д. Балакин. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2006. – 317 с.

2. Кожевников, С. Н. Теория механизмов и машин : учеб. пособие / С. Н. Кожевников. – М. : Машиностроение, 1969. – 584 с.

3. Дюндик, О. С. Строение и кинематика механизмов : учеб. пособие / О. С. Дюндик. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2017. – 144 с.

4. Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин / Н. И. Левитский. – М. : Наука, Гл. ред-я физ.-мат. лит-ры, 1979. – 576 с.

5. Фёдоров, Н. Н. Теория механизмов и машин : учеб. пособие / Н. Н. Фёдоров. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2008. – 224 с.

6. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболеский. – 4-е изд. – М. : Наука, 1988. – 640 с.

7. Теория механизмов и машин / [К. В. Фролов и др.] ; под ред. К. В. Фролова. – М. : Высш. шк, 1987. – 496 с.

8. Юдин, В. А. Теория механизмов и машин / В. А. Юдин, Л. В. Петрокас. – М. : Высш. шк., 1967. – 527 с.

9. Белоконев, И. М. Теория механизмов и машин : конспект лекций / И. М. Белоконев, С. А. Балан, К. И. Белоконев. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : ДРОФА, 2004. – 172 с.

10. Фёдоров, Н. Н. Кинетостатика плоских механизмов и динамика машин : учеб. пособие / Н. Н. Фёдоров. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2008. – 224 с.

Учебное издание

Дюндик Ольга Сергеевна

Згонник Ирина Павловна

Федорова Мария Александровна

КИНЕТОСТАТИКА МЕХАНИЗМОВ В МАШИНОВЕДЕНИИ

Учебное пособие

Редактор *О. В. Маер*

Компьютерная верстка *О. Г. Белименко*

Для дизайна обложки использованы материалы
из открытых интернет-источников

Сводный темплан 2020 г.
Подписано в печать 14.07.20. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 8,0. Уч.-изд. л. 8,0.
Тираж 100 экз. Заказ 317.

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр. Мира, 11; т. 23-02-12.
Типография ОмГТУ.